

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

37

1992



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 37

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО «СВІТ»
1992

УДК 518

У Віснику містяться статті з числових методів розв'язування рівнянь математичної фізики і задач оптимізації.

Для наукових працівників, викладачів та студентів старших курсів.

Бібліогр. в кінці статей.

Редакційна колегія; проф., д-р фіз.-мат. наук Я.Г.Савула /відп. ред./, доц., канд. фіз.-мат. наук Ю.М.Щербина /відп. секр./, доц., канд. фіз.-мат. наук М.Я.Бартіш, доц., канд. фіз.-мат. наук В.С. Височанський, доц., канд. фіз.-мат. наук І.І.Чулик.

Відповідальний за випуск канд. фіз.-мат. наук Ю.М.Щербина

Адреса редколегії: 290000 Львів, вул. Університетська, 1.
Університет, кафедра прикладної математики

Редактор М.Д.Горбаль

В 1602000000-059
225-92

Замовне

© Львівський університет,
1992

М.Я.Бартіш, С.М.Шахно

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ТИПУ НЬЮТОНА ДЛЯ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У праці [1] для розв'язання нелінійного операторного рівняння

$$P(x) = 0, \quad /1/$$

де $P(x)$ - оператор, який діє з банахового простору X в банаховий простір Y , ми запропонували метод

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [P'((1-\mu)x_n + \mu y_n)]^{-1} P(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - [P'((1-\mu)x_n + \mu y_n)]^{-1} P(x_{n+1}), \end{aligned} \quad /2/$$

де $n = 0, 1, \dots$, $x_0 = y_0$ - початкове наближення; μ - довільний дійсний параметр.

При $\mu = 0$ із /2/ отримуємо класичний метод Ньютонa, при $\mu = 0,5$ - модифікацію методу зі швидкістю $1 + \sqrt{2} / 2$ /. Відзначимо, що на кожній ітерації методу /2/ необхідно обчислювати лише один раз оператори $P(x)$ і $P'(x)$. Крім того, наявність в ітераційних формулах /2/ вільного параметра μ дає змогу розглядати окремі методи з єдиної точки зору, а також досліджувати вплив цього параметра на швидкість збіжності ітерацій.

Достатні умови збіжності ітерацій /2/ до точного розв'язку x^* рівняння /1/ подамо у наступній теоремі.

Теорема. Нехай виконуються умови, що:

1/ для початкового наближення x_0 існує обернений оператор

$$\Gamma_0 = [P'(z_0)]^{-1} = [P'(x_0)]^{-1},$$

причому $\|\Gamma_0\| \leq B_0$, де

$$z_0 = (1-\mu)x_0 + \mu y_0;$$

$$2/ \quad \|\Gamma_0\| \|P(x_0)\| \leq \eta_0;$$

$$3/ \quad \text{для } x \in S_0 = \{x: \|x - x_0\| \leq 2\eta_0\}$$

$$\|P''(x)\| \leq M; \quad \|P''(x'') - P''(x')\| \leq N \|x'' - x'\|;$$

$$4/ \quad h_0 = B_0 \left(\frac{N}{3} (1 + 3\mu^2) \eta_0 + M (1 + \mu) \right) \eta_0 < \frac{1}{2}.$$

Годі ітераційний процес /1/ збігається по нормі до розв'язку x^* рівняння /2/, який належить до області S_0 . При цьому швидкість збіжності ітерації /2/ характеризується оцінкою

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-1}} \eta_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad /3/$$

Як видно з /3/, в цілому гарантується квадратична швидкість збіжності ітераційного процесу /2/. Лише при значенні $\mu = 0,5$ вдається довести вищий порядок збіжності - $1 + \sqrt{2}$ [2].

Ми провели також експериментальне дослідження методу /2/ при розв'язуванні одного нелінійного рівняння з однією змінною. Для різних початкових наближень розв'язували рівняння

$$x^3 - 2x - 5 = 0, \quad x^* = 2,094\,551\,432\,54 \dots \quad /4/$$

$$2x - \lg(2x+3) - 1 = 0, \quad x^* = 2,304\,104\,389\,74 \dots \quad /5/$$

до досягнення наближення до розв'язку x^* з точністю $\varepsilon = 10^{-7}$. Подамо залежність кількості ітерацій від параметра μ при різних початкових наближеннях /символ " ∞ " в таблиці означає розбіжність методу/:

Задача, початкове наближення	$\mu = -1000$	$\mu = -100$	$\mu = -10$	$\mu = -5$	$\mu = -1$	$\mu = 0$	$\mu = 0,5$	$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 10$	$\mu = 100$	$\mu = 1000$
Задача /4/	∞	∞	7	6	5	5	4	5	6	∞	∞	∞
$x_0 = y_0 = 2,5$												
$x_0 = y_0 = 5$	∞	∞	∞	∞	7	6	6		∞	∞	∞	∞
Задача /5/												
$x_0 = y_0 = 20$	7	7	6	6	5	5	4	5	5	6	7	7
$x_0 = y_0 = -1$	8	6	∞	5	5	4	4	4	5	5	7	7

Числові результати підтверджують, що найбільш ефективним методом з класу /2/ є метод при $\mu = 0,5$ /2/.

І. Б а р т і ш М.Я., Ша х н о С.М. Обобщенный метод ньютоновского типа для решения нелинейных операторных уравнений //Применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях: Тез. докл. науч.-техн. конф. Киев, 1991. С.132.

2. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь //Доповіді АН УРСР. Сер.А. 1968. № 5. С.387-391.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.91

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.М.Щербина

АЛГОРИТМ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОГО МІНІМАКСУ

Розглянемо задачу дискретного мінімаксу

$$\min_{x \in R^n} F(x), \quad F(x) = \max_i f_i(x), \quad i \in J = \{1, 2, \dots, l\}, /1/$$

де $f_i(x)$ - неперервно диференційовані функції, а R^n - n -мірний евклідів простір.

В /1/ досліджено ефективний підхід для розв'язування задачі /1/, який ґрунтується на лінеаризації функцій $f_i(x)$. Проаналізуємо модифікацію алгоритму лінеаризації, для збіжності якої не вимагається виконання умов Ліпшица для функцій $f_i(x)$.

Поставимо у відповідність точці x допоміжну задачу

$$\min_{p, \beta} \left\{ \beta + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle + \langle f_i^i(x), p \rangle + f_i(x) \leq \beta, \quad i \in J_\varepsilon(x) \right\}, \quad /2/$$

де A - симетрична додатно означена матриця, а

$$J_\varepsilon(x) = \{i \in J: f_i(x) \geq F(x) - \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Розв'язок задачі /2/ та її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x)$, $\beta(x)$ та $u^i(x)$, $i \in J_\varepsilon(x)$;

$$u^i(x) = 0, \quad i \notin J_\varepsilon(x).$$

Функція Лагранжа для задачі /2/ має вигляд

$$z(x, u) = \sum_{i \in J_\varepsilon} u^i f_i(x).$$

Позначимо через L та D фактори Холеського для матриці:

$$A = LDL^T,$$

де L - нижня трикутна одинична матриця; D - додатна діагональна матриця; L^T - транспонована L .

Нехай вибрані числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1/2$.

$\varepsilon_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$ та початкове наближення x_0 . Вважатимемо, що

© Голуб Б.М., Щербина Ю.М., 1992

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_n$ / J_n - одинична матриця розмірності n / та задамо довільне правило розрахунку додатно означених симетричних матриць A_k .

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_k , число C_k та матриця A_k вже побудовані.

1. Розв'язуючи задачу /2/ при $x = x_k$, $A = A_k$, обчислити $p_k = p(x_k)$, $u_k^i = u^i(x_k)$, $i \in J_S(x)$.

2. Якщо $\|p_k\| > C_k$ або $F(x_k + p_k) > F(x_0)$, то прийняти $C_{k+1} = C_k$ та перейти до кроку 3. В іншому ж випадку встановити, що $x_{k+1} = x_k + p_k$, $C_{k+1} = \gamma \|p_k\|$ та перейти до кроку 4.

3. Починаючи з $\alpha = 1$, ділити α навпіл до першого виконання нерівності

$$F(x_k + \alpha p_k) \geq F(x_k) - \alpha \varepsilon \langle p_k, A_k p_k \rangle.$$

Прийняти $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$.

4. Перерахувати матрицю A_{k+1} . Якщо $\max \alpha_{k+1}^i / \min d_{k+1}^i \leq S$, то перейти до кроку 1. В іншому ж випадку прийняти $A_{k+1} = I_n$ та перейти до кроку 1.

Сформулюємо достатні умови збіжності алгоритму.

Т е о р е м а 1. Нехай множина $\Omega = \{x : F(x) \leq F(x_0)\}$ компактна та існують такі числа $M \geq m > 0$ що

$$m \|z\|^2 \leq \langle z, A_k z \rangle \leq M \|z\|^2, \quad z \in R^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді алгоритм генерує послідовність $\{x_k\}$, в довільній граничній точці якої виконуються необхідні умови мінімуму для задачі /1/.

Матриці A_k доцільно будувати на основі квазіньютонівського перерахунку /2/.

Нехай матриця A_k відома. Обчислимо матрицю

$$A_{k+1} = A_k + \Delta A_k, \quad /3/$$

де ΔA_k - квазіньютонівська поправка. ΔA_k може бути, наприклад, матрицею бройденівського типу

$$\Delta A_k = \frac{y_k y_k^T}{\langle y_k, s_k \rangle} - \frac{A_k s_k s_k^T A_k}{\langle s_k, A_k s_k \rangle} + \theta_k \tilde{z}_k v_k v_k^T, \quad /4/$$

$$y_k = \chi_x(x_{k+1}, u_k) - \chi'_x(x_k, u_k),$$

$$s_k = x_{k+1} - x_k, \quad \tilde{z}_k = 1 / \langle s_k, A_k s_k \rangle,$$

$$v_k = y_k / \langle s_k, y_k \rangle - A_k s_k / \langle s_k, A_k s_k \rangle, \quad 0 \leq \theta_k \leq 1.$$

За допомогою модифікованого LDL^T - розбиття Холеського /4/ будемо додатно означену матрицю A_{k+1} :

$$A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} L_{k+1}^T = \bar{A}_{k+1} + E_{k+1}, \quad /5/$$

де E_{k+1} - невід'ємна діагональна матриця.

Т е о р е м а 2. Нехай множина $\Omega = \{x: F(x) \leq F(x_*)\}$ компактна, градієнти $f_i'(x)$, $i \in J$ задовольняють в Ω умову Ліпшиця, а матриці A_k перераховуються за формулами /3/-/5/. Тоді алгоритм генерує послідовність $\{x_k\}$ в довільній граничній точці якої виконуються необхідні умови мінімуму для задачі /1/.

Припустимо тепер, що x_* - єдина точка, в якій виконуються необхідні умови мінімуму, а функції $f_i(x)$, $i \in J$ тричі неперервно диференційовні в околі точки x_* .

Позначимо через J_* множину активних в точці x_* функцій:

$$J_* = \{i \in J: f_i(x_*) = F(x_*)\}.$$

Вважатимемо, що виконані наступні умови:

1/ вектори $f_i'(x_*) - f_j'(x_*)$, $i, j \in J_*$, $i \neq j$ лінійно незалежні;

$$2/ u_*^T = u'(x_*) > 0, \quad i \in J_*;$$

$$3/ \langle \chi_{xx}''(x_*, u_*) p, p \rangle > 0 \quad \text{для всіх } p \in R^n, \quad p \neq 0.$$

Т е о р е м а 3. Нехай виконуються умови теореми 2 і припущення 1/-3/. Тоді послідовність $\{x_k\}$ наближається до x_* з надлінійною швидкістю.

При практичній реалізації алгоритму доситьно розв'язувати двоїсту задачу до задачі /2/, а також замість перерахунку матриць A_k безпосередньо обчислювати фактори Холеського L_k і D_k /3/.

1. Пшеничний Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.
2. Щербина Д.Н., Голуб Б.М. Квазинытоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика. 1988. №6. С.66-71. 3. Щербина Д.Н., Голуб Б.М. Квазинытоновская модификация метода линеаризации для решения задачи нелинейного программирования // Численные методы и оптимизация. Таллин, 1988. С.201-205. 4. Гилл Ф., Моррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1995.

Стаття надійшла до редакції 15.12.91

С.Н.Манин, Б.М.Голуб, Г.Г.Цегелик, Ю.М.Щербина
 МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СІТКИ

Розглянемо моделі визначення оптимальної довжини інформаційного пакета при пересилці даних між вузлами обчислювальної сітки і оптимального розподілу файлів за вузлами сітки з кільцевою топологією.

Нехай дані зі зовнішнього запам'ятовуючого пристрою /ЗЗП/ EOM_1 потрібно передати на ЗЗП EOM_2 . Повідомлення /записи/ можуть мати велику довжину, тому розбивається EOM_1 на пакети фіксованої довжини в l байт, які на приймальній стороні / EOM_2 / знову збираються у ціле повідомлення. Відзначимо, що при розбиранні повідомлення останній пакет може виявитись коротшим.

Найпоширенішою реалізацією протокола інформаційного процесу у випадку, який розглядається, є протокол KERMIT. Формат пакета протокола KERMIT містить службову інформацію /заголовок, довжина пакета, номер, тип, контрольне поле/ та інформаційне поле даних. Позначимо довжину службової інформації через l_0 /байт/, а поле даних - через l .

При виникненні у системі передачі даних спотворень останні повинні бути одразу виявлені. З цією метою у контрольне поле записують контрольну суму, використовуючи який-небудь код з виявленням помилок. Нехай β - середнє число логічних операцій на 1 байт при формуванні контрольної суми. У випадку сумування і перевірки контрольної суми спеціальним пристроєм, який характеризується пропускною здатністю /ПЗ/, параметр β буде дорівнювати нулю.

Сформований пакет передається на канал зв'язку /КЗ/. Під КЗ будемо розуміти функціонально зв'язані між собою технічні засоби /кодери, модеми, підсилювачі тощо/, які мають характеристикою ПЗ, і середовище передачі. Під пропускною здатністю КЗ розуміємо ПЗ "вузького місця" КЗ, тобто найменш продуктивного пристрою або середовища передачі. Позначимо ПЗ каналу через C /байт/сек/.

У процесі перетворень і передачі сигналів в КЗ вони можуть спотворюватись. Відісланий пакет зберігається у буферному запам'ятовуючому пристрої у вигляді копії доти, доки від приймального вузла не надійде підтвердження про прийом і відсутність помилок передачі.

(С) Манин С.Н., Голуб Б.М., Цегелик Г.Г. та ін., 1992

У випадку від'ємної відповіді здійснюється повторне відсилення пакета. Повторне відсилення здійснюється також, якщо протягом деякого часу t_r інформація про прийом відсутня. Час t_r називається часом тайм-аута.

Передача інформації може здійснюватись у різних режимах залежно від будови лінії зв'язку: напівдуплексної або дуплексної. У випадку використання напівдуплексної лінії витрачається час для перемикавання з одного напрямку на інший. Позначимо цей час через Θ . У схемі передачі даних, яка розглядається, дуплексну лінію можна ототожнити з напівдуплексною при $\Theta = 0$.

Введемо наступні позначення:

- l_1 - довжина пакета-підтвердження /байт/;
- p - ймовірність спотворення байта /кодової посилки/ в КЗ;
- τ - мінімально можливий час з моменту передачі пакета довжиною l_0 байт до прийому пакета-підтвердження $\Delta = t_r - \tau$;
- t_n - очікуваний час достовірної передачі пакета довжиною $l + l_0$ байт.

У співвідношенні

$$t_n = \frac{\tau + \Delta(1 - q^{l_1})}{q^{l + l_0 + l_1}} \quad /I/$$

$q = (1 - p)^K$, причому $K = 8$ при синхронному способі передачі і $K = 10$ або $K = 11$ при асинхронному способі /залежно від кількості стопових бітів/.

Нехай пересилання інформації здійснюється відповідно із описаною схемою. Припустимо, що зв'язок між ЕОМ встановлено та створення сигналів можливі лише в КЗ.

Позначимо через t_0 , t_0'' - середній час пошуку файлу на ЗЗП відповідно ЕОМ₁ та ЕОМ₂; S_0 , S_0'' - швидкість обміну інформації між ЗЗП і процесором ЕОМ₁ та ЕОМ₂ відповідно /байт/сек/; v_1 , v_2 - швидкодія процесорів ЕОМ₁ та ЕОМ₂ /логічних операцій/сек/; λ - середня кількість операцій на 1 байт поля даних при формуванні пакета; λ' - середня кількість операцій на 1 байт службової інформації при формуванні пакета; L - середня/очікувана/ довжина повідомлень /запису/ у байтах.

Будемо вважати, що всі введені параметри фіксовані, окрім довжини поля даних l .

Час $\tau(l)$ можемо подати у вигляді

$$\tau(l) = K \cdot (l + l_0 + l_1) / c + [\beta \cdot (l + l_0) + \gamma l_1] / v_2 + 2\Theta,$$

де $K = 1$ для синхронного способу передачі і $K = 1,25$ або $K = 1,375$ для асинхронного способу.

Підставляючи $T(l)$ в /1/, отримаємо

$$t_n = \frac{R_1 l + R_2}{q^l},$$

де

$$R_1 = (K/c + \beta/v_c) / q^{(l_c + l_1)}$$

$$R_2 = [K(l_c + l_1)/c + \beta l_c + \gamma l_1] / v_c + 2\theta + \Delta(1 - q^{l_1}) / q^{l_c + l_1}.$$

Нехай $x > 0$. Позначимо через $I(x)$ цілу частину числа x .

Враховуючи час формування пакета та обміну інформацією з ЗПІ, отримаємо очікуваний час пересилання запису /повідомлення/:

$$T(l) = (t_c' + L/s_c') + I(\frac{L}{l}) [t_n(l) + t_1(l)] + \\ + m[t_n(\bar{l}) + t_1(\bar{l})] + (t_c'' + L/s_c''),$$

де $t_1(l) = (\alpha l + \gamma l_c) / v_1$; $\bar{l} = L - l \cdot I(L/l)$,

$$m = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \bar{l} = 0, \\ 1, & \text{якщо } \bar{l} \neq 0. \end{cases}$$

Досліджуючи функцію $T(l)$, доходимо висновку, що величина l може істотно впливати на час пересилання запису. Тому доцільно відзначити довжину l поля даних пакета за критерієм мінімуму очікуваного часу пересилання запису:

$$\min_l \{T(l) : 1 \leq l \leq L, \quad l - \text{ціле}\}. \quad /2/$$

Задачу /2/ можна досить ефективно розв'язувати шляхом неповного перебору допустимих значень l , який базується на твердженні: якщо при переході від l до $l+1$ кількість пакетів не змінюється, то $T(l) < T(l+1)$ і здійснювати обчислення при $l+1$ немає сенсу.

Розглянемо тепер побудову моделі оптимального розміщення файлів за вузлами обчислювальної сітки з кільцевою топологією. У ролі критерію оптимальності приймемо загальну суму добутків об'ємів даних, що становлять запити та відповіді, породжені функціонуванням системи протягом одиниці часу на віддалі, на які ці дані пересилаються. При цьому, якщо вузли сітки пронумерувати у порядку їх наступності по кільцю в сітці, то віддаль між S -м та j -м вузлами визначається як $ds_j = \min(|S-j|, n-|S-j|)$, де n - кількість вузлів сітки.

Нехай n /як це вже було відзначено/ - кількість вузлів сітки; m - кількість незалежних файлів розподіленої бази даних;

K_j - j -й вузол сітки; F_i - i -й файл; L_i - об'єм i -го файла; b_j - об'єм пам'яті вузла K_j , яка призначена для розміщення файлів; d_{js} - віддаль між вузлами K_s та K_j / $d_{js} = 0, s = 1, 2, \dots, n$ /; α_{ij} - інтенсивність запитів до файла F_i , які ініційовані у вузлі K_j ; α_{ij} - об'єм запиту до файла F_i , який ініційований на терміналі вузла K_j ; β_{ij} - об'єм запитів даних при виконанні запиту до файла F_i , який надійшов на термінал вузла K_j ; $x_{ij} / i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ - величини, що визначаються за формулою

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо файл } F_i \text{ знаходиться у вузлі } K_j, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Тоді математична модель задачі буде наступною: потрібно знайти мінімум функції

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \lambda_{ij} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) d_{js} (1 - x_{ij}) x_{is} \quad /3/$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad / i = 1, 2, \dots, m /; \quad /4/$$

$$\sum_{i=1}^m L_i x_{ij} \leq b_j \quad / j = 1, 2, \dots, n /; \quad /5/$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad / i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n /; \quad /6/$$

Для розв'язування задачі /3/-/6/ розроблено алгоритм, який складається із визначення початкового розподілу файлів і перерозподілу файлів у випадку, коли початковий не є оптимальним. При цьому початковий розподіл файлів завжди оптимальний, якщо на об'єм пам'яті кожного вузла, яка призначена для збереження файлів, не накладається умова /5/.

