2/ Паде апроксимація

$$R_{k,l}(Ah) = Q^{-1}_{k,l}(Ah)\, P_{k,l}(Ah) \quad , \text{ де}$$

, де

$Q_{k,l}(A,h)$; $P_{k,l}(Ah)$ матричні многочлени вигляду

$$Q_{k,l}(Ah) = \sum_{i=0}^{l} \frac{(k+l-i)!}{i!\,(k-i)!} (-Ah)^i ,$$

$$P_{k,l}(Ah) = \sum_{i=0}^{l} \frac{(k+l-i)!\ l!}{k!\,i!\,(l-i)!} (Ah)^i ;$$

3/ розкладання в ряд матричної експоненти за многочленами Чебишова та функціями Бесселя

$$exp(Ah) = I_0(A) + 2\sum_{j=0}^{\infty} I_j(A)\, T_j(h), \qquad /6/$$

де I_j /a/ – функції Бесселя j -го порядку; $T_j\, h$ – многочлени Чебишова першого роду. На основі проведених експериментів виявилось, що застосування формули /6/ є більш ефективним.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.91

УДК 539.3

В.Ю.Середа

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ РОЗЩЕПЛЕННЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ"ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

Ідея методу розщеплення наближеного розв"язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = P_0(x) + \lambda\int_a^l K(x,s)\varphi(s)ds \qquad /I/$$

полягає в тому [I,2], що область визначення ядра $a \leq x, s \leq b$ ділиться на m прямокутників прямим, паралельними до осі OX: $s = s_k$ ($k=\overline{0,m}$; $s_0 = a$, $s_m = b$), і в кожному з таких прямокутників ядро $K(x,s)$ рівняння /I/ подається у вигляді суми двох ядер – виродженого і малого за нормою:

I3-3036

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{m} K_k(x,s)+D(x,s),$$
$$K_k(x,s)=\sum_{i=1}^{n_k} P_{ik}(x)\,Q_{ik}(s)$$

при $S_{k-1}<S<S_k\ |k=\overline{1,m}|$ де, n_k - кількість членів апроксимації ядра на k -му прямокутнику. Розв"язок $\varphi(x)$ рівняння /I/ шукається у вигляді

$$\varphi(x)=M_0(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\,M_{ik}(x),$$

де $$\alpha_{ik}=\int_{S_{k-1}}^{S_k} Q_{ik}(s)\varphi(s)\,ds \qquad (i=\overline{1,n};\ \ k=\overline{1,m}),$$

$$n=\max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$$

Для визначення невідомих функцій $M_0(x)$ і $M_{ik}(x)$ потрібно розв"язати $nm+1$ допоміжних інтегральних рівнянь

$$M_0(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b D(x,s)M_0(s)\,dS,$$
$$M_{ik}(x)=P_{ik}(x)+\lambda\int_a^b D(x,s)M_{ik}(S)\,dS \quad (i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m})$$

з одним і тим же "малим" ядром $D(x,s)$, а параметри α_{ik} визначаються зі системи nm лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\vec{\alpha}=\vec{b}, \tag{3}$$

де $A=E-\lambda C$, C-nm-квадратна матриця з елементами

$$c_{ik,rs}=\int_{S_{k-1}}^{S_k} Q_{ik}(s)M_{rs}(s)\,ds \qquad (i,r=\overline{1,n};\ k,s=\overline{1,m}),$$

$\vec{\alpha}=\{\alpha_{ik}\}$, $\vec{b}=\{b_{ik}\}$ - nm-компонентні вектори, причому

$$b_{ik}=\int_{S_{k-1}}^{S_k} Q_{ik}(s)M_0(s)\,dS \qquad (S_{k-1}\leq S\leq S_k,\ k=\overline{1,m}).$$

Виведено апріорну оцінку похибки методу розщеплення, доведено збіжність його. Швидкість збіжності методу можна регулювати як збільшенням кількості членів апроксимації ядра на прямокутниках $S_{k-1}<S\leq S_k$, $k=\overline{1,m}$, так і подрібненням області $a\leq x,s\leq b$, тобто збільшенням кількості прямокутників.

Апріорний характер оцінки похибки дає змогу оптимально вибирати деякі параметри методу розщеплення з метою відшукання розв"язку даного інтегрального рівняння з довільною наперед заданою точністю.

Розглянуто так звані "багатоступінчасті" методи розв"язання лінійних інтегральних рівнянь вигляду /I/; зокрема детально досліджено двохступінчастий метод, ідея якого полягає в тому, що ядро $D(x,s)$ допоміжних інтегральних рівнянь /2/ подається в області $a \leqslant x, s \leqslant b$, розглядуваній як, наприклад, один прямокутник, у вигляді суми двох ядер:

$$D(x,s) = \sum_{j=1}^{m} y_j(x) z_j(s) + D_1(x,s),$$

де ядро $D_1(x,s)$ "мале" порівняно з ядром $D(x,s)$, а для розв"язання допоміжних інтегральних рівнянь /2/ застосовується розглянутий метод розщеплення. Перевага багатоступінчастих методів розв"язання інтегральних рівнянь полягає в тому, що вони дають змогу зводити розв"язання системи допоміжних алгебраїчних рівнянь /3/, скажімо, t -го порядку, при одноступінчастому методі до розв"язання декількох систем більш низьких порядків $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $| n_1 + n_2 + \ldots + n_k = t$ з k різними матрицями при k -ступінчастому методі; при цьому кількість допоміжних інтегральних рівнянь типу /2/ не залежить від k.

Досліджено застосування методу розщеплення для відшукання власних функцій інтегральних рівнянь вигляду /I/, виведено апріорну оцінку похибки методу, дано спосіб відшукання власних значень ядра інтегрального рівняння.

Досліджено метод розщеплення розв"язання інтегральних рівнянь з використанням формул чисельного інтегрування. Зокрема, показано побудову реальних алгоритмів чисельного розв"язання рівнянь вигляду /I/ і виведено оцінку похибки одного класу реальних алгоритмів розв"язання цих рівнянь на базі методу розщеплення. Оскільки повна похибка реального розв"язку рівняння /I/ залежить від реальних розв"язків допоміжних інтегральних рівнянь /2/ і системи алгебраїчних рівнянь /3/, то проведено детальне дослідження усіх похибок, що виникають у процесі реального розв"язання інтегрального рівняння /I/ на ЕОМ.

I. К а л а й д а А.Ф., С е р е д а В.Ю. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений второго рода //Укр. математ. журн. I968. Т.20. № 2. С. 257-263. 2. С е р е д а В.Ю. Узагальнений метод розв"язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду //ДАН УРСР. Сер. А, фіз. Техн. та мат. науки. I968. № 2. С.I27-I3I.

Стаття надійшла до редколегії 05.I2.9I