УДК 517.956

І.В. Коробчук, О.В.Лисенко

ГЕОМЕТРИЧНА ОЦІНКА ПЕРШОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ БІГАРМОНІЙНОГО ОПЕРАТОРА У ПРОСТОРІ E^3

Розглянемо метод знаходження першого власного числа задачі

$$\Delta^2 u - \lambda^4 u = 0; \quad /1/$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad /2/$$

що задана в опуклому тілі Ω з гладкою межею $\partial\Omega$. Апроксимуємо тіло зовні многогранником. Нехай Q – точка мінімумів функціоналів

$$B(Q) = \sum_p \frac{S_p}{h_p}; \qquad B = \min_Q B(Q);$$

$$m(Q) = \sum_p \frac{S_p}{h_p^2}; \qquad m = \min_Q m(Q),$$

де S_p – площа p-ї грані многогранника; h_p – відстань від Q до p-ї грані. При переході до сферичних координат (r, θ, φ) з центром в Q з рівняння /1/ отримуємо

$$\lambda_1^4 = \frac{1}{u}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{4}{r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{r^4}\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} - \operatorname{ctg}^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta(3+\operatorname{ctg}^2\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^4\sin^4\theta}\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big) + \frac{2}{r^2}\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial r^2\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^3 u}{\partial r^2\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^4 u}{\partial r^2\partial\varphi^2}\Big) + \frac{2}{r^4\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\varphi^2} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^2\partial\theta}\Big)\Big], \quad /3/$$

де $u \in C^{(4)}[\Omega]$ задовільняє граничні умови /2/.

Введемо функції

$$B_1 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}; \quad B_2 = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial r}; \quad B_3 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3};$$

$$B_4 = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial\theta}; \quad B_5 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^3}; \quad B_6 = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial\varphi};$$

$$B_7 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial r^2\partial\theta}; \quad B_8 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial r\,\partial\varphi^2}; \quad B = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^2\partial\theta},$$

які конструктивно будуються. Для цього шляхом з"єднання точки Q з гранями многогранника розбиваємо тіло Ω на частини Ω_p, а проекцією Q на p -ту грань буде точка $M_p(h_p, \theta_p, \varphi_p)$.

Розглянемо функції

$$\psi = \frac{br\cos\alpha_p}{h_p}, \quad H_{\frac{1}{2}}(\psi) = W'_{\frac{1}{2}}(b)\omega_{\frac{1}{2}}(\psi) - \omega'_{\frac{1}{2}}(b)W_{\frac{1}{2}}(\psi), \qquad /4/$$

де, b - найменший додатній корінь рівняння

$$W'_{\frac{1}{2}}(x)\omega_{\frac{1}{2}}(x) - \omega'_{\frac{1}{2}}(x)W_{\frac{1}{2}}(x) = 0,$$ $\omega_{\frac{1}{2}}(x)$ – розв"язок рівняння Лапласа

$$\omega'' + \frac{2\nu+1}{x}\omega' + \omega = 0$$

, а $W_{\frac{1}{2}}(x)$ - розв"язок модифікованого рівняння Лапласа

$$W'' + \frac{2\nu+1}{x}W' - W = 0,$$

$$\cos\alpha_p = \sin\theta_p \sin\theta\cos(\varphi - \varphi_p) + \cos\theta_p\cos\theta.$$

Таким чином побудована функція $H_{\frac{1}{2}}(\psi)$ задовольняє граничні умови /2/. Якщо тепер покласти $B_i = 0$ /$i = \overline{3,9}$/, а

$$B_1 = \frac{b^3\cos^2\alpha_p}{h_p^3}\,\frac{H'''_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}; \qquad B_2 = \frac{b\cos\alpha_p}{h_p}\,\frac{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)},$$

то рівняння /3/ запишемо наступним чином:

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}\left[H^{(4)}_{\frac{1}{2}} + \frac{4}{\psi}H'''_{\frac{1}{2}}\right] = \lambda_1^4 H_{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи співвідношення /4/, отримуємо

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4} = \lambda_1^4$$

Шляхом усереднення за областю Ω отримуємо оцінку знизу

$$\lambda_1^4 \geqslant \left(\frac{b^2 B}{3V}\;\frac{4\pi}{m}\right)^2,$$

де V - об"єм тіла Ω.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.91