Для визначення початкового розподілу будується матриця

$$\Theta = (\theta_{is})_{m,n}, \text{ де } \theta_{is} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) d_{js} -$$

сума добутоків об'ємів даних, які пересилаються із вузла K_s при функціонуванні системи протягом одиниці часу на віддалі, що на них ці дані пересилаються, у випадку зберігання файла F_i у вузлі K_s . Після цього для всіх $i = 1, 2, \dots, m$ знаходиться $\min_{1 \leq s \leq n} \theta_{is}$. Нехай

$$\min_{1 \leq s \leq n} \theta_{is} = \theta_{is_i} \quad / i = 1, 2, \dots, m /,$$

тоді початковий розподіл $X = \{x_{ij}\}_{m,n}$ визначається наступним чином

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & / i = 1, 2, \dots, m / \\ 0 & / i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n ; (i, j) \neq (i, s_j) \end{cases}$$

У тому випадку, коли початковий розподіл не є оптимальним, здійснюється перерозподіл файлів, суть якого полягає у наступному.

Для кожного вузла K_j перевіряється умова /5/. Якщо для деякого індекса j ця умова не виконується, то із переповненого вузла K_j здійснюється перерозподіл файлів. При цьому на кожному кроці із вузла K_j завжди перерозподіляється той файл, якому відповідає мінімальне збільшення значення цільової функції. Якщо розподіл файлів із вузла K_j завершений, то цей вузол вважається закритим для перерозподілу файлів, тобто до нього неможна більше поміщати інших файлів, і здійснюється перехід до перерозподілу файлів із іншого переповненого вузла /якщо такий існує/.

Відзначимо, що при побудові математичної моделі схема обробки запитів не використовувалась. Отже, вона може бути обрана довільно.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.90

УДК 518:517.948

М.В.Жук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au = - \frac{\partial p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + r(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = f(x, y) \quad /1/$$

при нелінійній однорідній крайовій умові

$$R[u]|_{\Gamma} = [p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, x) + q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, y) + \psi(s)u]_{\Gamma} = 0 \quad /2/$$

де Γ - межа області D , обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y достатньо гладкими кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x) < h(x)$, ν - зовнішня нормаль до Γ .

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(x, y) \in H = L_2(D)$ з нормою $\|f\|^2 = \iint_D f^2(x, y) dx dy$; $p(x, y, s, t, z)$, $q(x, y, s, t, z)$, $r(x, y, s, t, z)$

© Жук М.В., 1992

вимірні при $(x, y) \in D$, $-\infty < s, t, z < +\infty$ диференційовані за змінними s, t, z , причому

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial r}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial r}{\partial t} \right| \right\} \leq M_1, \max \left\{ \left| \frac{\partial r}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial r}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right| \right\} \leq M_2$$

$$\left| \frac{\partial r}{\partial s} \right| \leq N_1, \max \left\{ \left| \frac{\partial r}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial r}{\partial z} \right| \right\} \leq N_2, \quad M_1, M_2, N_1, N_2 = \text{const.} \quad /3/$$

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $r(x, y, 0, 0, 0) = 0$,

$$g(x, y, 0, 0, 0) = 0, \quad r(x, y, 0, 0, 0) = 0.$$

Відносно функції $\sigma(s)$ припускаємо, що вона додатна обмежена, тобто $0 < \sigma_1 \leq \sigma(s) \leq \sigma_2$.

Введемо допоміжний оператор T_σ , який визначається за формулами

$$T_\sigma u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(v, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(v, y) \right] \Big|_\Gamma = 0. \quad /4/$$

За область визначення $D(T_\sigma)$ оператора T_σ приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x, y)$ у замкнутій області $\bar{D}$, які задовольняють крайові умови /5/. Із нерівності Фрідрікса /3/

$$\iint_D u^2 dx dy \leq C \left\{ \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_\Gamma u^2 ds \right\}, \quad u \in D(T_\sigma), \quad /6/$$

де C - додатна постійна. Отже, оператор T_σ додатно визначений

$$(T_\sigma u, u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_\Gamma u^2 ds \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{C}} > 0. \quad /7/$$

Позначимо через $H_\sigma \subset H$ енергетичний простір оператора T_σ тобто замикання $D(T_\sigma)$ в матриці

$$[u, v]_\sigma = (T_\sigma u, v) = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy + \int_\Gamma uv ds,$$

$$\|u\|_\sigma^2 = [u, u]_\sigma.$$

Можна показати, що функції $u(x, y)$ із H_σ мають перші узагальнені похідні, сумовані із квадратом в D , і ці функції сумовані з квадратом по межі Γ області D .

Із нерівності /7/ внаслідок граничного переходу для довільного $u \in H_\sigma$ отримуємо

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_\sigma. \quad /8/$$

Для довільних $u, v \in H_G$ формально введемо квазібілінійну форму

$$A(u, v) = \iint_D \left[p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial v}{\partial x} + q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ \left. + r(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) v \right] dx dy + \int_{\Gamma} \sigma u v ds. \quad /9/$$

Припустимо, що при $(x, y) \in \bar{D}$ і довільних s, t, z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t} \xi_1^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial t} \right) \xi_1 \xi_2 + \frac{\partial q}{\partial z} \xi_2^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial t} \right) \xi_1 \xi_0 + \\ + \left(\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial z} \right) \xi_2 \xi_0 + \frac{\partial r}{\partial s} \xi_0^2 \geq M(\xi_1^2 + \xi_2^2) + N \xi_0^2, \quad /10/$$

де ξ_0, ξ_1, ξ_2 - довільні дійсні числа, $M = \text{const} > 0, N = \text{const}$, причому співвідношення між постійними M, N і γ такі, що для константа μ , яка визначається співвідношенням

$$\mu = \begin{cases} M', & \text{якщо } N \geq 0, \\ M' + \frac{N}{\gamma^2}, & \text{якщо } N < 0, \end{cases} \quad /11/$$

де $M' = \min\{M, \sigma_1\}$, виконується умова $\mu > 0$.

Тоді для довільних $u, v, w \in H_G$ аналогічно, як і в праці /2/, можна встановити нерівності

$$A(u, u-v) - A(v, u-v) \geq \mu |u-v|_G^2; \quad /12/$$

$$A(u, w) - A(v, w) \leq \eta |u-v|_G |w|_G, \quad /13/$$

де $\eta = \max\{\eta_1, \sigma_2\}$,

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{2} M_1}{\gamma} + 2M_2 + \frac{N_1}{\gamma^2} + \frac{\sqrt{2} N_2}{\gamma}.$$

Узагальненим розв'язком задачі /1/-/2/ називається функція $u(x, y) \in H_G$, для якої виконується тотожність

$$A(u, v) = \iint_D f v dx dy \quad /14/$$

при довільній функції $v(x, y) \in H_G$. Відомо /див., наприклад, /1//, що виконання умов /12/, /13/ забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку.

Задачу /1/-/2/ розв'язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y), \quad /15/$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x, y)$ вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{X_\ell(x) \varphi_k(x, y)\} \in H_\sigma$ була повною системою лінійно незалежних функцій в H_σ . Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо зі системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Au_n - f) \varphi_i dy + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} R[u_n] \Big|_{y=g(x)} + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} R[u_n] \Big|_{y=h(x)} = 0 \quad /16/$$

при умовах

$$\int_{g(a)}^{h(a)} R[u_n] \varphi_i dy = 0, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} R[u_n] \varphi_i dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad /17/$$

яка у припущенні існування для функцій $\varphi_k(x, y)$ майже всюди перших і других похідних, сумованих з квадратом, а також при умові, що для довільної функції $v(x, y)$, що має майже всюди сумовані з квадратом перші і другі похідні, функції

$$\bar{p}(x, y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}), \quad \tilde{q}(x, y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}) \in H,$$

$$\text{де} \quad \bar{p}(x, y, s, t, z) = \frac{\partial p(x, y, s, t, z)}{\partial x}, \quad \tilde{q}(x, y, s, t, z) = \frac{\partial q(x, y, s, t, z)}{\partial y}$$

зводиться до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $c_k(x)$.

Назвемо узагальненим розв'язком системи методу Канторовича /16/-/17/ функцію $u_n(x, y) \in H_n \cap H_\sigma$, що задовольняє тотожності

$$A(u_n, v_n) = \iint_D f v_n dx dy \quad /18/$$

при довільній функції $v_n(x, y) \in H_n \cap H_\sigma$.

Покажемо, що узагальнений розв'язок системи /16/-/17/ існує та єдиний.

Для цього до задачі /1/-/2/ застосовуємо метод Бубнова-Гальоркіна, тобто наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n^m(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m c_{k\ell} X_\ell(x) \varphi_k(x, y),$$

а невідомі коефіцієнти C_{kl} визначаємо зі системи

$$A(u_n, \lambda_j(x) \Psi_i(x, y)) = \iint_D f \chi_j(x) \Psi_i(x, y) dx dy, \quad i=1, 2, \dots, n, \\ j=1, 2, \dots, m. \quad /19/$$

Система /19/ зводиться до системи нелінійних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, розв'язок якої існує та єдиний /1/.

Аналогічно, як і в праці /2/, можна показати, що послідовність розв'язків $\{u_n^m\}$ системи /19/ при $m \rightarrow \infty$ слабо збігається у просторі H_α до єдиного узагальненого розв'язку системи методу Канторовича /16/-/17/.

Т е о р е м а. Якщо обмеження на вихідні дані задачі /1/-/2/ такі, що виконуться умови /12/, /13/, то для довільної функції $f(x, y) \in H$ задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений розв'язок $u(x, y) \in H_\alpha$ і при довільному n система методу Канторовича /16/-/17/ має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(x, y) \in H_n \cap H_\alpha$.

І. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., 1974. 2. Ж у к М.В. Исследования быстроты сходимости метода Канторовича для нелинейных дифференциальных уравнений //Укр.мат.журн. 1976. Т.28. №2. 3. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.91

УДК 517.946

М.М.Притула

ГАМІЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕКЛУНДА ІНВЕРСНОГО МОДИФІКОВАНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

При дослідженні задач гідродинаміки, фізики плазми та інших проблем фізики значну роль відіграють спеціальні нелінійні моделі типу інверсного модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза /МКдФ/:

$$u_t = v, \quad v_t = p, \quad p = K(u, p, u), \quad u_x + u^2 v \quad /1/$$

де $K: M \rightarrow T(M)^c$ - гладке по Фреше поліноміальне векторне поле на нескінченно вимірному функціональному многовиді $M = C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $t \in \mathbb{R}$ - еволюційний параметр, $u(x, t) \in M$. Подібну систему, але

© Притула М.М., 1992

для рівняння КдФ, було розглянуто у працях [2,3]. У [2] аналізується повна інтегрованість по Лаксу інверсного рівняння КдФ. У праці [3] побудовано гамільтонову структуру для відповідних стаціонарних задач, а також для інверсних систем, в яких функцію часу t виконує одна із просторових змінних. Ми ж дослідимо систему /1/ на інтегрованість по Лаксу в рамках градієнтно-голономного алгоритму [1]. Для цього вивчимо спочатку наявність для /1/ ієрархії законів збереження $\chi_j \in D(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. З цієї метою розглянемо асимптотичні по $|\lambda| \rightarrow \infty$ розв'язки рівняння Лакса

$$L_K \Psi + \partial \Psi / \partial t = 0, \quad /2/$$

де L_K - похідна Лі в напрямку векторного поля $K: M \rightarrow T(M)$, а

$$\Psi(x, t; \lambda) = (1, b(x, t; \lambda), c(x, t; \lambda))^T \exp[\lambda^3 x + \lambda t + \partial^T \sigma(x, t; \lambda)]. \quad /3/$$

Тут $\lambda \in \mathbb{C}$ - комплексний параметр, τ - знак транспонування, причому справедливі асимптотичні розклади при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$b(x, t; \lambda) \approx \sum_{j \geq 1} b_j[u, p, v] \lambda^j, \quad c(x, t; \lambda) \approx \sum_{j \geq 1} c_j[u, p, v] \lambda^j,$$

$$\sigma(x, t; \lambda) \approx \sum_{j \geq 1} \sigma_j[u, p, v] \lambda^j. \quad /4/$$

Підставляючи розв'язки /3/ з урахуванням /4/ у рівняння Лакса /2/, отримаємо систему нескінченних рекурентних співвідношень вигляду

$$\begin{aligned} \delta_{j,1} + \partial \sigma_{j,t} + 2uv b_j - b_{j,x} - b_{j-3} - \sum_K b_{j-K} \sigma_K &= 0, \\ b_{j,t} + \sum_K b_{j-K} b_{K,x} + \sum_K b_{j+3-K} b_K + \sum_{K,S} b_{j-K} b_{K-S} \sigma_S - \\ - 2uv \sum_K b_{j-K} b_K + c_j &= 0, \quad /5/ \\ c_{j,t} + \sum_K c_{j-K} b_{K,x} + \sum_K c_{j+3-K} b_K + \sum_{K,S} c_{j-K} b_{K-S} \sigma_S - \\ - 2uv \sum_K c_{j-K} b_K + \delta_{j,0} + u^2 b_j &= 0, \end{aligned}$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$, δ - дельта-символ Кронекера. Розв'язуючи послідовно рівняння в /5/, знаходимо

$$\begin{aligned}
b_1 &= 0, \quad c_1 = -1, \quad G_1 = (2/3)up - (1/3)v^2 - (1/6)u^4, \\
b_2 &= 1, \quad c_2 = 0, \quad G_2 = -(4/3)u u_x, \\
b_3 &= 0, \quad c_3 = 0, \quad G_3 = (1/27)u^6 - (2/3)u^3p - (2/3)u_x v + (1/3)p^2, \\
b_4 &= (1/3)u^2, \quad c_4 = 0, \quad G_4 = (2/9)u^3 u_x, \dots \quad /6/
\end{aligned}$$

В міру подання /2/ отримаємо, що всі функціонали вигляду $\gamma_j = \int_{x_0}^{x_1} dx G_j[u, p, v]$, $j \in \mathbb{Z}^+$ є для динамічної системи /1/ законами збереження, причому, згідно побудови, функціонально незалежними.

Перейдемо до гамільтонового аналізу динамічної системи /1/ на нескінченно вимірному многовиді M . З цією метою припустимо, що існує такий імплектичний і ньотеровий оператор $\mathcal{Y}: T^*(M) \rightarrow T(M)$, що справедлива рівність

$$(u, p, v)_t^T = w_t = -\mathcal{Y} \text{grad} H = K[w], \quad /7/$$

де функціонал $H = (3/2)\gamma_1 = \int_{x_0}^{x_1} dx [up + (1/2)v^2 + (1/4)u^4] \in D(M)$ необхідно є законом збереження /1/.

Імплектичний оператор $\mathcal{Y}: T^*(M) \rightarrow T(M)$ задовольняє умову Картан-Ньотер вигляду $L_K \mathcal{Y} = 0$, або

$$\mathcal{Y}' \cdot K - \mathcal{Y} K' = K' \cdot \mathcal{Y} = 0. \quad /8/$$

Для розв'язку рівняння /8/ використано асимптотичний μ -метод /1/ малого параметра. Проводячи послідовно викладки, аналогічні, як у /2/, знайдемо шуканий $\mathcal{Y}$ оператор вигляду:

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -u^2 \\ 1 & u^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

При поточному виконанні умови /8/ імплектичний оператор $\mathcal{Y}$ є ньотеровим.

Аналогічно, розв'язуючи рівняння Картан-Ньотер /8/, знаходимо його другий алгебраїчно незалежний розв'язок $\mathcal{Y}^1: T^*(M) \rightarrow T(M)$

$$\mu = \begin{vmatrix} -4v\partial^{-1}v & 4v\partial^{-1}u\partial - 4v\partial^{-1}u^2v - 6\partial & 2u^2 - 4v\partial^{-1}p \\ -4\partial u\partial^{-1}v & 4\partial u\partial^{-1}u\partial - 6u^2\partial - 6\partial u^2 & 2u^4 - 4u\partial^{-1}p \\ -4u^2v\partial^{-1}v - 6\partial & -4u^2v\partial^{-1}u^2v + 4u^2v\partial^{-1}u\partial & -4u^2v\partial^{-1}p \\ & -4\partial u\partial^{-1}u^2v & \\ -2u^2 - 4p\partial^{-1}v & -2u^4 + 4p\partial^{-1}u\partial - 4p\partial^{-1}u^2v & 6\partial - 4p\partial^{-1}p \end{vmatrix} \quad /9/$$

Цей же результат легко отримати за допомогою перетворення Беклунда /1/ динамічної /1/ та інверсної динамічної систем КдФ /2/

$$\left. \begin{aligned} u_t = v, \quad v_t = p \\ p_t = u_x + u^2v \end{aligned} \right\} \xrightarrow{B} \left\{ \begin{aligned} \tilde{u}_t = \tilde{v}, \quad \tilde{v}_t = \tilde{p} \\ \tilde{p}_t = \tilde{u}_x + \tilde{u}\tilde{v} \end{aligned} \right.,$$

де

$$\left. \begin{aligned} \alpha v + \tilde{u} - u^2 &= 0, \quad \alpha = \sqrt{6} \\ \alpha p + \tilde{v} - 2uv &= 0 \\ \alpha(u_x + u^2v) + \tilde{p} - 2v - 2up &= 0 \end{aligned} \right\} = B[u, p, v; \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{v}].$$

Якщо $\tilde{J}: T^*(M) \rightarrow T(M)$ - імплектичний оператор динамічної системи $\text{in } v$ - КдФ /2/, то

$$\mu = \Psi B_w^* B_w^{-1} \cdot \tilde{\Psi}^{-1} B_{\tilde{u}}^{-1} B_{\tilde{u}} \tilde{\Psi},$$

де $u = (u, p, v)^T \in M$, $\tilde{u} = (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{v})^T \in M$ - другий алгебраїчно незалежний розв'язок рівняння Картана-Ньотер /8/, що збігається з виразом /9/.

Використовуючи отримані результати, на основі градієнтно-голономного алгоритму /2,3/, можна отримати ізоспектральне подання типу Лакса для моделі $\text{in } v$ - МКдФ /1/.

І. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатський А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы. К., 1987. 2. Самойленко В.Г., Питула Н.Н., Суяров У.С. Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега-де Фриза. К., 1989. 27 с. /Препринт

Стаття надійшла до редколегії 12.10.91

УДК 517.9

М.М.Притула, В.Г.Самойленко, У.С.Суяров

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА РІВНЯННЯ ТИПУ
БОЛЬЦМАНА-ВЛАСОВА В ПРОСТОРІ БІНАРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ

1. Нехай $M \simeq T^*\mathbb{R} \oplus T^*\mathbb{R}^2$ - двочастинковий фазовий простір симетричних функцій розподілу Боголюбова / 1,2 / динамічної системи багатьох однакових частинок на осі $\mathbb{R}$. Відповідну дужку Пуассона на M задамо згідно результату роботи / 3 / наступною формулою:

$$\{h, g\} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial p} \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial p_1} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_2}{\partial p_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial p_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right) + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_j} \frac{\partial g_2}{\partial x_j} - \frac{\partial g_2}{\partial p_j} \frac{\partial h_2}{\partial x_j} \right) \right), \quad /1/$$

де симетричні вектор-функції динамічних змінних $h = (h_1(x, p), h_2(x_1, p_1; x_2, p_2))^T$, $g = (g_1(x, p), g_2(x_1, p_1; x_2, p_2))^T \in D(M; \mathbb{R}^2)$; $(x_j, p_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1, 2}$ - відповідно координата і імпульс частинки на осі $\mathbb{R}$. Очевидно, що множина вектор-функцій $D(M; \mathbb{R}^2)$ утворює відносно дужки /1/ алгебру Лі $\mathcal{G}$ над полем $\mathbb{R}$. Нехай $\mathcal{G}^*$ - відповідний спряжений до алгебри Лі $\mathcal{G}$ лінійний простір функціоналів. Тоді по відношенні додатково введеної структури скалярного добутку $(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{G}$ можна згідно теореми Ріса ототожнити $\mathcal{G}^* \cong \mathcal{G}$, причому вважаємо, що скалярний добуток на $\mathcal{G}$ симетричний, не вироджений та інваріантний відносно /1/, тобто для всіх $f, g, h \in D(M; \mathbb{R}^2)$ справедливо

$$(f, g) = (g, f) = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dp f_1(x, p) g_1(x, p) + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dp f_2(x, p) g_2(x, p), \quad /2/ \\ (f, \{g, h\}) = (\{f, g\}, h).$$

Якщо $\chi \in D(Q^*)$ - деякий гладкий по Фреше функціонал на Q^* /не обов'язково лінійний/, то однозначно визначено відображення $\text{grad}: D(Q^*) \rightarrow Q$ за допомогою наступної формули:

$$(\text{grad} \chi(f), g) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \chi(f + \epsilon g), \quad /3/$$

де елементи $f, g \in Q \simeq Q$ - довільні. В силу своєї побудови, очевидно, $\text{grad} \chi(f) \in Q$ - звичайна варіаційна похідна Ейлера функціонала $\chi \in D(Q^*)$, вирахована в точці $f \in Q^*$. Надалі для зручності будемо користуватись також позначенням

$$\text{grad} \chi(f) = \nabla \chi(f).$$

Визначимо тепер канонічну гамільтонову структуру Лі-Пуассона /3-5/ $\{\{\cdot, \cdot\}\}$ на многовиді $Q^* \simeq Q$ згідно стандартної формули:

$$\{\{\chi, \mu\}\} = (f, \{\nabla \chi(f), \nabla \mu(f)\}) \quad /4/$$

для будь-яких $\chi, \mu \in D(Q^*)$. Зміст формули /4/ прояснюється, якщо розглянути коприсяднану дію алгебри Лі Q на просторі $Q^* \simeq Q$ у вигляді:

$$df/dt = \text{ad}_{\nabla \chi(f)}^* f; \quad /5/$$

$t \in \mathbb{R}$ - еволюційний параметр, $\nabla \chi(f) \in Q$ і $f \in Q^*$ - довільний елемент. Вираз /5/, очевидно, задає на Q^* векторне поле, яке в силу інваріантності скалярного добутку в /2/, еквівалентне наступному комутаторному представленню:

$$df/dt = \{\{f, \nabla \chi(f)\}\}, \quad f \in Q^* \quad /6/$$

Останнє ж рівняння /6/ згідно формули /4/ еквівалентне стандартному гамільтоновому виразу:

$$df/dt = \{\{\chi, f\}\}, \quad f \in Q^*, \quad /7/$$

де функціонал $\chi \in D(Q^*)$ - відповідна функція Гамільтона. Таким чином, якщо вектор-функція $f = (f_1, f_2) \in D(M; \mathbb{R}^2)$ проінтерпретована нами як вектор одно- і двочастинкової статистичних функцій розподілу Боголюбова вихідної багаточастинкової динамічної

системи з гамільтоніаном $H = \gamma \in D(Q_j^*)$, то динамічна система /7/ описує відповідну їх еволюцію в часі при умові, що процедура статистичного її опису фіксує відсутність n -частинкових кореляцій динаміки частинок при $n = 3$. Цим самим, при заданні вихідним гамільтоніані $H \in D(Q_j^*)$ динамічна система /7/ має зміст узагальнених рівнянь Больцмана-Власова в просторі незалежних унарних і бінарних функцій розподілу $f \in D(M; \mathbb{R}^2)$. Зокрема, якщо вибрати /5/

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} p^2 dp \int_{\mathbb{R}} dx f_1(x, p) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx + \\ + \int_{\mathbb{R}} dp_1 \int_{\mathbb{R}} dp_2 f_2(x_1, p_1; x_2, p_2) V(x_1 - x_2; p_1, p_2), \quad /8/$$

то отримаємо з /7/ узагальнені рівняння Больцмана-Власова на вектор $f \in Q_j^*$

$$\frac{df_1}{dt} = - \left\{ \frac{p^2}{2}, f_1 \right\}^{(1)} - \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dp_2 \{V, f_2\}^{(1)}, \\ \frac{df_2}{dt} = - \left\{ \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}, f_2 \right\}^{(2)} - \{V, f_2\}^{(2)} - \\ - \int_{\mathbb{R}} dx_3 \int_{\mathbb{R}} dp_3 \{f_3((x_1, p_1), (x_2, p_2), (x_3, p_3)), V(x_1 - x_3; p_1, p_3) + V(x_2 - x_3; p_2, p_3)\}^{(3)}; \\ \text{де } f_3(z_1, z_2, z_3) = f_1(z_1) f_1(z_2) f_1(z_3) + f_2(z_1) g_2(z_2, z_3) + f_1(z_2) g_2(z_1, z_3) + \\ + f_1(z_3) g_2(z_1, z_2), \quad g_2(z_i, z_j) = f_2(z_i, z_j) - f_1(z_i) f_1(z_j),$$

$$z_j = (x_j, p_j)^T \in M, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

а $\{ \cdot, \cdot \}^{(j)}$, $j = \overline{1, 3}$ - відповідна канонічна дужка Пуассона на фазовім просторі $T^* \mathbb{R}^j$, $j = \overline{1, 2}$. Система рівнянь /9/ замкнена і становить зручний об'єкт для дослідження кінетичних явищ у вихідній динамічній багаточастинковій системі, зокрема, для побудови нових рівнянь гідродинаміки, що є актуальною задачею теорії динамічних систем і її застосувань.

І. А х н е з е р А.И., П е л е т н и н с к и й С.В. Методы статистической физики. М., 1977. 2. Б о г о л ю б о в Н.Н., Б о г о л ю б о в Н.Н. Введение в квантовую статистическую механику. М., 1984. 3. Б о г о л ю б о в Н.Н., П р и к а р п а т с к и й А.К. Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова // Физика элементарных частиц и атомные ядра. Т.17. М4. С.799-827. 4. Б о г о л ю б о в Н.Н., П р и к а р п а т с к и й А.К., С а м о й л е н к о В.Г. Гамильтонова структура гидродинамических уравнений

типа Бенни и ассоциированных с ними уравнений Больцмана-Власова на оси. К., 1991. 43 с. /Препринт /АН Украины. Ин-т математики; № 25/. 5. Прикарпатский А.К., Микитюк И.В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. К., 1991.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.91

УДК 519.21

І.Д.Квіт

СПОДІВАНІ ТА ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ

Нехай абсолютно неперервна випадкова змінна ξ має функцію розподілу ймовірностей $F(x) = P\{\xi \leq x\}$, $-\infty < x < \infty$. Тоді

$$P\{a_L < \xi \leq a_U\} = F(a_U) - F(a_L), P\{\xi \leq a_U\} = F(a_U), P\{\xi > a_L\} = 1 - F(a_L), /1/$$

де a_L - нижня, a_U - верхня межі відповідної пропорції популяції ξ . Три числа /1/ стали та відповідно виражають шанси того, що змінна ξ потрапить на двосторонній інтервал $(a_L, a_U]$, на односторонній нижній інтервал $(-\infty, a_U]$ та на односторонній верхній інтервал (a_L, ∞) .

Нехай $x_1, \dots, x_n$ вибірка незалежних спостережень над популяцією ξ , керуваною розподілом $F(x)$, залежним від невідомих параметрів. Тоді межі $a_L = a_L(x_1, \dots, x_n)$ та $a_U = a_U(x_1, \dots, x_n)$, а також інтервали $(a_L, a_U]$, $(-\infty, a_U]$, (a_L, ∞) - випадкові, і, значить, вирази /1/ - випадкові змінні, що набувають значення між нулем і одиницею. Для випадкових змінних /1/ можна розглядати точкові або інтервальні оцінки.

І. Зручною точковою оцінкою випадкових змінних /1/ є сподівання

$$E[F(a_U) - F(a_L)], E[F(a_U)], E[1 - F(a_L)].$$

/2/

Числа /2/ містяться між 0 та 1. Якщо, наприклад,

$$E[F(a_U) - F(a_L)] = \beta, \quad 0 < \beta < 1,$$

/3/

то двосторонній β -сподіваний інтервал $(a_L, a_U]$ в середньому накриває пропорцію β популяції ξ . Аналогічно отримуємо

© Квіт І.Д., 1992

односторонній нижній $(-\infty, a_u]$ та верхній (a_l, ∞) β -споді-
вані інтервали

$$E[F(a_u)] = \beta, \quad E[1 - F(a_l)] = \beta. \quad /4/$$

2. Інтервальні оцінки випадкових змінних /1/ зручно виражати відповідно співвідношеннями

$$P\{F(a_u) - F(a_l) \geq \beta\} = \gamma, \quad P\{F(a_u) \geq \beta\} = \gamma, \quad P\{1 - F(a_l) \geq \beta\} = \gamma, \quad /5/$$

$$(0 < \beta, \gamma < 1).$$

Перше співвідношення /5/ вказує на те, що з довір'ям γ двосторон-
ній інтервал $(a_l, a_u]$ накриває принаймні пропорцію β популяції
 ξ . Двосторонній інтервал $(a_l, a_u]$ називається γ -довірчим з
 β -вмістом інтервалом. Аналогічно два наступні співвідношення /5/
визначають односторонній відповідно нижній γ -довірчий з β -вміс-
том $(-\infty, a_u]$ та верхній γ -довірчий з β -вмістом (a_l, ∞)
інтервали.

3. Залежно від розподілу та його параметрів на основі вибірки
потрібно вказати спосіб знаходження β -сподіваних і γ -довірчих
з β -вмістом інтервалів. Для ілюстрації цього розглянемо нормаль-
ну популяцію ξ з параметрами локації μ та масштабу σ

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty, (-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0). \quad /6/$$

На основі вибірки $x_1, \dots, x_n$ методом максимальної правдоподібності
дістаємо оцінки параметрів

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \equiv \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \equiv S^2. \quad /7/$$

Нехай

$$a_l = \bar{x} - ks, \quad a_u = \bar{x} + ks,$$

де k - додатна стала. У 1941 р. Вількс /порівн. /2./ довів, що
для нормальної популяції /6/ у співвідношенні

$$E[F(x + ks) - F(x - ks)] = \beta$$

стала

$$k = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot t(n-1; \frac{1+\beta}{2}), \quad /8/$$

де $t(n-1; \frac{1+\beta}{2})$ - квантиль порядку $\frac{1+\beta}{2}$ розподілу Ст'юдента

з $df = n - 1$ ступенями вільності. Стала k не залежить від α або β^2 . З /8/ видно, що k спадна функція від n . Подамо значення k для деяких $df = n - 1$ та β /вивід 1/:

$df \backslash \beta$	0,90	0,95	0,99
2	3,3717	4,9683	11,4501
5	2,1764	2,7766	4,3552
10	1,8931	2,3272	3,3102
40	1,7043	2,0456	2,7373
500	1,6495	1,9667	2,5883

При обсязі вибірки $n = 41$ з нормальної популяції дістаємо наближено двосторонній 0,90 - сподіваний інтервал $[\bar{x} - 1,7s; \bar{x} + 1,7s]$, двосторонній 0,95 - сподіваний інтервал $[\bar{x} - 2s; \bar{x} + 2s]$ та двосторонній 0,99 - сподіваний інтервал $[\bar{x} - 2,7s; \bar{x} + 2,7s]$. При заданих β та k можна знайти n . Наприклад, при $\beta = 0,95$ та $k = 3$ знаходимо $n = 5$. Таким чином, для нормальної популяції двосторонній β -сподіваний інтервал має вигляд

$$[a_L, a_U] = (\bar{x} - ks, \bar{x} + ks], \quad /9/$$

де $\bar{x}$ і s задаються виразами /7/, а число k формулою /8/. Аналогічно дістаємо односторонні нижній $(-\infty, \bar{x} - ks]$ та верхній $(\bar{x} - ks, \infty)$ β -сподівані інтервали, де відповідно

$$k = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} t(n-1, \beta), \quad k = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} t(n-1; \beta). \quad /10/$$

Визначення інтервалів зі співвідношень /5/, навіть для нормальної популяції, значно складніше, ніж зі співвідношень /3/ і /4/. Хоча інтервал має вигляд /9/, чи $(-\infty, \bar{x} + ks]$ або $(\bar{x} - ks, \infty)$, вся трудність полягає у визначенні константи k . Сталу k вперше визначили в 1946 р. Вальд і Вольфовиц /порівн. [1,2]/. Існують обширні значення сталої k для різних ступенів вільності, β і χ^2 . Подамо значення k при $df = 10$ з праці [1] при заданих β /вивід 2/:

$\beta \backslash \chi^2$	0,90	0,95	0,99
0,90	2,485	2,953	3,863
0,95	2,768	3,288	4,298
0,99	3,448	4,094	5,347

Розглянемо числовий приклад. Нехай 3,56; 4,01; 3,09; 4,44; 0,91; 7,09; 4,91; 5,43; 2,57; 1,92; 6,08 - вибірка з нормальної популяції. Тоді середнє дорівнює 4, а стандарт

1,84. При $\beta = 0,90$ та $df = 10$ з виводу 1 знаходимо $k = 1,8931$. Отже, $0,90$ - сподіваний інтервал /9/ набуває вигляду $4 \pm 1,8931 \cdot 1,84 = /0,5167; 7,4833/$. При $\beta = \gamma = 0,90$ та $df = 10$ з виводу 2 знаходимо $k = 2,485$. Таким чином, $0,90$ - довірчий з $0,90$ вмістом інтервал /9/ набуває вигляду $4 \pm 2,485 \cdot 1,84 = /-0,5724; 8,5724/$.

4. Зазначимо, що проведені міркування про визначення β -сподіваного інтервалу та γ -довірчого з β -вмістом інтервалу для нормальної популяції переносяться на випадок логарифмічно нормальної популяції. Справді, якщо логнормальна популяція η з параметром і масштабу $\tilde{\tau}$ і параметром форми $\tilde{\gamma}$ має густину

$$g(y) = \frac{1}{\tilde{\gamma} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \frac{y}{\tilde{\tau}})^2}{2\tilde{\gamma}^2}}, \quad 0 < y < \infty, \quad (\tilde{\tau} > 0, \tilde{\gamma} > 0),$$

то $\ln \eta$ має нормальну функцію розподілу /6/ з параметром локації $\alpha = \ln \tilde{\tau}$ і параметром масштабу $\beta = \tilde{\gamma}$. Тому, якщо $y_1, \dots, y_n$ - вибірка з логнормальної популяції, то $x_1 = \ln y_1, \dots, x_n = \ln y_n$ - вибірка з нормальної популяції, для якої знаходимо β -сподівані інтервали $(\alpha_L, \alpha_U], (-\infty, \alpha_U]$ та (α_L, ∞) . Відповідні β -сподівані інтервали для логнормальної популяції будуть $(e^{\alpha_L}, e^{\alpha_U}]$, $(0, e^{\alpha_U}]$ та (e^{α_L}, ∞) . Аналогічно знаходимо γ -довірчі з β -вмістом інтервали.

1. Beckman R.J., Tietjen G.L. Two-Sided Tolerance Limits for Balanced Random-Effects Anova Model // Technometrics. 1989. V.31. P.185-197. 2. Mee R.W. Normal Distribution Tolerance Limits for Stratified Random Samples // Technometrics. 1989. V.31. P.99-105.

Стаття надійшла до редколегії 12.09.89

І.Д.Квіт, Б.В.Москвяк

КРИТЕРІЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ЗРІЗАНОЇ ВИБІРКИ

Нехай

$$x(\bar{1}, n) \leq \dots \leq x(\bar{j}, n) \leq \dots \leq x(\bar{n}, n) - \quad /1/$$

варіаційний ряд для зрізаної вибірки напрацювань, де $x(\bar{j}, n)$ позначає напрацювання до відмови F або зупинки S технічної одиниці. Якщо $x(\bar{j}, n)$ позначає напрацювання до відмови F , то $\bar{j}$ виражає середній ранг цієї відмови. На основі варіаційного ряду /1/ знаходимо частотну емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$ причому в моменти відмов

$$F_n(x(\bar{j}, n)) = \frac{\bar{j}}{n} \quad /2/$$

Потрібно перевірити гіпотезу про те, що популяція, з якої взята вибірка /1/, керується теоретичною функцією розподілу $F(x)$

$$H: E F_n(x) \equiv F(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad /3/$$

За міру відхилення теорії від експерименту приймаємо статистику

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|. \quad /4/$$

Нехай α - заданий рівень значущості, і $D_n(\alpha)$ - критичне значення статистики D_n , визначене як розв'язок рівняння

$$P\{D_n \geq D_n(\alpha)\} = \alpha. \quad /5/$$

Якщо емпіричне значення статистики D_n не менше від $D_n(\alpha)$, то на рівні значущості α гіпотезу /3/ відкидаємо. Критичні значення для найбільшого відхилення теоретичного розподілу від емпіричного /критерій Колмогорова/ табульовані* при $n = 1/1/100$ та $\alpha = 0,20; 0,10; 0,05; 0,02; 0,01$. Для визначення $D_n(\alpha)$ при $n \geq 10$ та $0,01 \leq \alpha \leq 0,20$ можна користуватися наближенням

$$D_n(\alpha) \approx \sqrt{\frac{-\ln \frac{\alpha}{2}}{2n}} - \frac{1}{6n}. \quad /6/$$

П р и к л а д. Дано вибірку напрацювань до відмови F або зупинки S технічної одиниці

© Квіт І.Д., Москвяк Б.В., 1992

* Б о л ь ш е в Л.Н., С м и р н о в Н.В. Таблицы математической статистики. М., 1983. С.347.

537 F	1050 S	2034 S	3231 F	4319 F
5540 F	6173 S	8548 F	9392 S	12569 F
16020 F	18000 S	18000 S		

Чи можна прийняти гіпотезу

$$H_0: F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{18000}}, \quad x > 0 \quad /8/$$

про вигляд теоретичної функції розподілу?

Подамо моменти відмов x_j з вибірки /7/, середні ранги відмов $\bar{j}$ значення /2/ емпіричної функції розподілу в моменти відмов $F_{13}(x_j)$ значення гіпотетичної функції розподілу /8/ у точках $F(x_j)$, модулі різниць $|F_{13}(x_j) - F(x_j)|$ та $|F_{13}(x_j - 0) - F(x_j)|$:

x_j	$\bar{j}$	$F_{13}(x_j)$	$F(x_j)$	$ F_{13}(x_j) - F(x_j) $	$ F_{13}(x_j - 0) - F(x_j) $
537	1	0,07692307	0,0522837	0,02463937	0,0522837
3231	2,181818	0,1678321	0,2760985	0,1082664	0,1991754
4319	3,363636	0,2587412	0,3507256	0,0919844	0,1828935
5540	4,545454	0,3496503	0,4253533	0,0757030	0,1666121
8548	5,896103	0,4535463	0,5746317	0,1210854	0,2249814
12869	7,516882	0,5782216	0,7238744	0,1456528	0,2703281
16020	9,137661	0,702897	0,7985068	0,0956098	0,2202852

Найбільше значення останніх двох колонок дорівнює 0,2703281. За формулою /6/ знаходимо критичний момент для гіпотези $D_{13}/0,05/\approx 0,3638491$. Оскільки емпіричне значення статистики Колмогорова менше від критичного, то на рівні значущості $\alpha = 0,05$ гіпотеза /8/ не суперечить даним /7/.

З а у в а ж е н н я. Повнота вибірки припускається у таблиці Большева, Смирнова для знаходження критичних значень статистики Колмогорова. Нею можна користуватися при зрізаний, а також сильно зрізаний вибірках, якщо гіпотеза відхиляється.

Стаття надійшла до редколегії 12.09.89

О.Г.Гнатишин, Б.В.Москвяк
КРИТЕРІЙ СМІРНОВА ДЛЯ ПОРІВНЯННЯ
ДВОХ ЗРІЗАНИХ ВИБІРОК

Нехай

$$x(\bar{1}, m) \leq \dots \leq x(\bar{l}, m) \leq \dots \leq x(\bar{m}, m) - \quad /1/$$

варіаційний ряд зрізаної вибірки з абсолютно неперервної популяції ξ , а

$$y(\bar{1}, n) \leq \dots \leq y(\bar{j}, n) \leq \dots \leq y(\bar{n}, n) - \quad /2/$$

варіаційний ряд зрізаної вибірки з абсолютно неперервної популяції η . Для означеності, без обмеження загальності, можна вважати, що $m \leq n$. Якщо числа /1/ і /2/ позначають напрацювання до відмови F або зупинки S технічної одиниці, то в разі відмови числа $\bar{l}$ та $\bar{j}$ виражають середній ранг цієї відмови. На основі варіаційних рядів /1/ і /2/ знаходимо частотні емпіричні функції розподілу $F_m(x)$ та $G_n(x)$, причому в моменти відмов

$$F_m(x(\bar{l}, m)) = \frac{\bar{l}}{m}, \quad G_n(y(\bar{j}, n)) = \frac{\bar{j}}{n}. \quad /3/$$

Потрібно перевірити гіпотезу про те, що популяції ξ та η стохастично еквівалентні.

$$H: E F_m(x) \equiv E G_n(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad /4/$$

За міру відхилення між вибірками /1/ та /2/ приймаємо статистику

$$D_{mn} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_m(x) - G_n(x)|. \quad /5/$$

Нехай α - заданий рівень значущості при $0 < \alpha \leq 0,05$, $D_{mn}(\alpha)$ - критичне значення статистики D_{mn} , визначене як розв'язок нерівностей

$$P\{D_{mn} \geq D_{mn}(\alpha)\} \leq \alpha, \quad P\{D_{mn} < D_{mn}(\alpha)\} > 1 - \alpha. \quad /6/$$

Якщо емпіричне значення статистики D_{mn} не менше від $D_{mn}(\alpha)$, то на рівні значущості α гіпотезу /4/ відкидаємо. Критичні значення для перевірки однорідності двох вибірок /критерій Смирнова/ табульовані* при $n = 1/1/20$, $m = 1/1/n$ та $\alpha = 0,10; 0,05; 0,02; 0,01$. При $n > 20$ для обчислення $D_{mn}(\alpha)$ слід користуватися наближенням

$$D_{mn}(\alpha) \approx D_{\frac{m+n}{mn}}(\alpha) + \frac{1}{k(m,n)} + \frac{1}{3n} - \frac{(n+1)[m-d(m,n)]}{2mn[m+n+d(m,n)]}, \quad /7/$$

де значення $D_{\frac{m+n}{mn}}(\alpha)$ можна визначити інтерполяцією в таблиці /див.

