УДК 517.55:517.95

В.Й.Горбайчук, В.М.Тимощук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ"ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Класична теорія наближення функцій оволоділа рядом ефективних методів для дослідження прямих і обернених теорем своєї теорії. Ці методи виявились плідними для якісного дослідження розв"язків крайових задач у плоских канонічних областях. Першими в цьому плані були результати 50-х років І.П.Натансона, О.П.Тімане, Я.Л.Геронімуса, які стосувались оцінок відхилення гармонійних функцій від їх значень на межі в термінах модулів неперервності /М Н/ крайових даних. Їх дослідження підтвердило думку про природну залежність поведінки розв"язків задачі Діріхле від властивостей гладкості функцій, заданих на межі. Ми проводимо дослідження розв"язків більш загальних рівнянь з крайовими даними із різних функціональних класів.

Нехай $u = u(\varphi, r)$ – розв"язок крайової задачі для бігармонійного рівняння $\Delta^2 u = 0$ в одиничному крузі з граничною функцією $f(\varphi), -\pi \leq \varphi \leq \pi$ і нормальною граничною похідною, що дорівнює нулеві. Позначимо через $H_2^{\omega} L_p[-\pi, \pi]$ клас функцій f, МН другого порядку яких $\omega_2(f; t)$ задовольняє умову $\omega_2(f; t) < A\omega(t)$, де $A = const > 0$, $\omega(t), t > 0$ – функція типу МН другого порядку. Якщо f – неперервна, то $\|u(\cdot, r) - f(\cdot)\| \leq A_1 \omega(1-r)$, $A_1 = const > 0$ [7]. С.Канієв [5] досліджував $\|u(\varphi, r) - f(\varphi)\|$ у випадку розривних $f(\varphi)$ з можливими точками φ розриву першого роду. Якщо $W_\varphi(\delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(\varphi + t) - 2f(\varphi) + f(\varphi - t)\|$, то справедливе таке уточнення /за порядком/ результату С.Канієва.

<u>Теорема 1</u> / [1]/. Якщо точка φ така, що

$$\int_0^{\pi} \frac{W_\varphi(t)}{t} \, dt < \infty,$$

то при $0 < r_0 \leq r < 1$

$$\|u(\varphi, r) - f(\varphi)\| \leq C\left[\int_0^{1-r} \frac{W_\varphi(t)}{t} \, dt + (1-r)^2 \int_{1-r}^{\pi} \frac{W_\varphi(t)}{t^3} \, dt\right].$$

Теорема С. Канієва допускає обернення, досліджене в [3,4].

Теорема 2 /[3]/. Нехай $f \in L_p[-\pi,\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, $u(\varphi, r)$ - розв"язок бігармонійної задачі Діріхле. Якщо при деякому фіксованому цілому невід"ємному k виконується нерівність

$$\|u(\cdot,r)-f(\cdot)\| \leq A(1-r)^k \omega(1-r), \quad A=const>0, \quad 0\leq r<1,$$

де $\omega(t), t>0$ - функція типу МН другого порядку, яка при $k \geq 1$ задовольняє умову Діні, то $f(\varphi)$ майже для всіх $\varphi \in [-\pi,\pi]$ збігається з функцією, яка має абсолютно неперервну похідну $f^{(k-1)}(\varphi)$ і похідну $f^{(k)} \in L_p[-\pi,\pi]$ /при $p=+\infty$ неперервну/, причому

$$\omega_2(f^{(k)};t) \leq \begin{cases} A_1(1-r)^2 \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\omega(u)}{u^3}\,du, & k=0, \\ A_2\left[\int\limits_0^{1-r} \frac{\omega(u)}{u}\,du + (1-r)^2 \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\omega(u)}{u^3}\,du\right], & \text{якщо } k \geq 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \leq r < 1$ де A_1, A_2 - додатні сталі, що не залежать від r.

