рого порядка с постоянными коэффициентами //Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № I. С.3-6. 3. Гладков А.А. Численное решение задач о применением интегральных уравнений для волновых поверхностных потенциалов //Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т.20. № 2. С.522-528. 4. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М., 1984. 5. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Использование метода граничных интегральных уравнений для определения акустического поля, отраженного от мягкой осесимметричной оболочки //Волны и дифракция: Мат. IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси, 1985. Т.I. С.125-128. 6. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Численное решение осесимметричной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных преобразований. Львов, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2179-Ук86. 7. Пасичник Р.М. Численное решение смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.91

УДК 518.5

Б.О.Попов

РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ /ВЛАСТИВОСТІ ТА АЛГОРИТМИ/

Для одночасного точного та швидкого обчислення на ЕОМ різноманітних функцій $f(x) \in C^{m+2}[a,b]$ необхідно розділити проміжок наближення $[a,b]$ на r частин точками $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$ та знайти на кожній з цих частин $[z_{i-1}, z_i]$, $i = \overline{1,r}$ свій вираз

$$F(A_i, x) = F(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}, x).$$

Найменша максимальна похибка μ на всьому проміжку $[a,b]$ при цьому одержується тоді, коли максимальні похибки μ_i:

$$\mu_i = \inf_{A_i} \max_{x \in [z_{i-1}, z_i]} |[f(x) - F(A_i, x)]/w(x)|, \quad i = \overline{1,r}$$

на кожній з частин $[z_{i-1}, z_i]$ проміжка $[a,b]$ рівні між собою: $\mu_i = \mu$. Тут $W(x) \in C[a,b]$, $w(x) \neq 0$ - вага наближення.

Таке наближення звемо рівномірним наближенням чебишовськими сплайнами. Наближення має $M = (m+2)r - 1$ невідомих параметрів: $(m+1)r$ - це параметри $\{A_i\}_{i=1}^{r}$ виразів $F(A_i, x)$, $i = \overline{1,r}$, що наближають функцію $f(x)$ та $(r-1)$ - вузли $z = \{z_i\}_{i=1}^{r-1}$ сплайна $S(x)$. Донедавна усі вказані невідомі знаходилися внаслідок багатосеяного розв"язування M нелінійних рівнянь в M невідомими. Відповідні методи не одержали розповсюдження через значні труднощі при обчисленні.

Встановлено [1], що якщо при $x \in [a,b]$ $f(x) \in C^{m+2}[a,b]$, $F(A,x) \in C^{m+2}[a,b]$ $w(x) \in C^{1}[a,b]$, $w(x) \neq 0$ та

$$\eta(f,F) = \eta(f(x),F) = f^{(m+1)}(x) - F^{(m+1)}(A,x) \neq 0, \qquad /1/$$

то при $r \to \infty$ похибка

$$\mu = \frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b |\eta(f,F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}} dx\right)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right]. \qquad /2/$$

Функцію /1/ називаємо ядром наближення функції $f(x)$ за допомогою виразу $F(A,x)$.

Формула /2/ формально дає змогу вибрати той вираз $F(A,x)$ із деякого набору, при якому досягається найменша похибка при заданій кількості параметрів. Для цього необхідно мати аналітичні вирази для ядер, що не залежать від параметрів. Відомо, що для многочлена $P_m(x)$ зі степенем m ядро $\eta(f,P_m) = f^{(m+1)}(x)$. Вирази для ядер в інших випадках значно складніші. В основу їх знаходження покладено встановлені загальні властивості ядер [1].

1. Нехай $F(A,x) = \Phi(B,x) = \Phi(b_0, b_1, \dots, b_{m-1}; x)$. Тоді $\eta(f,\Phi) = \eta(f,F) = \eta(f,F)$.
2. Нехай $g(x) \in C^{m+2}[a,b]$, $g(x) f(x) \neq 0$ при $x \in [a,b]$. Тоді $\eta(f,gF) = g(x)\eta(f/g,F)$.
3. Нехай $f(x) > 0$ при $x \in [a,b]$. Тоді $\eta(f,\exp F) = f(x)\,\eta(\ln f, F)$.
4. Нехай $F(A,x) > 0$ при $x \in [a,b]$. Тоді $\eta(f,\ln F) = \exp(-f(x))\,\eta(\exp f, F)$.
5. Нехай $f(x) > 0$ при $x \in [a,b]$, α – дійсне число. Тоді $\eta(f,F^{\alpha}) = \alpha f(x)^{1-1/\alpha}\,\eta(f^{1/\alpha},F)$.
6. Нехай $F_p(A,x) = F(A,x^p)$, де p – ціле число. Тоді $\eta(f,F_p) = (px)^{m+1}\,\eta(f(t^{1/p}),F)\big|_{t=x^p}$

Щоб одержати конкретні вирази для $\eta(f,F_p)$ необхідно у формулу для ядра $\eta(f(x),F)$ підставити $f(t^{1/p})$ замість $f(x)$, узяти всі похідні й далі замінити t на x^p.