Большев Л., Смирнов Н., с.3 / для критичних значень при критерію Колмогорова, $k(m,n)$ - найменше спільне кратне, а $d(m,n)$ - найбільший спільний дільник чисел m і n .

П р и к л а д. Дано дві незалежні вибірки напрацьовань до відмови F або зупинки S технічної одиниці

(x): 2175 F 3400 S 4390 F 5242 F 6010 S
6799 F 7557 F 8326 F 9000 S 9000 S /8/
10894 F 11942 F 12000 S 14845 F 17581 F

та

(y): 2000 S 4019 F 5199 F 6264 F 7000 S
8325 F 9413 F 10608 F 11000 S 13795 F /9/
16704 F

Чи можна прийняти гіпотезу про однорідність вибірок /8/ і /9/ ?

Подано спільний варіаційний ряд (x) та (y) для моментів відмов у вибірках /8/ і /9/, відповідні середні ранги відмов $\bar{i}$ та $\bar{j}$ відповідно значення F_{is} та G_{jt} частотних емпіричних функцій розподілу в пунктах спільного варіаційного ряду, а також модулі різниць відповідних значень $|F_{is} - G_{jt}|$:

(x)	$\bar{i}$	(y)	$\bar{j}$	F_{is}	G_{jt}	$F_{is} - G_{jt}$
2157	I			0,06666	0	0,06666
		4019	I,0909I	0,06666	0,09917	0,0325I
4390	2,07143			0,13809	0,09917	0,03892
		5199	2,18182	0,13809	0,19835	0,06025
5242	3,04286			0,20952	0,19835	0,01118
		6264	3,27273	0,20952	0,29752	0,08800
6799	4,31169			0,28745	0,29752	0,01007

* Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М., 1963. С.350-352.

7557	5,48052			0,36537	0,29752	0,06785
		8325	4,51948	0,36537	0,41086	0,04549
8326	6,64935			0,44229	0,41086	0,03243
		9413	5,76623	0,44329	0,52420	0,00091
		10608	7,01299	0,44329	0,63754	0,19425
10894	8,20779			0,54719	0,63754	0,09036
11942	9,76623			0,65108	0,63754	0,13538
		13795	8,67532	0,65108	0,78867	0,13753
14841	11,84415			0,78961	0,78867	0,00094
		16704	10,33766	0,78961	0,93979	0,15018
17581	13,92207			0,92814	0,93979	0,01165

Найбільше значення в останній графі дорівнює 0,19425. З таблиці /див. Большев Л., Смирнов Н., с. 351/ знаходимо критичне значення $D_{11,15} / 0,05 / = 0,5071895$. Зазначимо, що за формулою /7/ дістанемо приблизно таке ж число. Гіпотезу про однорідність вибірок /8/ і /9/ приймаємо.

З а у в а ж е н н я. За цією ж таблицею /с.350-352/ для знаходження критичних значень статистики Смирнова припускається повнота вибірок. Не можна користуватися у випадку слабо зрізаних, а також у разі сильно зрізаних вибірок, якщо гіпотеза відхиляється.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.91

Р.Т.Мисак

МАТРИЧНА РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МІНІМАКСНОЇ ОЦІНКИ

Нехай задана лінійна модель обробки результатів спостережень

$$\vec{y} = X\vec{c} + \vec{\varepsilon}, \quad /1/$$

де $\vec{y}$ - n -вимірний вектор спостережень; $X = (x_{ij})$, $j = \overline{1, m}$,
 $i = \overline{1, n}$ - задана матриця; $\vec{c}$ - невідомий m -вимірний вектор;
 $\vec{\varepsilon}$ - n -вимірний випадковий вектор похибок; $M\vec{\varepsilon} = 0$, $M\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}' = R$.

Будемо вважати, що вектор $\vec{c}$ належить деякій вимірній області

$$\Omega_{\gamma} = \{\vec{c} : (D\vec{c}, \vec{c}) \leq \gamma\},$$

де D - додатно визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$; γ - дійсний параметр, $0 < \gamma < \infty$.Розглянемо мінімаксну або S -оцінку $[1]$ невідомого вектора

$$\vec{c}^* = T\vec{y} + \vec{t},$$

де $\vec{t} = 0$;

$$T = \gamma D^{-1} X' (X D^{-1} X' + R)^{-1}.$$

Без втрати загальності можна прийняти $D = I$.

У випадку, коли матриця $X X' + R$ вироджена, проведемо матричну регуляризацию $[1, 2]$ із використанням додатно визначеної симетричної матриці A розмірності $m \times m$. Отримаємо регуляризовану оцінку

$$\vec{c} = T\vec{y}, \quad /2/$$

$$\text{де } T = \gamma X' (X X' + R + A)^{-1}, \quad (X X' + R + A)^{-1} > 0.$$

При чому матриця-регуляризатор A повинна мінімізувати деякий критерій якості оцінки невідомого вектора $\vec{c}$. Розглянемо такий критерій якості $\|\vec{c} - \vec{c}^*\|^2$, де $\|\vec{c}\| = (\vec{c}, \vec{c})^{1/2}$.

Позначимо через L множину додатно визначених матриць розмірності $m \times m$.Т е о р е м а. Якщо R і D - невироджені матриці, тоді

$$\min_{A \in L} \max_{\vec{c} \in \Omega_{\gamma}} \|\vec{c} - \vec{c}^*\|^2 = \gamma \lambda_1 \{ (\hat{T}X - I)' (\hat{T}X - I) \} + \text{Sp} \hat{T} R \hat{T}', \quad /3/$$

де λ_1 - максимальне власне число. Якщо λ_1 однократне для всіх $\hat{A} \in \hat{G}$ де G - множина розв'язків рівняння [3], тоді його розв'язками будуть розв'язки рівняння

$$(R + \hat{A})(\gamma X X' + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' - R(X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' = 0, \quad /4/$$

де $\vec{e}_1$ - власний вектор, що відповідає власному числу λ_1 .

Д о в е д е н н я. Розглянемо

$$M \|\hat{c} - \vec{c}\|^2 = M \|\hat{T} \vec{y} - \vec{c}\|^2 = \|(\hat{T} X - I) \vec{c}\|^2 + \text{Sp } \hat{T} R \hat{T}'.$$

Використовуючи співвідношення Реллея [3], отримаємо

$$\max_{\vec{c} \in R_X} M \|\hat{c} - \vec{c}\|^2 = \gamma \lambda_1 \{(\hat{T} X - I)'(\hat{T} X - I)\} = \\ = \gamma \lambda_1 \{(\gamma X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X - I)^2\}.$$

Нехай λ_1 однократне власне число, тоді, використовуючи формули збурень для власних чисел [4], можна записати

$$(\partial/\partial t)(\gamma \lambda_1 \{(\gamma X' (X X' \gamma + R + \hat{A} + t \Theta)^{-1} X - I)^2\} + \\ + \text{Sp}(\gamma^2 X' (X X' \gamma + R + \hat{A} + t \Theta)^{-1} R (X X' \gamma + R + \hat{A} + t \Theta)^{-1} X))_{t=0} = 0,$$

де Θ - довільна додатно визначена симетрична матриця, t - дійсний параметр.

Звідси отримаємо

$$\gamma \{(-\gamma^2 X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} \Theta (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' (X X' \gamma + \\ + R + \hat{A})^{-1} X - \gamma^2 X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} \Theta \times \\ \times (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X + 2\gamma X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} \Theta (X X' \gamma + \\ + R + \hat{A})^{-1} X) \vec{e}_1, \vec{e}_1\} - \gamma^2 \text{Sp}(X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} \Theta (X X' \gamma + \\ + R + \hat{A})^{-1} R (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X + X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} R \times \\ \times (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} \Theta (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X) = 0.$$

Тоді

$$\text{Sp}(\Theta (-\gamma (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' \times \\ \times (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} + (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' (X X' \gamma + \\ + R + \hat{A})^{-1} - (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} R (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' \times \\ \times (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1})) = 0.$$

Звідси, враховуючи довільність матриці Θ , випливає

$$-\gamma X X' (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' + X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' - R (X X' \gamma + \\ + R + \hat{A})^{-1} X X' = 0.$$

Остаточно будемо мати

$$(R + \hat{A})(X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' - R (X X' \gamma + R + \hat{A})^{-1} = 0.$$

Таким чином, ми отримали спектральне рівняння для визначення оптимальної матриці-регуляризатора $\hat{A}$, яке в загальному випадку не має розв'язків в явному вигляді.

1. Гирко В.Л. Теория эмпирических систем уравнений. К., 1990. 2. Гирко В.Л., Мысак Р.Т., Онша Ю.М. Стационарное уравнение Риккати для матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов // Вычисл. и прикл. математика. 1988. Вып. 64. С. 135-137. 3. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. М., 1972. 4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.91

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман
ЗБІЖНІСТЬ ОДНОГО РЕКУРСИВНОГО МЕТОДУ
З ПОСЛІДОВНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ
ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Для розв'язування нелінійного рівняння

$$P(x) = 0 \quad /1/$$

в праці [1] побудовано і досліджено рекурсивний ітераційний процес на базі методу зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$. Метод [1], як і інші методи ньютонівського типу, вимагає знаходити на кожному кроці ітерацій обернений оператор /розв'язувати лінійні операторні рівняння/, що створює труднощі при їх чисельній реалізації.

Одним із способів підвищення ефективності методів ньютонівського типу є застосування апроксимації оберненого оператора. Використовуючи ідею послідовної апроксимації оберненого оператора [2], побудуємо модифікацію методу [1]:

$$x^0 = \bar{x}^{(0)}$$

$$z_n^{(0)} = x^{(n)}$$

$$z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - A_n P(z_n^{(i)}), \quad i=0, 1, \dots, t-1$$

$$x^{(n+1)} = z_n^{(t)}$$

$$\bar{x}^{(n+1)} = x^{(n+1)} - \frac{1}{2} A_n P(x^{(n+1)}),$$

© Роман Л.Л., 1992

/2/

$$A_{n+1}^{(0)} = A_n, \quad A_{n+1}^{(s+1)} = A_{n+1}^{(s)} (2E - P'(\bar{x}^{(n+1)}) A_{n+1}^{(s)}), \quad s = 0, 1, \dots, K-1,$$

$$A_{n+1} = A_{n+1}^{(K)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

де x^* , A_0 - відповідно початкові наближення до точного розв'язку x^* рівняння /1/ та оберненого оператора $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$.
Відмітимо, в методі /2/ для обчислення оберненого оператора використовується ітераційний рекурсивний процес.

Одержимо достатні умови й оцінку швидкості збіжності методу /2/.

Т е о р е м а. Нехай: 1/ рівняння /1/ має розв'язок x^* та існує $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, причому $\|A^*\| \leq B$; 2/ у сфері

$$S = \{x: \|x - x^*\| \leq r_0\} \quad \|P''(x)\| \leq \tilde{z};$$

$$3/ \quad \|P'(x^*)\| \leq C;$$

$$4/ \quad h_0 = \max\{K_0 M_0 D_0\} < \frac{1}{r_0}, \quad r_0 = \max\{\|x^* - x^{(0)}\|, \|x^* - \bar{x}^{(0)}\|, \|A^* - A_0\|\},$$

де

$$K_0 = C + \frac{3}{2} B \alpha + \frac{3}{2} L r_0,$$

$$M_0^t = K_0^t \left[\frac{1}{2} B C + \frac{1}{2} C r_0 + \frac{3}{4} B L r_0 + \frac{3}{4} B \alpha r_0^2 \right],$$

$$D_0^t = D_0^{(K)}, \quad t_0 + 1 = \min(t+1, 2^k),$$

$$D_0^{(i)} = (C + \alpha r_0) (D_0^{(i-1)})^2 + D_0^{(i-1)} \cdot 2 B L M_0^{t+1-2^{i-1}} + L B^2 M_0^{t+1-2^i},$$

$$D_0 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Тоді послідовності $\{x^{(n)}\}$, $\{\bar{x}^{(n)}\}$, A_n збігаються відповідно до x^* і A^* , причому справедлива оцінка

$$r_n = \max\{\|x^* - x^{(n)}\|, \|x^* - \bar{x}^{(n)}\|, \|A^* - A_n\|\} \leq (h_0 r_0)^{(t_0+1)^n} \cdot r_0/3/$$

Доведення здійснимо за індукцією. Покажемо, що оцінка /3/ справедлива при $n = 1$. Із /2/ на основі тотожних перетворень і формули Тейлора одержимо

$$x^* - z_n^{(i)} = x^* - z_n^{(i-1)} + A_n [P(z_n^{(i-1)})] = x^* - z_n^{(i-1)} - A_n [P'(z_n^{(i-1)}) \times (x^* - z_n^{(i-1)}) + \int_0^1 P''(z_n^{(i-1)} + \tau(x^* - z_n^{(i-1)})) (1-\tau) (x^* - z_n^{(i-1)})^2 d\tau] \quad /4/$$

Оскільки

$$E - A_n P'(z_n^{(i-1)}) = (A^* - A_n) P'(x^*) + A_n (P'(x^*) - P'(z_n^{(i-1)})) \quad /5/$$

та

$$\|A_n\| \leq \|A^*\| + \|A^* - A_n\| \leq B + \|A^* - A_n\|, \quad /6/$$

то, використовуючи умови 2/, 3/ теореми і /4/ маємо

$$\begin{aligned} \|x^* - z_n^{(i)}\| &\leq (\|A^* - A_n\| \cdot C + (B + \|A^* - A_n\|) L \|x^* - z_n^{(i-2)}\|) \times \\ &\times \|x^* - z_n^{(i-1)}\| + \frac{1}{2} (B + \|A^* - A_n\|) L \|x^* - z_n^{(i-1)}\|^2 \leq \gamma_n^{(i-1)} \|x^* - z_n^{(i-1)}\|, \quad /7/ \end{aligned}$$

де

$$\gamma_n^{(i-1)} = \|A^* - A_n\| C + \frac{3}{2} B L \|x^* - z_n^{(i-1)}\| + \frac{3}{2} L \|A^* - A_n\| \|x^* - z_n^{(i-1)}\|, \quad /8/$$

Враховуючи /7/, /8/ запишемо

$$i = 0, 1, \dots, t.$$

$$\|x^* - z_n^{(1)}\| \leq \gamma_n^{(0)} \|x^* - x^{(n)}\|,$$

$$\|x^* - z_n^{(2)}\| \leq \gamma_n^{(1)} \|x^* - z_n^{(1)}\| \leq \gamma_n^{(1)} \gamma_n^{(0)} \|x^* - x^{(n)}\|,$$

$$\|x^* - z_n^{(t)}\| \leq \gamma_n^{(t-1)} \dots \gamma_n^{(1)} \gamma_n^{(0)} \|x^* - x^{(n)}\|. \quad /9/$$

Із /9/ з урахуванням /2/ маємо

$$\|x^* - x^{(n+1)}\| \leq \gamma_n^{(t-1)} \dots \gamma_n^{(1)} \gamma_n^{(0)} \|x^* - x^{(n)}\|. \quad /10/$$

На основі /2/, формули Тейлора та тотожних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} x^* - \bar{x}^{(n+1)} &= x^* - x^{(n+1)} + \frac{1}{2} A_n P'(x^{(n+1)}) = x^* - x^{(n+1)} + \frac{1}{2} A_n [P'(x^{(n+1)}) \times \\ &\times (x^* - x^{(n+1)}) + \int_0^1 P''(x^{(n+1)} + \zeta(x^* - x^{(n+1)})) (1-\zeta)(x^* - x^{(n+1)})^2 d\zeta]. \quad /11/ \end{aligned}$$

Враховуючи умови теореми та тотожні перетворення виразу

$$\begin{aligned} E - \frac{1}{2} A_n P'(x^{(n+1)}) &= \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} A^* P'(x^*) - \frac{1}{2} A_n P'(x^{(n+1)}) = \\ &= \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} (A^* - A_n) P'(x^*) + \frac{1}{2} A_n [P'(x^*) - P'(x^{(n+1)})]. \quad /12/ \end{aligned}$$

Із /11/ маємо оцінку:

$$\begin{aligned} \|x^* - x^{(n+1)}\| \leq & \left\{ \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} C \|A^* - A_n\| + \frac{1}{2} (B + \|A^* - A_n\|) L \|x^* - x^{(n+1)}\| + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} L (B + \|A^* - A_n\|) \|x^* - x^{(n+1)}\| \right\} \|x^* - x^{(n+1)}\| \leq \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} C \|A^* - A_n\| + \\ & + \frac{3}{4} BL \|x^* - x^{(n+1)}\| + \frac{3}{4} L \|A^* - A_n\| \|x^* - x^{(n+1)}\|. \end{aligned} \quad /13/$$

Тепер оцінімо $\|A^* - A_{n+1}\|$. Для цього на основі /2/ запишемо

$$\begin{aligned} A^* - A_{n+1}^{(s+1)} &= A^* - A_{n+1}^{(s)} (2E - P'(\bar{x}^{(n+1)}) A_{n+1}^{(s)}) = A^* - A_{n+1}^{(s)} [E + P'(x^*) (A^* - A_{n+1}^{(s)}) + \\ &+ (P'(x^*) - P'(\bar{x}^{(n+1)})) A_{n+1}^{(s)}] = (A^* - A_{n+1}^{(s)}) \cdot P'(x^*) (A^* - A_{n+1}^{(s)}) - A_{n+1}^{(s)} [P'(x^*) - \\ &- P'(\bar{x}^{(n+1)})] A_{n+1}^{(s)}, \quad s = 0, 1, \dots, K-1. \end{aligned} \quad /14/$$

Оскільки

$$\|A_{n+1}^{(s)}\| \leq \|A^*\| + \|A^* - A_{n+1}^{(s)}\| \leq B + \|A^* - A_{n+1}^{(s)}\|, \quad /15/$$

то з урахуванням умов теореми із /14/ наявна оцінка

$$\|A^* - A_{n+1}^{(s+1)}\| \leq \|A^* - A_{n+1}^{(s)}\|^2 C + (B + \|A^* - A_{n+1}^{(s)}\|) L \|x^* - \bar{x}^{(n+1)}\|. \quad /16/$$

Доведемо тепер правильність оцінки /3/ при $n = 1$. Для цього із /10/ запишемо

$$\|x^* - x^{(t)}\| \leq \gamma_0^{(t-1)} \dots \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(0)} \|x^* - x^{(0)}\|,$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(0)} &= \|A^* - A_0\| C + \frac{3}{2} BL \|x^* - x^{(0)}\| + \frac{3}{2} L \|A^* - A_0\| \|x^* - x^{(0)}\| \leq K_0 r_0, \\ \gamma_0^{(1)} &= C \|A^* - A_0\| + \frac{3}{2} BL \gamma_0^{(0)} \|x^* - x^{(0)}\| + \frac{3}{2} L \|A^* - A_0\| \gamma_0^{(0)} \|x^* - x^{(0)}\| \leq K_0 r_0, \\ &\dots \dots \dots \gamma_0^{(t-1)} \leq K_0 r_0. \end{aligned} \quad /17/$$

Отже,

$$\|x^* - x^{(t)}\| \leq (K_0 r_0)^t r_0.$$

Із умови теореми /4/ та оцінки /13/ при $n = 0$ маємо

$$\begin{aligned} \|x^* - \bar{x}^{(1)}\| &\leq \left[\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} C r_0 + \frac{3}{4} BL (K_0 r_0)^t r_0 + \frac{3}{4} BL r_0 (K_0 r_0)^t r_0 \right] \times \\ &\times (K_0 r_0)^t r_0 \leq M_0^t r_0^{t+1} = (M_0 r_0)^t r_0. \end{aligned} \quad /18/$$

На основі /16/ та умови /4/ теореми одержимо

$$\|A^* - A_1\| \leq D_0^{(K)} r_0^{t_0+1} = (D_0 r_0)^{t_0} r_0. \quad /19/$$

Таким чином, із /17/, /18/, /19/ слідує

$$r_1 = \max\{\|x^* - x^{(1)}\|, \|x^* - \bar{x}^{(1)}\|, \|A^* - A_1\|\} \leq \max\{(K_0 r_0)^{t_0} r_0, (M_0 r_0)^{t_0} r_0, (D_0 r_0)^{t_0} r_0\} \leq (h_0 r_0)^{t_0} r_0,$$

що підтверджує правильність оцінки /3/ при $n = 1$.