Важливим моментом у цьому дослідженні є оцінка /[3]/:

$$\left\|\frac{\partial^k u(\varphi,r)}{\partial\varphi^k}\right\| \leq M\frac{\|f\|}{(1-r)^k}, \quad 0\leq r<1, \quad M=const>0,$$

яку розглядаємо як аналог відомих оцінок С.Н.Бернштейна для похідних тригонометричних поліномів. Якщо $f \in H_2^{\omega} L_p[-\pi,\pi]$, то правильна оцінка

$$\left\|\frac{\partial^k u(\varphi,r)}{\partial\varphi^k}\right\| \leq M\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^k}, \qquad /1/$$

яка є аналогом теореми Харді - Літтльвуда для L_p- норми похідних функції $u(\varphi,r)$ за дотичним напрямком. Вказані оцінки висвітлюють поведінку похідних функції $u(\varphi,r)$ поблизу межі області. Цілком аналогічні результати одержані для бігармонійних функцій у півплощині.

У [4] для ітерованого рівняння Гельмгольца $(\Delta - c^2)^2 u = 0$ проведено порівняння граничних властивостей розв"язків у півплощині $y>0$ двох типів крайових задач: задачі Лаурічеллі та задачі Рік"е [5]. Справедливі для обох типів задач повні аналоги оцінок /1/ з ідентичними мажорантами, незважаючи на те, що множина розв"язків задачі Лаурічеллі ширша від множини розв"язків задачі Рік"є для розглядуваного рівняння.

Методом теорії наближення перший з авторів досліджував такі задачі математичної фізики, обернені в причинно-наслідковому відношенні:

1/ задачу відновлення граничних даних у проблемах гармонійного /і бігармонійного/ продовження функції у плоских канонічних областях.

2/ задачу відновлення граничної умови в задачі Діріхле для рівняння $(\Delta - c^2)u = 0$ у півплощині та в задачі Лаурічеллі для його ітерації;

3/ задачу відновлення початкової умови в задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності тощо.

1. Г о р б а й ч у к В.И. О некоторых граничных свойствах бигармонических функций //Изв. вузов. Математика. 1974. № 12. С.54-57. 2. Г о р б а й ч у к В.И. Обратные теоремы приближения бигармоническими функциями //Матем. физика. 1976. Вып. 19. С.73-78. 3. Г о р б а й ч у к В.И., Т и м о щ у к В.Н. Об обратных теоремах приближения бигармоническими функциями //Укр. матем. журн. 1986. Т.38. № 5. С.569-575. 4. Г о р б а й ч у к В.И., Т и м о щ у к В.Н. О граничном поведении решений некоторых краевых задач в канонических областях. Приближенные методы решений некоторых задач математ. физики. Луцк, 1990. С.33-38. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 915. Ук-90 Деп. 5. Г о р б а й ч у к В.И. Умови розв"язності задачі Рік"є для бігармонійного рівняння у півплощині і граничні властивості, розв"язків // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1983. № 7. С.9-13. 6. К а н и е в С. Локальные уклонения бигармонических в круге функций от их граничных значений //Уч. зап. Казан. ун-та. 1964. Т. 124. Кн.6. С.144-147. 7. К а н и е в С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений //Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 5. С.995-998.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.91

УДК 621.865

Р.О.Сорока

ПОБУДОВА ПРОГРАМНИХ РУХІВ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ РОБОТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙНІВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Поліноміальні сплайни широко використовуються для побудови програмних рухів маніпуляційних роботів [1,2]. Неперервні механічні характеристики руху дають кубічні сплайни. Проте вимоги проходження сплайну через задані вузли зі заданою швидкістю приводять до появи додаткових умов на його коефіцієнти. Це є однією з причин збільшення порядку сплайну.

Нехай $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - задані інтервали часу /вузли/, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ і $V_1, V_2, \ldots, V_n$ - відповідно значення інтерполяційного полінома та його першої похідної у цих вузлах, неперервного на інтервалі $/t_1, t_n/$ разом зі своїми першою та другою похідними.

Тоді коефіцієнти полінома $Q[q, t_i] = \sum_{i=0} a_i^{(l)} (t_{i+1} - t)^l, \ \overline{i=1, n-1}$ повинні задовольняти такі умови при $\overline{i=1, n-2}$

$$q_i(t_{i+1}) = \theta_{i+1}; \ \dot{q}_i(t_{i+1}) = V_{i+1}, \ q_i(t_{i+1}) = q_{i+1}(t_{i+1}),$$