За допомогою перелічених, а також і деяких інших властивостей ядер наближень можна знайти аналітичні вирази ядер багатьох наближених виразів. Так ядро наближення за допомогою раціонального многочлена $R_{k,l}(x)$, чисельник якого - многочлен степеня k, а знаменник - многочлен степеня l $(m=k+l)$, має вигляд

$$\eta_{k,l}(f)=\eta(f,R_{k,l})=(m+1)!\ \Delta_{k+1,l+1}(f)/\Delta_{k,l}(f),$$

$$\Delta_{k,l}(f)=\begin{cases} 1 \text{ при } l\leqslant 0 \\ \begin{vmatrix} c_{k+1-l} & c_{k+2-l} & \dots & c_k \\ c_{k+2-l} & c_{k+3-l} & \dots & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k & c_{k+1} & & c_{k+l-1} \end{vmatrix} \text{ при } l>0, \end{cases}$$

$$c_s=c_s(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } s<0 \\ f^{(s)}(x)/s! \text{ при } s\geqslant 0; \end{cases}$$

ядро наближення $\eta(f,V_m)$ за допомогою многочлена за степенями p /p, s - цілі числа/

$$V_m(x)=x^s\sum_{i=0}^{m}a_i x^{ip}$$

виражається за рекурентним співвідношенням

$$\eta(f,V_m)=x^{(p-1)m+s}\,\varkappa_m(f),\qquad m=0,1,2,\dots,$$

де $\varkappa_{-1}(f)=f(x)x^{p-1-s}$, $\varkappa_m(f)=(\varkappa_{m-1}(f)x^{1-p})'$, $m=0,1,2,\dots;$

Ядро наближення $\eta(f,E_m)$ за допомогою суми многочлена та експонент

$$E_m(x)=Ae^{\nu x}+\sum_{i=2}^{m}a_i x^{i-2},\qquad m=1,2,\dots$$

виражається за формулою

$$\eta(f,E_m)=f^{(m+1)}(x)-f^{(m)}(x)^2/f^{(m-1)}(x).$$

Аналітичні вирази ядер одержані також для багатьох інших нелінійних наближень, способи знаходження параметрів яких описано у працях [1, 2]. Для виведення виразів ядер доцільно користуватися системами для аналітичних перетворень на ЕОМ [4].

Нехтуючи останнім співмножником у формулі /2/, переходимо до асимптотично рівномірного наближення, тобто до такого наближення, що для нього справедливе $\mu_i = \mu[1+O(\frac{b-a}{r})$ при $i=\overline{1,r}$. Для асимптотично рівномірного наближення вузли z чебишовського сплайна задовольняють систему рівнянь

$$i\int_a^b |\eta(f,F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}}dx = r\int_a^{z_i} |\eta(f,F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}}dx, \quad i=\overline{0,r}. \qquad /3/$$

Кожне із цих рівнянь може розв"язуватись незалежно від інших, воно містить тільки одне невідоме z_i. Побудовані обчислювальні алгоритми для розв"язання рівняння /3/. Далі за відомими алгоритмами [1,2] можна знайти параметри кожного із r наближень $F(A_i,x)$.

Використовуючи алгоритми [2] для знаходження параметрів найкращих чебишовських наближень різними виразами $F(A,x)$ відповідні аналітичні вирази для ядер наближень [1] та формулу /2/ і рівняння /3/ можна побудувати пакет програм для рівномірного наближення чебишовськими сплайнами гладких функцій. У пакет входить також вибір виду ланок сплайна при наближенні із набору можливих, що дає найменшу похибку і не передбачає фактичної побудови наближень.

Розроблені обчислювальні алгоритми для побудови аналогічного пакета для наближення негладких функцій та функцій заданих у вигляді таблиць [1-3]. Такий пакет не використовує вирази /2/ та /3/, і тому розв"язування задач із його допомогою вимагає значно більше часу ЕОМ.

Вирази /2/ та /3/ особливо корисні для знаходження наближень математичних функцій [4]. У деяких важливих випадках на основі цих формул вдається одержати прості аналітичні вирази для похибки μ та вузлів чебишовських сплайнів z. Так при рівномірному наближенні показникової функції $f(x)=c^{\alpha x}(\alpha\neq 0,\ c>0,\ c\neq 1)$ на проміжку $[a,b]$ при $w(x)=1$ чебишовськими раціональними сплайнами з r ланками

$$\mu = \frac{(m+1)^{m+1}\, k!\, l!}{2^{2m+1} m!(m+1)!\, r^{m+1}}\left|c^{\frac{\alpha b}{m+1}} - c^{\frac{\alpha a}{m+1}}\right|^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right]; \qquad /4/$$

$$z_i = \frac{m+1}{\alpha \ln c}\ln\left[\frac{r-i}{r}c^{\frac{\alpha a}{m+1}} + \frac{i}{r}c^{\frac{\alpha b}{m+1}}\right], \quad i=\overline{0,r}. \qquad /5/$$

Для $f(x)=c^{\alpha x}$ при $w(x)=f(x)$ похибка

$$\mu = \frac{k!\, l!\, (\alpha \ln c)^{m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!\, r^{m+1}}(b-a)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right], \qquad /6/$$

а вузли z_i ділять проміжок $[a,b]$ на рівні частини.