Враховуючи, що сам метод /2/ починає працювати з $x^{(1)}$, перевіримо виконання умов для точки $x^{(2)}$.

Аналогічно до формул /17/, /18/, /19/ одержимо

$$\|x^* - x^{(2)}\| \leq (K_0 r_1)^{t_1} r_1,$$

$$\|x^* - \bar{x}^{(2)}\| \leq (M_0 r_1)^{t_1} r_1,$$

$$\|A^* - A_2\| \leq (D_0 r_1)^{t_0} r_1.$$

Отже

$$r_2 \leq \max\{(K_0 r_1)^{t_1} r_1, (M_0 r_1)^{t_1} r_1, (D_0 r_1)^{t_0} r_1\} \leq (h_0 r_1)^{t_1} r_1 \leq (h_0 r_0)^{t_0 + 2t_0} r_0 = (h_0 r_0)^{(t_0 + 4)/2} r_0,$$

що підтверджує правильність оцінки /3/ при $n = 2$.

За методом індукції тепер легко одержати оцінку для довільного $n > 2$. Теорема доведена.

З а у в а ж е н н я I. Виберемо $A_0 = [P'(x^{(0)})]^{-1}$, причому $\|A_0\| \leq B_0$, тоді

$$\|A^* - A_0\| = \|[P'(x^*)]^{-1} - [P'(\bar{x}_0)]^{-1}\| \leq B L B_0 \|x^* - \bar{x}^{(0)}\|,$$

і в теоремі можна взяти

$$r_0 = \max\{\|x^* - x^{(0)}\|, \ell \|x^* - x^{(0)}\|\},$$

$$\ell = \max\{1, B L B_0\}.$$

З а у в а ж е н н я 2. Для розв'язку рівняння /1/ на паралельних процесорах можна побудувати модифікацію методу /1/ з паралельною апроксимацією оберненого оператора

$$A_{n+1}^{(0)} = A_n,$$

$$A_{n+1}^{(s+1)} = A_{n+1}^{(s)} (2E - P'(\bar{x}^{(n)}) \cdot A_{n+1}^{(s)}), \quad s = 0, 1, \dots, K-1$$

$$A_{n+1} = A_{n+1}^{(K)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

І. Бартіш М.Я., Роман Л.Л. Про один рекурсивний метод розв'язування нелінійних функціональних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1986. Вип. 26. С.3-7. 2. У л ь м С... Об ите- рационных методах с последовательной аппроксимацией обратного опе- ратора // Изв. АН УССР. Физика, математика. 1967. Т.16. №4. С.403-411.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.90

УДК 539.3:519.6

Я.Г.Савула, І.М.Сипа, І.В.Струтинський

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ТОНКИМИ ПОКРИТТЯМИ І ВКЛЮЧЕННЯМИ

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу темпера-тури в тілах з тонкими теплопровідними включеннями або покриттями розглядалися багатьма дослідниками [1]. В більшості досліджень тонкий теплопровідний шар, яким є покриття, чи включення, моделюється спеціальними граничними умовами, на поверхні контакту з ті-лом. У нашій праці для цього використовується комбінована математична модель, яка описується зв'язаною системою диференціальних рівнянь різної вимірності. Моделі такого типу [5,6] зручні для застосування чисельних методів, зокрема методу скінченних елемен-тів.

І. М а т е м а т и ч н а м о д е л ь т е п л о п р о-
в і д н о с т і т о н к о г о ш а р у.

Розглянемо тонкий шар Ω , що описується криволінійною системою координат α_1, α_2

$$\Omega = \{ \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^e \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^e - h \leq \alpha_2 \leq h \}.$$

Нехай $A = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}$, $K = (x_2'' x_1' - x_1'' x_2') / A^3$ - коефіцієнт Ляме та кривизна серединної кривої $\alpha_2 = 0$, яка задається параметричними рівняннями $x_1 = x_1(\alpha_1)$, $x_2 = x_2(\alpha_1)$.

Тоді компоненти g_{ij} метричного тензора ортогональної системи координат α_1, α_2 матимуть вигляд $g_{11} = A^2(1 + \alpha_2 K)$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$.

Вважатимемо, що товщина $2h$ шару і кривизна K є настільки малими, що у формулі для g_{11} можна знехтувати величиною $\alpha_2 K$

© Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В., 1992

порівняно з одиницею, та коефіцієнт теплопровідності шару не залежить від змінної α_2 .

Враховуючи це, запишемо рівняння теплопровідності [1] тонкого шару у вигляді

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\lambda}{A} \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_2^2} + q. \quad /1/$$

Тут c - питома теплоємність, ρ - густина, τ - параметр часу, q - густина теплового потоку внутрішніх джерел тепла.

Зауважимо, що в деяких працях, зокрема у монографії [3], у рівнянні вигляду /1/ утримується ще й доданок $K\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_2}$, який одразу призводить до втрати важливої з точки зору ефективності застосовуваних чисельних методів властивості симетрії операторів. Тут вважається, що K настільки мале, що цим доданком можна знехтувати.

Допустимо, що на гранях $\alpha_2 = \pm h$ виконуються умови теплообміну.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = -q_n^+, \quad \alpha_2 = h; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = q_n^-, \quad \alpha_2 = -h. \quad /2/$$

Зважаючи на малість товщини шару, задамо розподіл температури за змінною α_2 у вигляді лінійного закону

$$T = t_1(\alpha_1, \tau) + \frac{\alpha_2}{h} t_2(\alpha_1, \tau), \quad /3/$$

де $t_1(\alpha_1, \tau)$, $t_2(\alpha_1, \tau)$ - шукані функції.

Підставляючи /3/ у рівняння /1/, та ортогоналізуючи нев'язку до 1 і α_2 в сенсі інтеграла за змінною α_2 в межах від $-h$ до h , а також враховуючи умови /1.2/, отримаємо систему диференціальних рівнянь для визначення функцій t_1, t_2

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} + c\rho \frac{\partial t_1}{\partial \tau} &= -(q_n^+ + q_n^-) + q^0 \\ -\frac{1}{3A} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{h^2} \lambda_0 t_2 + \frac{c\rho}{3} \frac{\partial t_2}{\partial \tau} &= -(q_n^+ - q_n^-) + \frac{1}{h} q^1 \end{aligned} \quad /4/$$

Тут $c_0 = 2hc$, $\lambda_0 = 2h\lambda$, $q^0 = \int_{-h}^h q d\alpha_2$, $q^1 = \int_{-h}^h q \alpha_2 d\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$, $0 < \tau < \infty$.

До цих рівнянь додамо граничні та початкові умови, які отримуються таким же способом, як і рівняння /4/

$$\begin{aligned} \lambda_0 \frac{\partial t_j}{\partial \alpha_1} &= \alpha_0 (t_j - T_0^{j-1}) \\ -\lambda_0 \frac{\partial t_j}{\partial \alpha_1} &= \alpha_e (t_j - T_e^{j-1}) \end{aligned} \quad j=1, 2. \quad /5/$$

$$t_1(\alpha_1, 0) = t_1^0, \quad t_2(\alpha_1, 0) = t_2^0. \quad /6/$$

Тут $\alpha_e = 2h\alpha \big|_{\alpha_1 = \alpha_1^i}; \quad T_e^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_c \big|_{\alpha_1 = \alpha_1^i} d\alpha_2;$

$$T_i^1 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h T_c \big|_{\alpha_1 = \alpha_1^i} \alpha_2 d\alpha_2;$$

T_c - температура зовнішнього середовища; $t_1^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_0 d\alpha_2$

$t_2^0 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h T_0 \alpha_2 d\alpha_2$; T_0 - розподіл температури в шарі при $x = 0$.

2. Тіло з тонким покриттям

Розглянемо задачу теплопровідності для тіла з тонким покриттям /рис. I/.

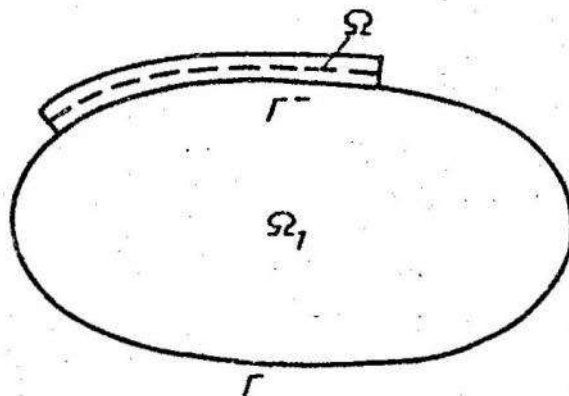


Рис. I

Розподіл температури в області $\Omega_1 \cup \Omega$ опишемо системою диференціальних рівнянь.

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} + \alpha^+ t_2 + \alpha^+ t_1 = -q_n^- + q^0, \quad /7/$$

$$-\frac{1}{3A} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{1}{h^2} \lambda_0 + \alpha^+ \right) t_2 + \alpha^+ t_1 = q_n^- + \frac{1}{h} q^1;$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \in]\alpha_1^0; \alpha_1^0[\times]0, +\infty[$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + c_1 \rho \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = q_1,$$

/8/

$$x_1, x_2 \times \tilde{\tau} \in \Omega_1 \times]0, +\infty[.$$

Зауважимо, що система рівнянь /7/ отримується в /4/ шляхом підстановки

$$q_n^+ = \alpha^+ (t_1 + t_2 - T_c^+),$$

де α^+ - коефіцієнт теплообміну на ділянці границі $\Gamma^+ = \{\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^e, \alpha_2 = h\}$, T_c^+ - температура зовнішнього середовища на цій же ділянці.

Система зв'язаних диференціальних рівнянь /7/, /8/, яка складається з рівнянь різної вимірності, повинна бути розв'язана при наступних початкових та граничних умовах:

$$t_1(\alpha_1, 0) = t_1^0, \quad t_2(\alpha_2, 0) = t_2^0, \quad T_1(x_1, x_2, 0) = T_1^0, \quad \tau = 0;$$

умови /5/ та $-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h} = \alpha_1 (T_1 - T_c)$, $x_1, x_2 \in \Gamma_1$,

h - зовнішня нормаль до границі Γ_1 .

На ділянці границі Γ необхідно задати умови спрощення

$$T_1 = t_1 - t_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h^-} = q_n^- \quad \text{на } \Gamma^-,$$

h^- - зовнішня нормаль до границі Γ^- .

3. Тіло з тонким включенням

Подано основні співвідношення для задачі теплопровідності в області $\Omega_1 \cup \Omega \cup \Omega_2$, яка зображена на рис. 2.

Розподіл температури описується такими диференціальними рівняннями:

рівняння /4/ та

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = q_1$$

/9/

$$x_1, x_2 \times \tilde{\tau} \in \Omega_1 \times]0, +\infty[;$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = q_2,$$

/10/

$$x_1, x_2 \times \tilde{\tau} \in \Omega_2 \times]0, +\infty[.$$

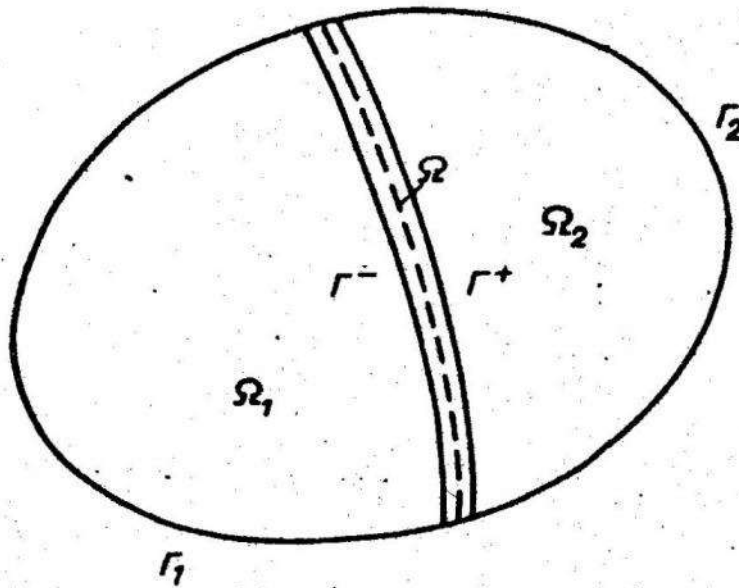


Рис. 2

Система зв'язаних диференціальних рівнянь /4/, /9/, /10/ різної вимірності повинна бути розв'язана при наступних початкових та граничних умовах:

$$\begin{aligned} \text{умови /6/ та } T_1(x_1, x_2, 0) &= T_1^0, T_2(x_1, x_2, 0) = T_2^0; & /11/ \\ \text{умови /5/ та } \tau=0 \end{aligned}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h} = \alpha_1 (T_1 - T_c), \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1, \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial h} = \alpha_2 (T_2 - T_c), \quad x_1, x_2 \in \Gamma_2. \quad /12/$$

В області границі Γ^+ , Γ^- повинні бути задані умови спряження

$$T_1 = t_1 - t_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h^-} = q_n^- \quad \text{на } \Gamma^-; \quad /13/$$

$$T_2 = t_1 + t_2, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial h^+} = q_n^+ \quad \text{на } \Gamma^+, \quad /14/$$

де h^- , h^+ зовнішні нормалі до границь Γ^- , Γ^+ .

4. Деякі властивості диференціальних операторів

Побудовані математичні моделі містять нові диференціальні оператори по просторових змінних, відмінні від операторів, що містяться в класичній моделі теплопровідності, наприклад, рівняння /8/. Їх властивості розкриваються наступними лемою та теоремою. Розглянемо випадок однорідних граничних умов на температуру.

Л е м а. Диференціальні оператори за просторовими змінними задач /4/, /7/, /8/; /4/, /9/, /10/ з однорідними граничними умовами на температуру є симетричними.

Д о в е д е н н я. Впливає з наступного виду скалярних добутків, що відповідають трьом названим задачам:

$$(A_1(t_1, t_2), \tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1^e} \left(\frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{3} \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{t}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{h^2} \lambda_0 t_2 \tilde{t}_2 \right) d\alpha_1; \quad /15/$$

$$(A_2(t_1, t_2, T_1), \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{T}_1) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1^e} \left\{ \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{3} \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{t}_2}{\partial \alpha_1} + \alpha^+ A t_1 \tilde{t}_1 + \alpha^+ A (t_1 t_2 + \tilde{t}_1 \tilde{t}_2) \right\} d\alpha_1 + \int_{\Omega_1} \lambda_1 \text{grad } T_1 \text{grad } \tilde{T}_1 d\Omega; \quad /16/$$

$$(A_3(t_1, t_2, T_1, T_2), \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1^e} \left\{ \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{3} \frac{\lambda_0}{A} \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{t}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{A}{h^2} \lambda_0 t_2 \tilde{t}_2 \right\} d\alpha_1 + \int_{\Omega_1} \lambda_1 \text{grad } T_1 \text{grad } \tilde{T}_1 d\Omega + \int_{\Omega_2} \lambda_2 \text{grad } T_2 \text{grad } \tilde{T}_2 d\Omega. \quad /17/$$

Т е о р е м а. Якщо серединна крива шару є гладкою кривою без особливих точок $A > 0$, а області Ω_1, Ω_2 є однозв'язними областями з ліпшицевими границями, то оператори A_i , $i = 1, 2, 3$ розглянутих задач /випадок однорідних граничних умов на температуру/ є додатно визначеними.

Д о в е д е н н я. Впливає із співвідношень /15/-/17/ шляхом застосування нерівностей Фрідрікса [4].

Отже, оператори побудованих математичних моделей мають такі ж властивості, як і оператор класичної задачі теплопровідності.

І. Б е л я е в Н.М., Р я д н о А.А. Методи теорії теплопровідності. В 2-х ч. Ч.І. М., 1982. 2. К и т Г.С., К р и в ц у н М.І. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К., 1983. 3. М о т о в и л о в е ц И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения. К., 1969. 4. Р е к т о р и с К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1965. 5. С а в у л а Я.Г., Д и н я к И.И., Д у б о в и к А.В. Применение комбинированной модели

для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций // Прикл. механика. 1989. Т.25. №9. 5. G i a r e t P.G. Plates and Functions in Elastic Multi-Structures. Paris, 1990.

Стаття надійшла до редколегії 19.12.91

УДК 539.3

Н.П.Флейшман, О.Б.Олексів

ДИНАМІЧНІ УМОВИ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З ВИДАВКАМИ

З метою збільшення жорсткості тонких оболонок їх часто ретельно видавлюють. Вплив видавок на жорсткість, міцність, стійкість і коливання оболонок вивчено поки-що недостатньо. У зв'язку з цим подаємо умови спряження для оболонки з видавкою.

Видавка постійної висоти 2δ , яка з'єднує дві частини /першу та другу/ оболонкової конструкції, розглядається як елемент оболонки, деформація якої моделюється рівняннями теорії Кірхгофа-Лява або типу Тимошенка. Її серединна поверхня віднесена до системи ортогональних криволінійних координат (α_1, α_2) за які прийняті лінії кривизни. За основні невідомі приймаються статичні й динамічні фактори, які дають змогу формулювати в алгебраїчному вигляді граничні умови на краях видавки $\alpha_1 = \pm \delta$ [1, 2]. Іншими словами, компонентами шуканої вектор-функції у випадку класичної теорії Кірхгофа-Лява є зусилля (N_1, S_1^*, Q_1^*) , згинні моменти M_1 , переміщення (u, v, w) точок серединної поверхні та кути повороту θ , тобто

$$\bar{N} = \bar{K} = \{\bar{K}_n(s, \alpha_2, t)\} = \{N_1, S_1^*, Q_1^*, M_1, u, v, w, \theta\}_{(n=1,8)} \quad /1/$$

Тут t - час, $s \equiv \alpha_1$ - дуга на α_1 - лінії, причому $|s| \leq 2\delta$.

У випадку уточненої теорії типу Тимошенка за основні невідомі прийнято вектор

$$\bar{N} = \bar{T} = \{T_n(s, \alpha_2, t)\} = \{N_1, N_{12}, Q_1, M_1, H, u, v, w, \psi_1, \psi_2\}_{(n=1,10)} \quad /2/$$

Тут використані ті ж позначення, що й у [2].

Вектор $\bar{N}$ /1/ чи /2/ повинен задовольняти уніфіковані векторно-матричні рівняння руху оболонки

© Флейшман Н.П., Олексів О.Б., 1992

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = L\bar{N} - G \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2} + f(s, \alpha_2, t), \quad /3/$$

де $f(s, \alpha_2, t) = \{f_n\}$ - вектор заданого зовнішнього розподіленого навантаження. Для обох теорій оболонок елементи вектора f та квадратних матриць L, G і L, G відповідно подані у монографіях [1, 2].

Для виведення умов сприяння область серединної поверхні видавки дискретизується лише з напрямку α_1 - лінії, на якій, в міру малості висоти видавки 2δ , беруться лише три точки $s = 0, s = \pm \delta$. Рівняння /3/ записується тільки для точок осі видавки $s = 0$, а умови її спая з сусідніми оболонками задовольняються на лініях $s = \pm \delta$. Заміняючи першу похідну в точках $s = 0$ її скінченно-різницеvim аналогом із точністю до $O(\delta^2)$, переписуємо рівняння /3/ у вигляді

$$\frac{1}{2\delta} (\bar{N}^+ - \bar{N}^-) = (L\bar{N} - G \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2} + f)_{s=0}, \quad /4/$$

де $\bar{N}^\pm = \bar{N}(\pm\delta, \alpha_2, t)$.

Апроксимуючи лінійними функціями розподіл компонент вектора $\bar{N}$ по висоті видавки ($|s| \leq 2\delta$), маємо

$$(\bar{N})_{s=0} = \frac{1}{2} (\bar{N}^+ + \bar{N}^-). \quad /5/$$

Підставляючи, нарешті, /5/ в /4/, одержуємо

$$(\bar{N}^+ - \bar{N}^-) = \delta (L_0 - G_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) (\bar{N}^+ + \bar{N}^-) + 2\delta f_0. \quad /6/$$

Тут $L_0 = (L)_{s=0}$, $G_0 = (G)_{s=0}$, $f_0 = f(0, \alpha_2, t)$.

