УДК 519.622.2

Б.І.Дутчак

ПРО ОДИН СПОСІБ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЖОРСТКИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо один із можливих способів побудови наближених методів чисельного розв"язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x,t), \quad x(t_0) = x_0, \qquad /1/$$

де $x \in R^m$; $g(x,t) \in C^{(l,l)}_{t,x}(D)$; $D < I_t * R^m$; $I_t = \{t_0 <= t < \infty\}$; A – квадратна матриця m-го порядку і наявна нерівність $\|Ax\| >> \|g(x,t)\|$ в області D.

На основі розкладу

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s+1} \left[\left[\sum_{i=0}^{s} \frac{h^i C_{s-i}}{i!} \right] \frac{d^s x(t_{n-1})}{dt^s} - \frac{d^s x(t_n)}{dt^s} \right] + (-1)^{k+2} \int_0^h \left[\sum_{s=0}^{k} \frac{\tau^s C_{k-s}}{s!} \right] \frac{d^{k+1} x(t_n+\tau)}{d\tau^{k+1}}, \qquad /2/$$

де $C_0 = E, C_j$ $(j = 1,2,\dots,k-1)$ – довільні квадратні матриці, а матриця C_k вибирається з умови нульового інтеграла в /2/ на розв"язку системи /1/, будуються методи різних порядків. Однак для досягнення порядку точності $2k$ матриці C_{s-i} обчислимо за формулою

$$C_{s-i} = (-1)^s \frac{(2s-i)!\; s!}{i!\,(s-i)!\,(2s)!} E, \qquad /3/$$

де $s = 1,2, k-1$; $0 \le i \le s$ а матрицю C_k вибираємо з умови нульового інтеграла в /2/

$$C_k = (-1)^k \left\{ exp(Ah) \sum_{i=0}^{k} \frac{(2k-i)!\, k!}{i!\,(k-i)!\,(2k)!} (-Ah)^i - \sum_{i=0}^{k} \frac{(2k-i)!\, k!}{i!\,(k-i)!\,(2k)!} * (Ah)^i \right\} (E - exp(Ah))^{-1} A^{-k}. \qquad /4/$$

У цьому випадку метод

$$u_{n+1}^{<i+1>} = u_n^{<i>} + \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s+1} \left[\left[\sum_{i=0}^{s} \frac{h^i C_{s-i}}{i!} \right] u_{n+1}^{(s)} - C_s u_n^{(s)} \right], \qquad /5/$$

де $u_{n+1}^{(s)}$ s-та похідна в точці $n+1$, а матриці C_{s-1}, C_k визначають відповідно за виразами /3/, /4/, буде точним на розв"язку лінеаризованої системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

отже він буде A-стійким.

У випадку жорстких систем /I/ губляться всі переваги A-стійких методів при обчисленні з постійним кроком. Метод /5/ може бути поширений на розрахунок зі змінним кроком. При цьому крок h необхідно замінити на h_n.

Оскільки сім"я методів /5/ є неявною, то внаслідок застосування їх до нелінійних систем /I/ отримуємо системи нелінійних рівнянь, до розв"язування яких потрібно застосовувати методи типу Ньютона. Так, наприклад, при застосуванні до системи /I/ методу четвертого порядку отримаємо ітераційну процедуру

$$u_{n+1}^{(i+1)} = u_{n+1}^{(i)} - \left\{E - \frac{h_n}{2}\left[A + \left[\frac{\partial g(u_{n+1}^{(i)}, t_{n+1})}{\partial u_{n+1}}\right]\right] + \right.$$

$$\left. + C_2\left[\frac{\partial \varphi(u_{n+1}^{(i)}, t_{n+1})}{\partial u_{n+1}}\right]\right\}^{-1}\left\{\left[E - \frac{h_n}{2}A\right]u_{n+1}^{(i)} + \frac{h_n}{2}g(u_{n+1}^{(i)}, t_{n+1}) + \right.$$

$$\left. + C_2\varphi(u_{n+1}^{(i)}, t_{n+1}) - \left[E + \frac{h_n}{2}A\right]u_n + \frac{h_n}{2}g(u_n, t_n) - C_2\varphi(u_n, t_n)\right\}$$

де $u_{n+1}^{(i)}$ i-та ітерація за Ньютоном для u_{n+1}, $\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]$ – матриця Якобі;

$$\varphi(u,t) = \left[A + \left[\frac{\partial g(u,t)}{\partial u}\right]\right]\left[Au + g(u,t)\right] + \frac{\partial g(u,t)}{\partial t},$$

$$C_2 = \left[(E - \frac{h}{2}A)\exp(Ah) - (E + \frac{h}{2}A)\right](E - \exp(Ah))^{-1}A^{-2}.$$

Очевидно, що при застосуванні методів /5/ необхідно мати ефективний метод для обчислення матричної експоненти. Існує три способи обчислення матричної експоненти:

I/ класичний метод

$$\exp(Ah) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{i!} \quad ;$$

2/ Паде апроксимація

$$R_{k,\ell}(Ah) = Q^{-1}_{k,\ell}(Ah)\, P_{k,\ell}(Ah), \quad \text{де}$$

, де

$Q_{k,\ell}(A,h)$; $P_{k,\ell}(Ah)$ матричні многочлени вигляду

$$Q_{k,\ell}(Ah) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{(k+\ell-i)!}{i!\,(k-i)!}(-Ah)^i,$$

$$P_{k,\ell}(Ah) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{(k+\ell-i)!\;\ell!}{k!\,i!\,(\ell-i)!}(Ah)^i;$$

3/ розкладання в ряд матричної експоненти за многочленами Чебишова та функціями Бесселя

$$\exp(Ah) = I_0(A) + 2\sum_{j=0}^{\infty} I_j(A)\, T_j(h), \qquad /6/$$

де I_j /a/ – функції Бесселя j -го порядку; $T_j\, h$ – многочлени Чебишова першого роду. На основі проведених експериментів виявилось, що застосування формули /6/ є більш ефективним.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.91

УДК 539.3

В.Ю.Середа

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ РОЗЩЕПЛЕННЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ"ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

Ідея методу розщеплення наближеного розв"язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = P_0(x) + \lambda\int_a^{\ell} K(x,s)\,\varphi(s)\,ds \qquad /I/$$

полягає в тому [I,2], що область визначення ядра $a \leqslant x, s \leqslant b$ ділиться на m прямокутників прямим, паралельними до осі OX: $s = s_k$ $(k=\overline{0,m};\ s_0 = a,\ s_m = b)$, і в кожному з таких прямокутників ядро $K(x,s)$ рівняння /I/ подається у вигляді суми двох ядер – виродженого і малого за нормою:

I3-3036