Із рівностей /4/ та /6/ випливає, що у розглянутих випадках найменша похибка μ при сталій кількості $m+1$ параметрів одержується, якщо $k=l$ або $k=l+1$.

Вирази, аналогічні до формул /4/-/6/, одержані для ряду інших математичних функцій. Із їх використанням одержані параметри багатьох раціональних та нелінійних асимптотично рівномірних наближень сплайнами. Деякі з них подано у довіднику [3]. При цьому у більшості випадків із точністю до трьох-чотирьох значущих цифр $\mu_0 = \max_{i\in\overline{1,r}} \mu_i = \min_{i\in\overline{1,r}} \mu_i$. Подамо результати знаходження похибок рівномірного чебишовського раціонального наближення функції e^x на проміжку [0, I] при $w(x)=1$ для різних k та l . Вузли сплайнів знайдені за формулою /5/. Верхня цифра у кожній клітці таблиці - μ , нижня величина, визначена за формулою /4/.

k,l \ r	2	4	8	I6	32
I,0	2,63I/-2/ 2,63I/-2/	6,565/-3/ 6,569/-3/	I,64I/-3/ I,64I/-3/	4,I02/-4/ 4,I02/-4/	I,025/-4/ I,025/-4/
2,0	I,087/-3/ I,088/-3/	I,357/-4/ I,360/-4/	I,696/-5/ I,70I/-5/	2,II9/-6/ 2,I26/-6/	2,649/-7/ 2,649/-7/
3,0	3,38I/-5/ 3,389/-5/	2,III/-6/ 2,II8/-6/	I,3I9/-7/ I,324/-7/	8,242/-9/ 8,275/-9/	- -
I,I	5,4I4/-4/ 5,442/-4/	6,787/-5/ 6,803/-5/	8,488/-6/ 8,503/-6/	I,06I/-6/ I,063/-6/	I,326/-7/ I,329/-7/
2,I	I,I24/-5/ I,I30/-5/	7,032/-7/ 7,06I/-7/	4,396/-8/ 4,4I3/-8/	2,748/-9/ 2,758/-9/	- -
2,2	I,399/-7/ I,409/-7/	4,380/-9/ 4,404/-9/	I,370/-I0/ I,376/-I0/	4,283/-I2/ 4,30I/-I2/	-

Числові дані таблиці показують, що асимптотично рівномірне наближення практично не відрізняється від рівномірного.

Можливі деякі узагальнення введеного поняття рівномірного наближення нелінійними сплайнами. Ефективність рівномірного наближення зростає при можливості вибору виду сплайна на кожній ланці з S можливих. При цьому приходимо до рівномірного наближення P - сплайнами, котре вводиться аналогічно до рівномірного наближення нелінійними сплайнами і відрізняється від останнього тим, що на кожній ланці використовується той із можливих виразів, що дає найменшу похибку. Застосування рівномірного наближення P - сплайнами особливо доцільно у тих випадках, коли наближувані функції мають різний характер зміни на різних частинах проміжку наближення. Такими, наприклад, є функції Бесселя.

І. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К., 1989. 2. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. К., 1960. 3. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. К., 1984. 4. Попов Б.О., Монціб'ович Б.Р. Розв"язування задач на машинах для інженерних розрахунків. К., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.91

УДК 517.944.947

М.Д.Мартиненко, Х.С.Басьюні

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ДАРБУ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай f, g, φ, ψ - неперервні функції своїх аргументів та, крім того, φ та ψ - неперервно-диференційовані*, а f задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L. В області $\Pi=\{|x-x_0|\leq H_1, |y-y_0|\leq H_2\}$ розглянемо задачу Дарбу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=f(u)+g(x,y), \\ &u(x_0,y)=\varphi(y), \quad u(x,y_0)=\psi(x). \end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

При зроблених припущеннях задача /1/ має єдиний розв"язок /4/. Нехай $u_0=u(x_0,y_0)\equiv\varphi(y_0)=\psi(x_0)\neq 0$.

Поставимо у відповідність задачі /1/ виступну лінеаризовану задачу Дарбу:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y}=k\tilde{u}+q(x,y), \qquad k=\frac{f(u_0)}{u_0}, \\ &\tilde{u}(x_0,y)=\varphi(y), \quad \tilde{u}(x,y_0)=\psi(x). \end{aligned}\right\} \qquad /2/$$

Розв"язок задачі /2/ дає формула [1,2]:

$$u(x,y)=u_0 J_0\left(\sqrt{4(-k)(x-x_0)(y-y_0)}\right) +$$

---

* Ця умова не є істотною.