У кожній конкретній задачі вектори $\bar{N}^+$ і $\bar{N}^-$ виражаються через контактні статичні та кінематичні фактори з'єднаних оболонок 1, 2 з їх умов спая з видавкою вздовж ліній $s = \pm \delta$. Отже, співвідношення /6/ і є умовами сприяння оболонок 1, 2 з малою вдавкою, які дають змогу при розрахунку конструкції не розглядати видавки і лише побічно врахувати її механічні й геометричні параметри.

У загальному випадку умови спая видавки зі сусідніми оболонками можна записати у вигляді

$$\bar{N}^- = C\bar{N}_1, \quad \bar{N}^+ = C\bar{N}_2, \quad /7/$$

де, аналогічно /1/ чи /2/, через $\bar{N}_1$ і $\bar{N}_2$ позначено відповідно вектор $\bar{N}$ для першої та другої оболонок, спаяних із видавкою, на лініях $s = \pm \delta$; C - відома квадратна матриця, що залежить від геометрії конструкції.

Так, наприклад, для циліндричної оболонки з внутрішньою конічною видавкою в осесиметричному випадку /за класичною теорією/ маємо

$$\bar{N}_j = \{\bar{N}_j, Q_j, M_j, u, w, \theta\}, \quad (j=1, 2),$$

$$C = \{c_{kl}\}, \quad (k, l = \overline{1, 6}),$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{44} = C_{55} = \sin \beta,$$

$$C_{21} = -C_{12} = C_{54} = -C_{45} = \cos \beta,$$

$$C_{33} = C_{66} = 1.$$

/8/

Решта елементів матриці C дорівнюють нулю, через β позначено кут між зовнішньою нормаллю конічної видавки і віссю циліндрів.

Підставляючи /7/ в /6/, одержуємо інший вигляд умов спряження оболонок з малою внутрішньою видавкою:

$$[E + \delta(L_0 - G_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2})] C \bar{N}_1 -$$

$$- [E - \delta(L_0 - G_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2})] C \bar{N}_2 + 2\delta \bar{f}_0 = 0,$$

/9/

де E - одинична матриця; матриці L_0 і G_0 приведено в [1, 2].

Позначимо через φ_r кут між зовнішньою нормаллю довільної осесиметричної конструкції та віссю обертання, а через φ_δ - кут між зовнішньою нормаллю видавки та віссю обертання. Тоді одержимо загальний вигляд матриці C , а значить і умов спряження /9/:

$$C_{11} = C_{22} = C_{44} = C_{55} = \cos(\varphi_\delta - \varphi_r),$$

$$C_{12} = -C_{21} = C_{45} = -C_{54} = \sin(\varphi_\delta - \varphi_r),$$

$$C_{33} = C_{66} = 1,$$

/10/

решта елементів матриці C дорівнюють нулю.

З /9/ і /10/ можна легко одержати умови спряження для циліндричної, конічної, сферичної оболонок із внутрішніми видавками. При цьому потрібно задати лише певні кути φ_r і φ_δ . Частковим випадком є також кільцева пластинка з внутрішньою циліндричною видавкою для якої

$$C_{21} = -C_{12} = C_{33} = C_{54} = -C_{45} = C_{66} = 1,$$

/11/

решта $C_{ij} = 0$.

З /6/ можна легко вивести узагальнені граничні умови для оболонок з малою крайовою видавкою. Для цього достатньо виключити і /6/

ті силові чи кінематичні фактори, які не задані на зовнішньому краї видавки. Кінцевому результату маємо такі умови

$$BC\bar{N} = 0, \quad /12/$$

де $\bar{N}$ - вектор /8/, C - відповідна квадратна матриця /10/. Зокрема, у випадку шарнірно закріпленого краю видавки елементи матриці B розміру 3×6 мають вигляд:

$$B_{13} = -\delta l_{13}, \quad B_{15} = -\frac{(1+\delta l_{56})(1-\delta l_{55})}{\delta l_{56}},$$

$$B_{23} = -\frac{l_{12}}{l_{32}}(1-\delta l_{33}), \quad B_{24} = -\delta l_{14} - \frac{(1+\delta l_{41})(1-\delta l_{44})}{\delta l_{41}},$$

$$B_{25} = -\delta l_{15} + \frac{l_{45}}{l_{41}}(1+\delta l_{41}) + \frac{l_{12}l_{36}}{l_{32}l_{56}}(1-\delta l_{55}),$$

$$B_{33} = -\frac{(1+\delta l_{22})(1-\delta l_{33})}{\delta l_{32}}, \quad B_{34} = -\delta l_{24} - \frac{l_{21}}{l_{41}}(1-\delta l_{44}), \quad /13/$$

$$B_{35} = -\delta l_{25} + \frac{\delta l_{21}l_{45}}{l_{41}} + \frac{l_{36}(1+\delta l_{22})(1+\delta l_{55})}{\delta l_{32}l_{56}},$$

$$B_{16} = B_{21} = B_{32} = 2,$$

решта $B_{ij} = 0$, а l_{ij} - елементи відповідної матриці L_0 .

Розглянемо це неосесиметричну задачу для оболонки обертання з крайовою видавкою, край $S = -\delta$ якої вільний. За основні невідомі приймемо вектор

$$\bar{N} = \{N_x, N_z, S^*, M_s, u_x, u_z, v, \theta_s\}. \quad /14/$$

При такому виборі невідомої вектор-функції маємо $C = E$.

Граничні умови одержуються зі співвідношення /6/. Виключивши із /6/ не задані на краю видавки $S = -\delta$ переміщення u_x , u_z , v і кут повороту θ_s , маємо

$$(P - DZ^T R)\bar{N} = 2\delta \bar{F}_1 - 2\delta D \bar{F}_2, \quad /15/$$

де $\bar{F}_1 = (f_1, \dots, f_4)^T$, а $\bar{F}_2 = (f_5, \dots, f_8)^T$. Через матриці P і R розміру 4×8 позначено верхню і нижню половини матриці $[E - \delta(L_0 - G_0, \delta^2 / \delta t^2)]$, а через матриці D і Z розміру 4×4 - відповідно верхню і нижню половини матриці

$[E + \delta(L_0 - G_0 \partial^2/\partial t^2)]$. Співвідношення /15/ і є записом граничних умов для неосесиметричної задачі відносно оболонки обертання з видавкою, край $S = -\delta$ якої вільний.

І. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородський А.Б., Шинкарь Я.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. К., 1986. 2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.90

УДК 539.3:517.977

І.І.Дияк, Б.Я.Шарманський, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕГУЛІРІЗОВАНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМ НАГРІВОМ

І. Нехай осесиметричне тіло належить до циліндричної системи координат (r, ϑ, z) таким чином, що його меридіанний перетин займає обмежену область Ω точок $x = (r, z)$ площини rOz . Будемо вважати, що межа області неперервна за Ліпшицем, так що $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Допустимо, що теплофізичні властивості тіла описуються коефіцієнтами теплопровідності $\lambda = \lambda(x) > 0$ і теплоємності $c_v = c_v(x) > 0$ відповідно та температура $u(x, t)$ тіла визначається із початково-крайової задачі:

$$c_v \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{в } \Omega \times (0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

$$\text{на } \Gamma_1 \times (0, T],$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - \tau)$$

$$\text{на } \Gamma_2 \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

$$\text{в } \Omega$$

де $u_0 = u_0(x)$ заданий початковий розподіл температури в тілі,
 $\alpha = \text{const} > 0$ коефіцієнт теплообміну зі зовнішнім середовищем.

© Дияк І.І., Шарманський Б.Я., Шинкаренко Г.А., 1992

температура $\tau = \tau(t)$ якого може вибиратись з множини:

$$U = \{ \tau \in L^2(0, T) : \theta_{\min} \leq \tau(t) \leq \theta_{\max} \}. \quad /2/$$

$\theta_{\min}, \theta_{\max}$ задані обмеження, $\theta_{\min} \leq \theta_{\max}$.

Розглянемо задачу оптимального керування [1]:
задано $p \in L^2(\Omega)$;

знайти функцію $\theta \in U$ таку, що мінімізує функціонал

$$J(\theta) = \int_{\Omega} |u(x, T, \tau) - p(x)|^2 dx, \quad /3/$$

на множині U при умові, що $u(x, t, \tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі /1/.

Слідуючи [1, 5], неважко показати, що функціонал /3/ диференційований на просторі $H \in L^2(0, T)$ і його градієнт можна представити у вигляді

$$J'(\theta) = \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{c_v} w(x, t, \theta) r d\gamma, \quad /4/$$

де w є розв'язком спряженої до /1/ задачі:

$$\begin{aligned} c_v \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, & \text{в } \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0, & \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \end{aligned} \quad /5/$$

$$-\lambda \frac{\partial w}{\partial n} = \alpha w, \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T],$$

$$w|_{t=T} = 2(u|_{t=T} - p), \quad \text{в } \Omega$$

2. Останній факт є основою для побудови такої процедури наближеного розв'язку задачі /3/.

Ввівши оператор проектування за правилом

$$\Pi \tau(t) = \begin{cases} \tau(t) & , \text{ якщо } \tau \in H, \\ \theta_{\min} & , \text{ якщо } \tau(t) < \theta_{\min}, \\ \theta_{\max} & , \text{ якщо } \tau(t) > \theta_{\max}, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], \quad /6/$$

скористаємось методом проекції градієнта [1, 2] для побудови наближених розв'язків θ_n задачі /3/. Вибравши $\theta_n(t)$ з рекурентних співвідношень, знаходимо

$$\theta_{n+1}(t) = \Pi[\theta_n(t) - \alpha_n J'(\theta_n)], \quad n = 0, 1, \dots, \quad /7/$$

де коефіцієнт спуску α_n визначається як розв'язок задачі мінімізації:

знайти $\alpha_n = \text{const} > 0$ таке, що

$$J(\Pi[\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)]) \leq J(\Pi[\theta_n - \beta J'(\theta_n)]), \quad \forall \beta \in R. \quad /8/$$

Остання задача розв'язується методом золотого поділу.

Найбільш трудомісткою частиною даного алгоритму є обчислення градієнта функціонала $J(\theta_n)$ за правилом /4/; для цього необхідно послідовно розв'язати дві початково-крайові задачі. На першому етапі розв'язується початково-крайова задача /1/ з $\tau = \theta_n$. Потім після підстановки одержаного розв'язку $u(x, t, \theta_n)$ в останнє з рівнянь /5/, визначається розв'язок $w(x, t, \theta_n)$ спряженої задачі.

Розв'язування задач /1/ і /5/ стають однотипними, якщо в /5/ зробити заміну $t' = T - t$. Використовується метод скінченних елементів у поєднанні зі схемою Кранка-Ніколсона [2,4].

3. Описаний алгоритм реалізований на Фортрані 77 у MS DOS. Для апробації методики розглянуто тестовий приклад про оптимальне керування від нагріву суцільного циліндра за рахунок зміни температури зовнішнього середовища. Безрозмірні параметри задачі вибирались такими:

$$R = H = 1, \quad c_v = \lambda = \alpha = 1, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\theta_0 = 20, \quad p(x) = 30, \quad \theta_{\min} = 0, \quad \theta_{\max} = 60.$$

Результати розв'язування задачі подані на рис. 1-3. Початковий розподіл температури зовнішнього середовища за часом показаний кривою 4 на рис. 1, а розв'язок $\theta(t)$ одержаний за 8-ітерацій - кривою 1. На рис. 2 кривою 1 показано зміну величини критерію якості $J(\theta)$ на кожній ітерації, а розподіл температури по радіусу циліндра в кінцевий момент часу показаний кривою 1 на рис. 3. Очевидні значні труднощі практичної реалізації такого керування. Якщо межі $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$ зміни керування ширші, то розв'язок має ще більш нерегулярний характер.

4. Для "згладжування" оптимального керування пропонується використання методу регуляризації, тобто оптимальне керування сформу-

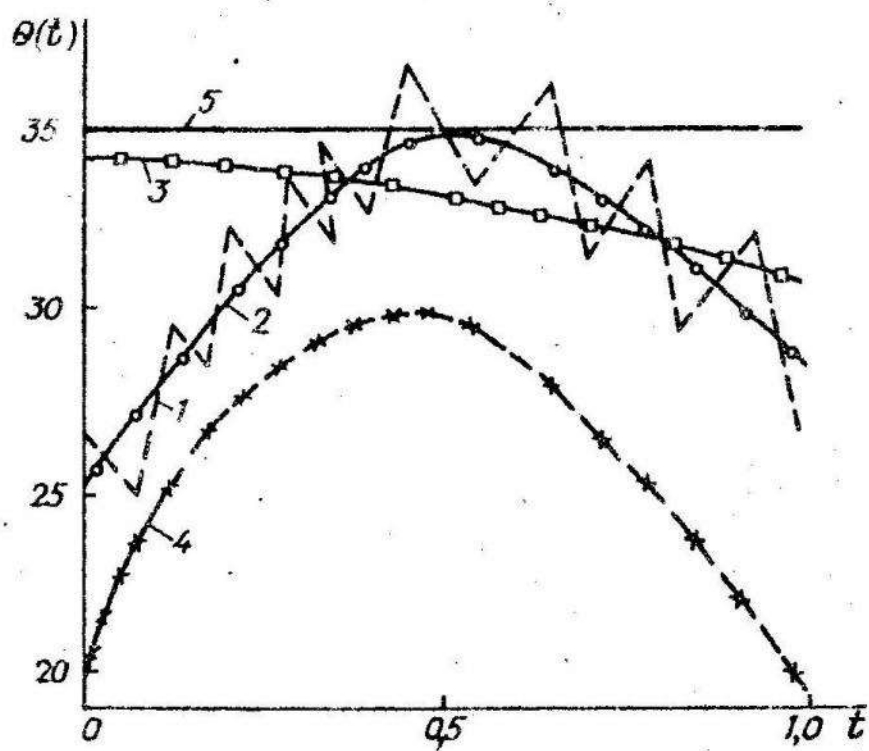


Рис. I

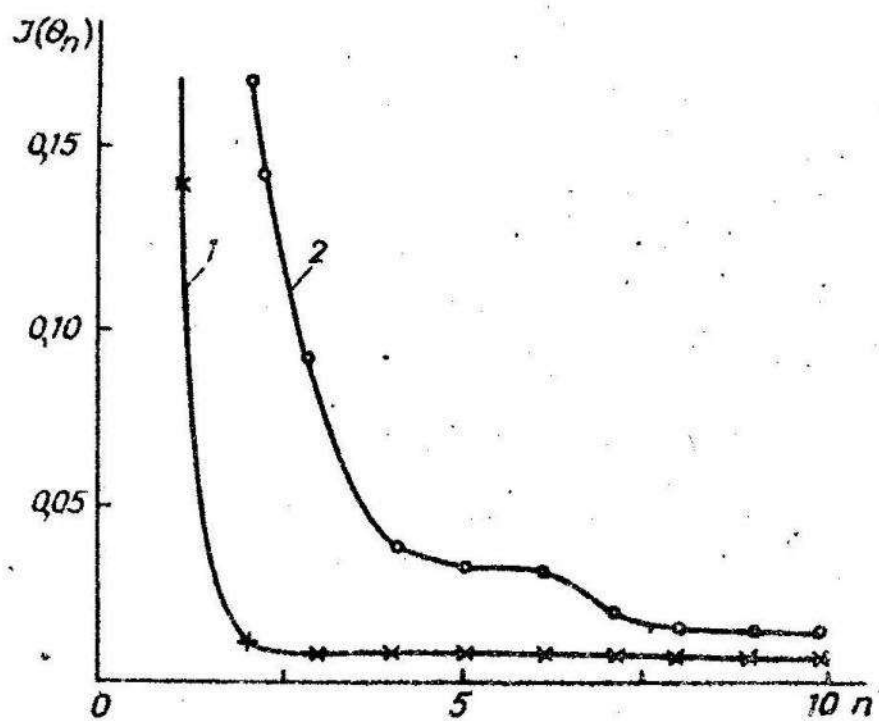


Рис. 2

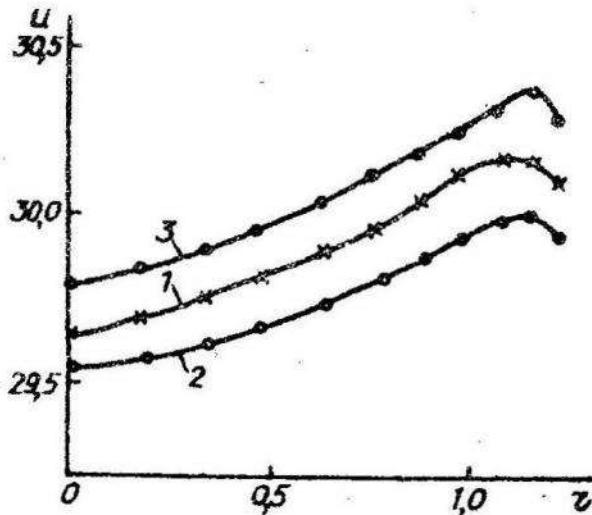


Рис. 3

льованної задачі шукати як розв'язок задачі мінімізації функції на-
ду вигляду

$$T(\tau) = Y(\tau) + \gamma F(\tau),$$

/9/

де $F(\tau)$ - стабілізуючий функціонал;

γ - ваговий коефіцієнт.

Для мінімізації функціоналу /9/ використаємо також вказаний
алгоритм. Якщо вибрати

$$F(\tau) = \int_0^T \tau^2(t) dt,$$

/10/

тоді можна показати, що градієнт функціоналу $F(\tau)$

$$F'(\tau) = 2 * \tau.$$

Але бажаних результатів при такому виборі стабілізатора не було
досягнуто.

До цих пір ми вимагали лише, щоб $\tau \in L^2(0, T)$. Прак-
тично ж набагато простіше реалізувати оптимальне керування з класу
 $C^k(0, T)$. Якщо припустити, що $\tau \in C^2(0, T)$, тоді можна вибрати
стабілізатором наступний функціонал:

$$G(\tau) = \int_0^T |\tau'(t)|^2 dt.$$

/11/

У цьому випадку можна показати, що на варіаціях $\delta\tau$ функції
 τ , для яких наявне співвідношення

$$\tau' \delta\tau \Big|_{t=0} = \tau' \delta\tau \Big|_{t=T} = 0,$$

/12/

градієнт функціоналу $G'(\tau)$ можна визначити за формулою:

$$\delta'(\tau) = -2 + \tau''(t).$$

/13/

Достатньою умовою для виконання /12/ буде:

$$\delta\tau \Big|_{t=0} = \delta\tau \Big|_{t=T} = 0.$$

Отже, для мінімізації функціоналу /9/ ми знову ж зможемо скористатись формулою /7/.

5. Результати розв'язання регуляризованої задачі зі стабілізатором вигляду /11/ приведені на рис. 1-3, кривими з індексом 2. На рис. 1 показано зміну керування в часі, на рис. 2 - зміну значення критерію оптимізації, на рис. 3 - розподіл температури по радіусу циліндра в кінцевий момент часу. На основі чисельного експерименту було виявлено, що оптимальним є значення вагового коефіцієнта

$$\gamma = 0,001.$$

При виборі початкового наближення у вигляді, зображеному кривою 5 /рис. 1/, керування одержане після восьми ітерацій, представлене кривою 3 на цьому ж рисунку. Слід відзначити якісну зміну оптимального керування при незмінній величині функціоналу /крива 3 на рис. 2/, що свідчить про багатоекстремальність задачі.

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981. 2. Дьяков И.И. Решение задач квазистатической термоупругости на основе применения высокоточных схем МКЭ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 3. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов, 1981. 4. Тихонов А.И., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 5. Cavin R.R.III, Tandon S.C. Distributed Parameters System Optimum Control Design Via Finite Element Discretization //Automatica. 1977. V. 13. P. 611 - 614.

Стаття надійшла до редколегії 12.10.91

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ТА АПРОКСИМАЦІЯ
ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ ТА ДИФУЗІЇ
ДОМІШОК У НЕСТИСЛИВІЙ АТМОСФЕРІ

З позицій енергетичного підходу послідовно досліджуються питання коректності стаціонарної задачі про розповсюдження пасивних забруднюючих домішок у нестисливій атмосфері, побудови та збіжності відповідних апроксимацій Гальоркіна. Для типових просторів методу скінченних елементів отримані апріорні оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків досліджуваних варіаційних задач.

1. Постановка крайової задачі

Розглянемо обмежену зв'язну область Ω точок $x = (x_1, \dots, x_n)$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем межею Γ та позначимо через $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ .

Нехай область Ω є частиною тонкого шару атмосфери, що знаходиться у безпосередньому контакті з поверхнею землі. В області Ω відомі вектор $u = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ швидкості вітру та функція $f = f(x)$ інтенсивності джерел досліджуваних домішок. При цьому припускати, що наявні вclusions

$$\begin{cases} u \in U = \{v = (v_1, \dots, v_n) \in H(\text{div}; \Omega) \mid \text{div } v = 0 \text{ в } \Omega\} \\ f \in H = L^2(\Omega). \end{cases} \quad /1/$$

Використані тут і далі функціональні простори ми запозичили у Дюво-Ліонса [2] та Сьєрле [8].

З урахуванням допущень розподіл концентрації домішки, яку позначимо через $\psi = \psi(x)$, описується рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \psi u_j \right\} + \sigma \psi = f \quad \text{в } \Omega \quad /2/$$

та крайовими умовами.

$$\psi = 0 \quad \text{на } \Gamma_\psi, \quad \Gamma_\psi = \{x \in \Gamma \mid u_1 \nu_1 < 0\}, \quad \text{mes}(\Gamma_\psi) > 0; \quad /3/$$

$$-\mu_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \nu_i = q \quad \text{на } \Gamma_q, \quad \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\psi.$$

/4/

Тут $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$ - коефіцієнти турбулентної дифузії, що задовольняють звичайні властивості симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \mu_{ji} \\ \mu_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu_0 \xi_i \xi_i, \quad \mu_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

/5/

$\sigma \geq 0$ - коефіцієнт поглинання домішки, $q = q(x)$ - відома функція, що описує потік домішки через поверхню Γ_q . У співвідношеннях /2/, /4/, /5/ за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до n .

Детально формулювання задач про міграцію домішок в атмосфері та доведення єдиності їх розв'язків пророблено в праці /3/.

Вважатимемо, що наявні вclusions

$$\sigma \in L^\infty(\Omega), \quad q \in L^2(\Gamma_q).$$

$$\{\mu_{ij}\} \in L^\infty(\Omega).$$

/6/

2. Варіаційна задача та її розв'язуваність

Введемо простір допустимих функцій

$$\Phi = \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0, \text{ на } \Gamma_\psi \}$$

та спряжений до нього простір Φ' , норму в якому будемо позначати символом $\|\cdot\|_{\Phi'}$.

Розглянемо наступну варіаційну задачу:

$$\text{Задамо } u \in U, \quad f \in H, \quad q \in L^2(\Gamma_q).$$

Знайти функцію $\psi \in \Phi$ таку, що

$$a(\psi, \varphi) + b(\psi, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

/7/

Тут

$$a(\psi, \varphi) = \int_\Omega \left\{ \mu_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sigma \psi \varphi \right\} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \psi \varphi u_i \nu_i d\gamma$$

$$b(\psi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ \psi \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi u_i) - \varphi \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi u_i) \right\} dx$$

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi dx - \int_{\Gamma_q} q \varphi d\gamma \quad \forall \varphi, \psi \in \Phi.$$

/8/

Неважко перевірити, що розв'язок задач /2/-/4/ якщо він існує/одночасно є розв'язком варіаційної задачі /7/. Більше того, наявна.

Т е о р е м а /про коректність варіаційної задачі/

Нехай дані задачі /2/-/4/ характеризуються властивостями /1/, /5/ та /6/. Тоді варіаційна задача /7/ допускає єдиний розв'язок у просторі Φ , і при цьому

$$\|\psi\|_{1,\Omega} \leq \alpha_0^{-1} \|\ell\|_* \quad \alpha = \text{const} > 0 \quad /9/$$

Д о в е д е н н я. Зі застосуванням теореми I.2.I /Сьєрле /8// легко довести існування додатної константи α_0 такої, що

$$\alpha_0 \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \leq \alpha(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad /10/$$

Тому симетрична неперервна білінійна форма $\alpha(\cdot, \cdot): \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ визначає скалярний добуток на Φ і норму

$$\|\varphi\|_\Phi = \alpha^{1/2}(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad /11/$$

еквівалентну нормі $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Далі, завдяки властивості косиметричності неперервної білінійної форми $b(\cdot, \cdot): \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ що виражається рівністю

$$b(\varphi, \psi) = -b(\psi, \varphi) \quad \forall \varphi, \psi \in \Phi, \quad /12/$$

білінійна форма

$$A(\psi, \varphi) = \alpha(\psi, \varphi) + b(\psi, \varphi) \quad \forall \psi, \varphi \in \Phi \quad /13/$$

є неперервною та Φ -еліптичною.

Більше того, з означення /8/, включень /1/ та /6/ випливає неперервність лінійного функціонала ℓ на Φ , тобто

$$\ell \in \Phi'. \quad /14/$$

Таким чином, існування єдиного розв'язку ψ у просторі Φ є безпосереднім наслідком властивостей /13/, /14/ та лемми Лакса-Мільграма /8/. Остаточно з оцінок

$$\alpha_0 \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \leq A(\psi, \psi) = \langle \ell, \psi \rangle \leq \|\ell\|_* \|\psi\|_{1,\Omega}$$

випливає /9/.

3. Дискретизація Гальоркіна

Для розв'язування задачі /7/ скористаємось методом Гальоркіна [5]. З цієї метою виберемо послідовність скінченновимірних

підпросторів $\{\Phi_h\} \subset \Phi$ таку, що

$$\dim \Phi_h = N(h) = N \rightarrow \infty \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad /15/$$

$\bigcup_{h>0} \Phi_h$ щільно вкладено в Φ .

Для кожного фіксованого значення параметра дискретизації $h > 0$ визначимо апроксимацію Гальоркіна $\psi_h \in \Phi_h$ для розв'язку ψ задачі /7/ як розв'язок наступної задачі:

$$\text{Задано } u \in U, \quad l \in \Phi'. \\ \text{Знайти } \psi_h \in \Phi_h \text{ таку, що} \quad /16/$$

$$A(\psi_h, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi_h.$$

Якщо виконується умова теореми, тоді існує єдиний розв'язок задачі /16/, причому

$$\|\psi_h\|_{1,\Omega} \leq \alpha_0^{-1} \|l\|_X \quad \forall h > 0. \quad /17/$$

Більше того, якщо зафіксувати деякий базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ простору Φ_h , тоді структура апроксимації Гальоркіна однозначно визначається розкладом

$$\psi_h(x) = \sum_{j=1}^N P_j \varphi_j(x) \quad /18/$$

з невідомими поки що коефіцієнтами $\{P_j\}_{j=1}^N$. Для визначення останніх підставимо /18/ у рівняння задачі /16/ і послідовно візьмемо $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, \dots, N$. У результаті прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^N A(\varphi_j, \varphi_i) P_j = \langle l, \varphi_i \rangle \quad i = 1, \dots, N \quad /19/$$

відносно невідомих $\{P_j\}_{j=1}^N$. Зауважимо, що внаслідок властивості /13/

$$\text{матриця } A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^N = \{A(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$$

додатно визначена для кожного $h > 0$, /20/

тому система /19/ однозначно визначає коефіцієнти розкладу /18/ апроксимації Гальоркіна $\psi_h \in \Phi_h$ на кожного $h > 0$.

Підкреслимо також, що з огляду на /17/ апроксимації $\{\psi_h\}$ утворюють обмежену послідовність з Φ , тому з неї можна вибрати збіжну до розв'язку $\psi \in \Phi$ задачі /7/ підпослідовність.

4. Збіжність апроксимацій методу скінченних елементів

Для оцінки швидкості збіжності до нуля похибки апроксимації Гальоркіна

$$e_h = \psi_h - \psi$$

скористаємось припущенням, що простори апроксимації Φ_h володіють такими властивостями:

для кожного $\psi \in \Phi \cap H^{k+1}(\Omega)$, $k \geq 0$,

знайдуться $\varphi \in \Phi_h$ та $C_0 = \text{const} > 0$, значення

якої не залежить від h та ψ , такі, що

$$\|\psi - \varphi\|_{m, \Omega} \leq C_0 h^{k+1-m} \|\psi\|_{k+1, \Omega}, \quad 0 \leq m \leq k. \quad /21/$$

Зауважимо, що такими інтерполяційними властивостями, як правило, володіють простори кусково-поліноміальних функцій методу скінченних елементів /5-8/. При цьому роль параметра h відіграє діаметр сітки скінченних елементів, а натуральне число k визначає максимальний порядок полінома, що може бути представлений функціями базиса в межах скінченного елемента.

Т е о р е м а /про збіжність наближених розв'язків/

Нехай існує таке натуральне $k \geq 1$, що розв'язок ψ варіаційної задачі /7/ характеризується включенням

$$\psi \in \Phi \cap H^{k+1}(\Omega).$$

Тоді послідовність апроксимацій Гальоркіна $\{\psi_h\}$ при $h \rightarrow 0$ збігається до розв'язку ψ задачі /7/ і при цьому наявна оцінка

$$\|\psi_h - \psi\|_{1, \Omega} \leq C h^k \|\psi\|_{k+1, \Omega}, \quad /22/$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від параметра дискретизації h .

Д о в е д е н н я. Зі співвідношень /7/ та /16/ безпосередньо випливає, що

$$A(e_h, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi_h.$$

З урахуванням останньої рівності, а також властивостей білінійної форми $A(\cdot, \cdot)$ знайдемо

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|e_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq A(e_h, e_h) = A(e_h, \psi_h - \varphi + \varphi - \psi) = \\ &= A(e_h, \varphi - \psi) \leq \\ &\leq M \|e_h\|_{1,\Omega} \|\varphi - \psi\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in \Phi_h, \end{aligned}$$

де $M > 0$ – константа непрерывности формы $A(.,.)$. Таким чином,

$$\|\psi_h - \psi\|_{1,\Omega} \leq \alpha_0^{-1} M \inf_{\varphi \in \Phi_h} \|\varphi - \psi\|_{1,\Omega} \quad /23/$$

Звідки з урахуванням /21/ отримуємо оцінку /22/.

І. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. Л., 1989. 2. Даво Г. Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М., 1980. 3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М., 1982. 4. Марчук Г.И. Методы расщепления. М., 1988. 5. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. 6. Никольский М.А., Федоров А.Л., Дорожкин А.И. Численное решение задачи о распространении пассивных примесей в прибрежной зоне моря // Метеорология и гидрология. 1990. №1. С. 57-63. 7. Странг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977. 8. Сьярде Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1977. 9. Javan-del I., Doughty C., Tsang C.F. Groundwater Transport: Handbook of Mathematical Models. Washington, 1984. 10. Tim U.S., Mostaghini S. Numerical model for predicting pesticide movement through soils under conservation tillage // Annual. Conf. Canad. Soc. Civ. Eng., Calgary, May 25-27. 1988. Montreal, 1988, V.2. P. 499-512.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.91

О.В.Блакиевська, А.Б.Гуць, М.М.Полатайко
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НАГІСННЯ
НАПІВПРОВІДНИКОВИХ ПЛІВОК

Напівпровідникові плівки на пластини часто наносяться при горінні реагуючих газів. Швидкість зростання плівок і їх однорідність визначається характером протікання процесів тепломасопереносу в газових сумішах.

При математичному моделюванні цих процесів приймаємо, що реагуюча суміш складається із газоподібних реагентів і продуктів хімічної реакції, що дає змогу використати загальну систему рівнянь механіки реагуючих газів, тобто систему рівнянь аеротермохімії [1].

Додатково приймаємо наступні припущення:

1. У газовій суміші нема іншого макроскопічного руху крім того, який може бути викликаний наявністю градієнтів температури та концентрації. Тоді у рівняннях аеротермохімії можуть бути опущені доданки, що містять швидкість.

2. Можна знехтувати переносом енергії випромінювання, а також дифузійним термoeфектом.

3. Теплофізичні коефіцієнти системи постійні.

Нехай реакційноздатна суміш знаходиться в області $-\infty < x < \infty$; $0 < y < \infty$; $-l < z < l$. Тут x, y, z - декартові координати, $2l$ - товщина шару суміші, яка запалюється у площині $y=0$. Потік тепла викликає хімічну реакцію та поширення хвилі горіння по суміші газів. Після виходу з реакції реагенти та продукти реакції, що не згоріли, охолоджуються за рахунок теплообміну з пластинами $z = \pm l$. При цьому важкі молекули дифундують у напрямку пониження температури, а більш легкі - у протилежному напрямку.

Враховуючи цю інтерпретацію процесу, запишемо його математичну модель. Позначимо через t_0 час протікання процесу. Розіб'ємо цей час на два інтервали: початковий, тривалість якого $t_1 < t_0$, протягом якого відбувається хімічна реакція, та інтервал, на якому домінуючим тепломасообмінним процесом є термофорез.

При математичному моделюванні першого етапу процесу нехтуємо концентраційно- і термодифузійю, теплообміном з підкладками, а також нестационарністю поля тисків. Вважаємо, що суміш стехіометрична.

© Блакиевська О.В., Гуць А.Б., Полатайко М.М., 1992

Зміна компонентного стану суміші на цьому етапі може відбуватися внаслідок хімічної реакції в теплопровідності. Цей процес описується також системою рівнянь:

$$\rho_H \frac{\partial C_\alpha}{\partial t} = R_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \mu-1; \quad /1/$$

$$\rho_H C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \sum_{\alpha=1}^{\mu} C_p R_\alpha T; \quad /2/$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} C_\alpha = 1. \quad /3/$$

Тут ρ_H, T - початкова густина суміші та її температура, C_α - масова концентрація реагентів і продуктів реакції, загальною число яких дорівнює μ ; R_α - масова швидкість утворення; α - компонента в результаті хімічної реакції, яка визначається за законом Арреніуса, тобт

$$R_\alpha = k M_\alpha \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) (\tilde{\nu}_\alpha - \nu_\alpha) \prod_{\beta=1}^{\mu} \left(\frac{C_\beta}{M_\beta}\right)^{\nu_\beta};$$

k - передекспоненціальний множник; M_α - молярна маса α - речовини; E - енергія активації; R - молярна газова стала; ν_α і $\tilde{\nu}_\alpha$ - стехіометричні коефіцієнти реакції; $C_p = \sum C_\alpha C_{p\alpha}$; $C_{p\alpha}$ - ізобарична теплоємність α -компонента, λ - коефіцієнт теплопровідності суміші.

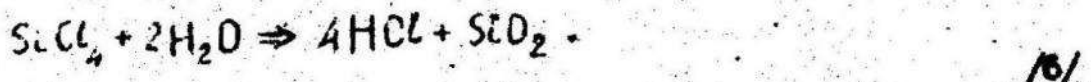
Дукані функції C_α і T повинні задовольняти умови:

$$C_\alpha|_{t=0} = C_{\alpha H}, \quad \alpha = 1, \mu-1; \quad T|_{t=0} = T_H; \quad /4/$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0} = Q(t); \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad /5/$$

де Q - задана величина теплового потоку; $C_{\alpha H}, T_H$ - початкові концентрації та температура.

Розглянемо процес, який ґрунтується на реакції



Тоді $\mu = 4$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = \nu_4 = \tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_2 = 0$, $\tilde{\nu}_3 = 4$, $\tilde{\nu}_4 = 1$. У цьому випадку з рівнянь /1/ та умов /4/ одержимо

$$C_2 = 1 - C_{1H} + \frac{2M_2}{M_1} (C_1 - C_{1H}); \quad C_3 = \frac{4M_3}{M_1} (C_{1H} - C_1); \quad C_4 = \frac{M_4}{M_1} (C_{1H} - C_1).$$

Отже, система рівнянь /1/-/3/ легко зводиться до системи рівнянь відносно двох невідомих функцій C і T .

Аналіз числового розв'язку задачі /1/-/3/ показує, що за винятком невеликого околу торця $y=0$ в суміші встановлюється на першому етапі процесу постійна гранична температура T_n і концентрація C_{4n} .

Розглянемо тепер математичну модель процесу після виходу суміші зі зони реакції в тій частині реактора, де шукані функції не залежать від поперечної координати y , тобто виключаючи околі торця. Цей процес описується системою двох рівнянь відносно температури і концентрації досліджуваного продукту реакції:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2};$$

/7/

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} = \bar{D} \left[\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{z}^2} + K^T \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{1+\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) \right].$$

/8/

Тут

$$\bar{T} = \frac{T - T_n}{T_n}; \bar{t} = \frac{t}{t_0}; \bar{z} = \frac{z}{l}; \bar{\alpha} = \frac{\lambda}{\rho_n C_{4n}}; K^T = \frac{D^T}{\rho_n D}; \bar{D} = \frac{D t_0}{l^2};$$

D - ефективний коефіцієнт дифузії досліджуваної речовини;

D^T - коефіцієнт термодифузії.

Шукані функції задовольняють умови

$$\bar{T}|_{\bar{t}=0} = \frac{T_n - T_n}{T_n} \equiv \bar{T}_0,$$

/9/

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\pm 1} = \pm Bi \cdot \bar{T} \Big|_{\bar{z}=\pm 1},$$

/10/

$$C|_{\bar{t}=0} = C_{4n};$$

/11/

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\pm 1} = \pm C_0(t).$$

/12/

Тут $Bi = \alpha l / \lambda$; α - коефіцієнт тепловіддачі.

Функцію $C_0(t)$ вибираємо так, щоб виконувалась умова

$$\int_0^1 [(C(z,t) - C_{4n})] dz = 0.$$

/13/

Остання умова еквівалентна тому, що сумарна зміна маси розглядуваного продукту реакції дорівнює нулю, оскільки на даному етапі відсутні хімічні перетворення.

Враховуючи симетрію задачі відносно площини $x = 0$, тобто умову

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{\bar{x}=0} = 0, \quad /14/$$

одержимо з рівняння /8/ і умови /13/ наступну умову

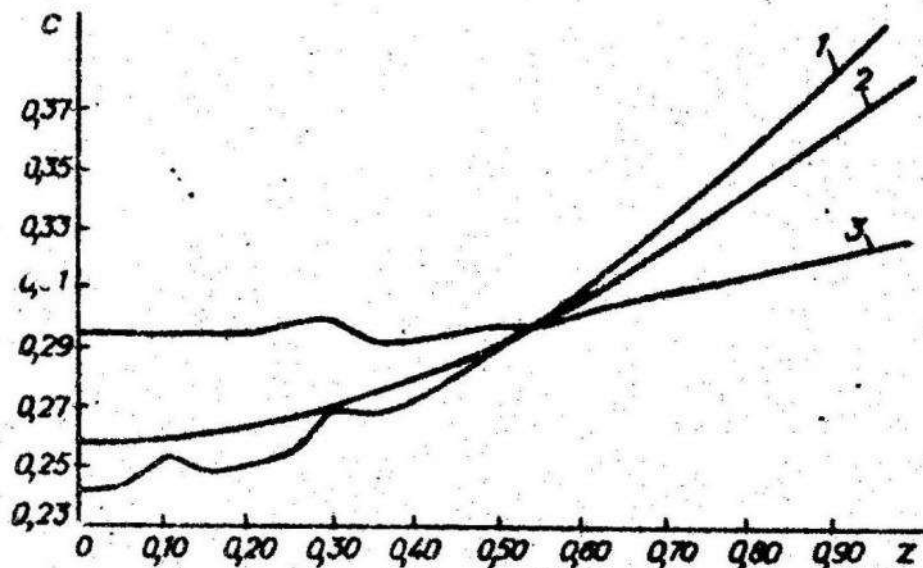
$$\left. \frac{\partial c}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=1} = \left[\frac{\kappa^T}{1+\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=1}. \quad /15/$$

Розв'язок задач /7/, /9/, /10/ можна знайти методом відокремлення змінних [2]. Він має вигляд

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n_1)}{n_1 + \sin(n_1) \cos(n_1)} \cos(n_1 \bar{x}) \exp(-n_1^2 \kappa \bar{t}).$$

Тут n_1 - корені рівняння $n = Bi \operatorname{ctg} n$.

Розв'язок задач /8/, /11/, /14/, /15/ знаходимо методом сіток з використанням стандартного математичного забезпечення ЕОМ. При інтенсивному теплообміні між пластиною і сумішшю, коли $Bi \gg 1$, швидкість осідання продукту реакції істотно залежить від термодифузійного співвідношення κ^T , яке тим більше, чим більша різниця між молекулярними масами компонентів.



Результати обчислень концентрації компонента SiO_2 при $T_0 = 1,18$; $\alpha \bar{t} = 0,5$; $\bar{D} = 1$ показані на рисунку. Криві 1,2,3 відповідають значенням $\kappa^T = 0,4$; $\kappa^T = 0,3$; $\kappa^T = 0,1$.

І. А лек сее в В.В., При шин А.М. Физическая газодинамика реагирующих сред. М., 1979. 2. И с а е в С.И. Теория теплообмена: Учебник для вузов /Под ред. А.И.Леонтьева. М., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.91

УДК 19.92.

С.Г.Дещенко, Б.А.Остудін

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ КЛАСИФІКАЦІЇ

Існують різні способи розв'язування задач класифікації та оцінки їх якості. Алгоритми класифікації, описані в літературі, вимагають визначення наперед кількості класів і, як правило, залежать від порядку розгляду початкових даних, що, в свою чергу, ускладнює аналіз результатів. Початкові дані при цьому описують за допомогою кількісних ознак.

Ми пропонуємо алгоритм класифікації для малого об'єму початкових даних, коли не можна використати класичну теорію ймовірностей. При цьому результати виконання алгоритму не залежать від порядку перегляду початкових даних, які містять ознаки, отримані за допомогою шкали порядку та шкали найменувань. Зауважимо також, що розглядається ситуація, коли кількість класів є невідомою.

І. А н а л і з п р о б л е м и т а н е о б х і д н і в і д о м о с т і з т е о р і ї н е ч і т к и х м н о ж и н

Нехай M - множина початкових даних, яку необхідно розбити на класи подібних елементів. Припустимо, що $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, і $\text{card } M = \text{card } M_i = m$, $1 \leq i \leq n$ де m - потужність множини M та множини значень і-ї ознаки елементів $M - M_i$. Отже, $\forall x_p \in M$, $x_p = (x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n})$, де $x_{p_i} \in M_i$. Нехай також r - міра подібності між елементами M , яка постає як відображення $M \times M \rightarrow R^+$ таке, що $r(x, y) = r(y, x)$, $\forall x, y \in M$; $r(x, x) = 1$, $\forall x \in M$.

Для визначення конкретної міри подібності розглянемо відображення $r_j^n: M \times M \rightarrow R^+$. При цьому будемо вважати, що M_j - множина значень j -ї ознаки, яка отримана за допомогою шкали найменувань. Нехай

$$r_j^n(x_p, x_q) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m d^k(x_{pj}, x_{qj}), \quad x_p, x_q \in M, \quad /1/$$

де

$$d^k(x_{pj}, x_{qj}) = 1 \Leftrightarrow (x_{pj} = x_{kj} \wedge x_{qj} = x_{kj}) \vee (x_{pj} \neq x_{kj} \wedge x_{qj} \neq x_{kj}); \quad /2/$$

$$d^k(x_{pj}, x_{qj}) = 0 \Leftrightarrow (x_{pj} = x_{kj} \wedge x_{qj} \neq x_{kj}) \vee (x_{pj} \neq x_{kj} \wedge x_{qj} = x_{kj}). \quad /3/$$

Звідси $0 \leq r_j^n \leq 1$.

Якщо M_j - множина значень l -ї ознаки, яка отримана за допомогою шкали порядку, то відображення $r_l^n: M \times M \rightarrow R^+$ - визначимо наступним чином:

$$r_l^n(x_p, x_q) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m d^k(x_{pl}, x_{ql}), \quad x_p, x_q \in M, \quad /4/$$

де

$$d^k(x_{pl}, x_{ql}) = 1 \Leftrightarrow (x_{pl} > x_{kl} \wedge x_{ql} > x_{kl}) \vee \\ \vee (x_{pl} < x_{kl} \wedge x_{ql} < x_{kl}) \vee (x_{pl} = x_{kl} \wedge x_{ql} = x_{kl});$$

$$d^k(x_{pl}, x_{ql}) = 0 \Leftrightarrow (x_{pl} > x_{kl} \wedge x_{ql} < x_{kl}) \vee \quad /5/$$

$$\vee (x_{pl} < x_{kl} \wedge x_{ql} > x_{kl});$$

$$d^k(x_{pl}, x_{ql}) = 0.5 \Leftrightarrow (x_{ql} \neq x_{kl}) \vee \quad /6/$$

$$\vee (x_{pl} \neq x_{kl} \wedge x_{ql} = x_{kl}). \quad /7/$$

Нехай J_p, L_p - множини індексів ознак, які визначені для x_p у шкалі найменувань та шкалі порядку. Введемо позначення

$$J(p, q) = J_p \cup J_q, L(p, q) = L_p \cup L_q, N = \text{card } J(p, q) + \text{card } L(p, q). \quad /8/$$

Враховуючи /I/ - /B/, розглянемо відображення $r: M \times M \rightarrow R^+$, де

$$r(x_p, x_q) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j \in J(p,q)} r_j^n(x_p, x_q) + \sum_{l \in L(p,q)} r_l^n(x_p, x_q) \right\}. \quad /9/$$

Т в е р д ж е н н я 1. Відображення $r: M \times M \rightarrow R^+$ є мірою подібності для M , $0 \leq r(x_p, x_q) \leq 1$.

Відповідно до [1] міра подібності r на M є функцією належності деякого бінарного нечіткого відношення S на множині M і визначає його. Тобто $r = \mu_S: M \times M \rightarrow [0,1]$.

Легко бачити, що із означення міри подібності r на M , яка є функцією належності μ_S для S , випливає

Т в е р д ж е н н я 2. Нечітке відношення S на M є нечітким відношенням подібності на M .

Нечітке відношення S має занадто загальні властивості й практично не враховує зв'язків між рівнем відношення подібності для різних пар множини M . Умови, які враховують цей зв'язок, називаються умовами транзитивності. Вони забезпечують можливість розбиття множини M на класи подібності, що не перетинаються. Тому розглянемо перетворення початкового нетранзитивного відношення у транзитивне. Відповідно до [3] введемо наступні означення.

О з н а ч е н н я 1. Композицією нечітких відношень R і S на M називається нечітке відношення $R \circ S$ із функцією належності

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max \{ \min \{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z) \} \}, \quad \forall x, y, z \in M, \quad /10/$$

де μ_R і μ_S - функції належності нечітких відношень R та S .

О з н а ч е н н я 2. Нечітке відношення S є транзитивним на M , якщо $S \circ S \leq S$, або

$$\mu_S(x, z) \geq \min \{ \mu_S(x, y), \mu_S(y, z) \}, \quad \forall x, y, z \in M. \quad /11/$$

О з н а ч е н н я 3. Транзитивним замиканням нечіткого відношення S на M називається нечітке відношення $\hat{S}$, яке визначається наступним чином: $\hat{S} = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^k \cup \dots$ причому відношення S^k , в свою чергу, визначається рекурсивно

$$S^1 = S, S^k = S^{k-1} \circ S, \quad k = 2, 3, \dots$$

У праці [1] показано, що транзитивне замикання $\hat{S}$ довільного нечіткого відношення S транзитивне і є узагальненням звичайного

відношення еквівалентності. Якщо множина M містить m елементів і нечітке відношення S рефлексивне, то

$$\hat{S} = S^{m-1}. \quad /12/$$

Означення 4. α - рівнем нечіткого відношення S називається звичайне відношення S_α , яке визначається для всіх $\alpha > 0$ наступним чином:

$$S_\alpha = \{(x_p, x_q) \in M \times M : \mu_S(x_p, x_q) \geq \alpha\}. \quad /13/$$

Оскільки множина M скінченна, то нечітке відношення S на цій множині можна представити за допомогою матриці розміром $m \times m$, на перетині рядка p і стовбця q якої розміщується елемент $\mu(x_p, x_q)$.

Визначимо композицію нечітких відношень через їх матриці. Нехай нечітким відношенням R і S відповідають матриці A і B , а $R \circ S = C$. Тоді матриці відношень $R \circ S$, R і S відповідно до введеної операції композиції /10/ пов'язані наступним чином:

$$c_{ij} = \max \{ \min \{ a_{ik}, b_{kj} \} \}, \quad /14/$$

де c_{ij} , a_{ik} і b_{kj} відповідно елементи матриць C , A і B .

Припустимо, що нечіткому відношенню S відповідає матриця D . Тоді, враховуючи /12/, матриця нечіткого транзитивного відношення $\hat{S}$, згідно з /14/, дорівнює D^{m-1} .

Нехай

$$N_1 = \{(1,2), (1,3), \dots, (1,n)\}, \quad N_2 = \{(2,3), (2,4), \dots, (2,n)\}, \dots, N_{n-1} = \{(n-1,n)\}, N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_{n-1}.$$

Згідно з алгоритмом знаходження максимального зв'язаного паросполучення, викладеного у [4], розіб'ємо множину початкових даних M на такі пари елементів (x_p, x_q) , щоб

$$\sum_{(p,q) \in N} \mu_S(x_p, x_q) \rightarrow \max.$$

Тим самим ми отримали деяке бінарне відношення

$$B = \{(x_p, x_q) \in M \times M : \sum_{(p,q) \in N} \mu_S(x_p, x_q) \rightarrow \max\}.$$

Побудуємо множини $A'_1 = pr_1 B$ та $A'_2 = pr_2 B$, які є відповідно першою та другою проєкціями відношення B . Із означення A'_1 та A'_2 маємо, що $M = A'_1 \cup A'_2$. У випадку, коли кількість елементів M непарна, елемент x_s , який лишається, утворює пару (x_s, x_s) .

Як відомо з [1], α - рівень нечіткого транзитивного відношення $\hat{S} = \hat{S}_\alpha$ є алгоритмом класифікації. Причому до одного класу входять елементи, подібність між якими дорівнює або є більшою ніж α . Тому, застосовуючи $\hat{S}_\alpha$ до A'_1 та A'_2 , отримаємо деяке їх розбиття на класи

$$\hat{S}_\alpha(A'_1) = \{Q_{\alpha_1}^{A'_1}, Q_{\alpha_2}^{A'_1}, \dots, Q_{\alpha_r}^{A'_1}\}, \hat{S}_\alpha(A'_2) = \{Q_{\alpha_1}^{A'_2}, Q_{\alpha_2}^{A'_2}, \dots, Q_{\alpha_s}^{A'_2}\},$$

причому

$$A'_1 = \bigcup_{k=1}^r Q_{\alpha_k}^{A'_1}, Q_{\alpha_l}^{A'_1} \cap Q_{\alpha_m}^{A'_1} = \emptyset, \quad \forall l \neq m,$$

$$\mu_{\hat{S}_\alpha}(x'_i, x'_i) > \max_y \{ \mu_{\hat{S}_\alpha}(x'_i, y), \mu_{\hat{S}_\alpha}(x'_i, y) \}, \quad \forall y \in A'_1 \setminus Q_{\alpha_1}^{A'_1},$$

$$\forall x'_i, x'_i \in Q_{\alpha_i}^{A'_1}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

та

$$A'_2 = \bigcup_{k=1}^s Q_{\alpha_k}^{A'_2}, Q_{\alpha_l}^{A'_2} \cap Q_{\alpha_m}^{A'_2} = \emptyset, \quad \forall l \neq m,$$

$$\mu_{\hat{S}_\alpha}(x'_t, x'_t) > \max_y \{ \mu_{\hat{S}_\alpha}(x'_t, y), \mu_{\hat{S}_\alpha}(x'_t, y) \},$$

$$\forall y \in A'_2 \setminus Q_{\alpha_t}^{A'_2}, \quad \forall x'_t, x'_t \in Q_{\alpha_t}^{A'_2}, \quad t = 1 - s.$$

Надаючи α ($\alpha \in [0, 1]$) різних значень, отримаємо множину класифікацій A'_1 . Аналогічно отримуємо A'_2 .

Нехай $T(A'_1) = \{ \hat{S}_\alpha(A'_1) \}_{\alpha \in [0, 1]}$ та $T(A'_2) = \{ \hat{S}_\alpha(A'_2) \}_{\alpha \in [0, 1]}$. Розглянемо відображення

$$P: T(A'_1) \times T(A'_2) \rightarrow R^+, \quad \text{де}$$

$$P(\hat{S}_\alpha(A'_1), \hat{S}_\alpha(A'_2)) = 4[\Delta Q / (r + k)]^2,$$

/15/

$\hat{S}_\alpha(A'_1) \in T(A'_1), \hat{S}_\alpha(A'_2) \in T(A'_2), r, k$ - кількість класів, на які алгоритм класифікації $\hat{S}_\alpha$ розбиває множини A'_1 та A'_2 .

ΔQ – кількість подібних класів у класифікаціях $\hat{S}_\alpha(A'_1)$ та $\hat{S}_\alpha(A'_2)$.

Означення 5. Клас $Q_{\alpha_1}^{A'_1}$ називається подібним до класу $Q_{\alpha_2}^{A'_2}$, якщо між їх елементами можна встановити таке бієктивне відображення, що для будь-якого $x_i^{A'_1} \in Q_{\alpha_1}^{A'_1}$ існує $x_j^{A'_2} \in Q_{\alpha_2}^{A'_2}$ такий, що $(x_i^{A'_1}, x_j^{A'_2}) \in B$ і навпаки, для будь-якого $x_j^{A'_2} \in Q_{\alpha_2}^{A'_2}$ існує $x_i^{A'_1} \in Q_{\alpha_1}^{A'_1}$ такий, що $(x_i^{A'_1}, x_j^{A'_2}) \in B$.

Твердження 3. Відображення $F: T(A'_1) \times T(A'_2) \rightarrow R^+$ є мірою подібності між елементами множин $T(A'_1)$ та $T(A'_2)$ і $0 < P \leq 1$.

Із означення P випливає, що $P(\hat{S}_\alpha(A'_1), \hat{S}_\alpha(A'_2)) = P(\hat{S}_\alpha(A'_2), \hat{S}_\alpha(A'_1))$. Враховуючи, що $\Delta Q \leq r$ і $\Delta Q \leq k$, отримуємо $0 < P \leq 1$.

2. Розв'язування задачі класифікації

Нехай M – множина початкових даних, які описані за допомогою шкали порядку та шкали найменувань. Розглянемо задачу класифікації, що полягає у знаходженні оптимального алгоритму класифікації $\hat{S}_{\text{опт}}$, який задовольняє такі умови. По-перше, розбиває множину M на класи $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$, що не перетинаються / t – наперед невідоме, а

$$M = \bigcup_{i=1}^k Q_i, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

причому міра подібності між елементами одного класу має бути більшою порівняно з мірою їх подібності до елементів інших класів. По-друге, алгоритм класифікації надає мірі подібності /15/ максимуму.

Розв'язування задачі проведемо за методом групового визначення аргументів МГВА/[2], який передбачає створення множини алгоритмів класифікації та організацію їх перегляду, внаслідок чого отримується оптимальний алгоритм. Критерієм оптимальності виступає друга умова задачі, яка вимагає, щоби на подібних множинах оптимальний алгоритм здійснював близькі класифікації.

Згідно п. 1 нашої праці побудуємо на M нечітке транзитивне відношення подібності $\hat{S}$, його функцію належності $\mu_{\hat{S}}$ та його α рівні. Нехай нечіткому відношенню $\hat{S}$ відповідає матриця

F з елементами f_{ij} , причому $0 \leq f_{ij} \leq 1, 1 \leq i, j \leq m$. Впорядкуємо різні елементи F за зростанням

$$q_1 < q_2 < \dots < q_r, \quad /16/$$

де

$$q_1 = \min_{ij} f_{ij}, \quad q_2 = \max_{ij} f_{ij} = 1.$$

Надаючи послідовно α всі значення з /16/, отримаємо множину алгоритмів класифікації $\{\hat{S}_\alpha\}$ множини M . До $\{\hat{S}_\alpha\}$ не будемо включати $\hat{S}_{q_1}$ та $\hat{S}_{q_r}$, оскільки вони проводять тривіальну класифікацію, яка не дає жодної нової інформації відносно структури множини M .

Як показано в п. I, кожен $\hat{S}_\alpha$ розбиває M на класи, які задовольняють першу умову, причому міра подібності між елементами кожного класу дорівнює або є більшою від α . Для розв'язку задачі залишилось виділити з множини $\{\hat{S}_\alpha\}$ такий оптимальний алгоритм, який надає максимуму мірі подібності /15/.

З [2] випливає, що критерії вигляду /15/ виконуються, як правило, на декількох класифікаціях, серед яких є й оптимальна. В такому випадку розв'язок задачі є неоднозначним, і ми маємо некоректну задачу. Позначимо через E множину тих значень із послідовності /16/, для яких класифікації $\hat{S}_\alpha$ надають максимуму мірі подібності /15/. Для виділення єдиного і стійкого розв'язку скористаємося згідно з [5], регуляризациєю. Для цього додамо до міри подібності /15/ деякий стабілітрон, що надає можливість створити згладжувачий критерій.

Для побудови стабілітрона проведемо обмін між A'_1 та A'_2 елементами декількох пар. В результаті отримаємо нові підмножини A_1^2 та A_2^2 . Застосовуючи аналогічну процедуру з елементами інших пар, отримаємо нові підмножини A_1^3 та $A_2^3 \dots A_1^l$ та A_2^l ($M = A_1^l \cup A_2^l$). Введемо відображення

$$P = 1/(l-1) \sum_{k=2}^l P(\hat{S}_\alpha(A_1^k), \hat{S}_\alpha(A_2^k)), \quad /17/$$

яке є мірою подібності та яке будемо називати стабілітроном. Тоді згладжувачий критерій матиме вигляд

$$R = P(\hat{S}_\alpha(A'_1), \hat{S}_\alpha(A'_2)) + P \rightarrow \max. \quad /18/$$

У [2] вказано, що критерії вигляду /18/ досягають свого максимуму тільки на одній класифікації. В [17] практично треба взяти лише декілька доданків.

Використовуючи таку методику, внаслідок перебору множини алгоритмів $\{\hat{S}_\alpha\}_{\alpha \in E}$ можемо знайти такий алгоритм $\hat{S}_{\alpha_{opt}}$, який задовольняє /18/. Знайдена класифікація й буде розв'язком нашої задачі.

Запропонований підхід зі застосуванням методів теорії нечітких множин при використанні МГВА для розв'язку задачі класифікації дає змогу зменшити перебір з 2^m ($m = \text{card} M$) до величини, що не перебільшує $m(m-3)/2$ і суттєво зменшити обсяг обчислень.

Даний метод класифікації рекомендується застосовувати для розбиття множини початкових даних M , що описані за допомогою шкали найменувань і шкали порядку на подібні класи з невизначеною наперед їх кількістю у випадку, коли $n > m$.

1. А в е р к и н А.Н., Б а т ы р ш и н И.З., В л и ш у н А.Ф. и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М., 1986. 2. И в а х н е н к о А.Г. Метод последовательного опробования /перебора/ кластеризаций-кандидатов по критериям дифференциального типа // Распознавание, классификация, прогноз. 1989. Вып. 2. 3. К о ф м а н А. Введение в теорию нечетких множеств. М., 1982. 4. П р е п а р а т а Ф., Ш л е й м о с М. Вычислительная геометрия: Введение. М., 1989. 5. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.

Стаття надійшла до редколегії 30.04.91

Р.М.Пасічник, Б.А.Остудін

ПОРІВНЯННЯ ДВОХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ
ПЕРШОГО РОДУ ТИПУ ХВИЛЬОВОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Нехай потрібно знайти функцію $q(y, t)$, яка задовольняє інтегральне рівняння /1/

$$\iint_S q(y, t - r_{xy}) Q(t - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = f(x, t) \quad x \in S \quad /1/$$

при умовах:

$$f(x, 0) = f'_x(x, 0) = 0 \quad x \in S; \quad /2/$$

$$|f(x, \infty)| < \infty \quad x \in S, \quad /3/$$

де t - часова змінна у безрозмірній системі координат; x, y - точки тривимірного евклідового простору R^3 ; $\theta(t)$ - функція Хевісайда; S - деяка Ляпуновська розімкнута або замкнута поверхня; $f(x, t)$ - деяка неперервно-диференційована за змінною t та неперервно-диференційована за Гельдером за змінною x функція.

Згідно з [7] ця задача еквівалентна початково-крайовій задачі для хвильового рівняння з граничною умовою типу Діріхле на поверхні S . При цьому функція f відіграє роль граничної умови, а співвідношення /2/ виражає умову узгодженості. Вказана початково-крайова задача має важливі застосування, зокрема при моделюванні акустичних процесів. Її розв'язок пов'язаний з розв'язком $q(x, t)$ задачі /1/-/3/ за поданням

$$u(x, t) = \iint_S q(y, t - r_{xy}) \theta(t - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y \quad x \in R^3 \setminus S. \quad /4/$$

Це подання та співвідношення /1/-/3/ є універсальними, оскільки вони справедливі як для замкнутої, так і розімкнутої поверхні S .

Методи, що застосовуються до розв'язання нестационарних задач, передбачають виділення двох етапів: переходу від нестационарної задачі до послідовності стаціонарних /етап стаціонаризації/, а також етапу розв'язання послідовності стаціонарних задач. Для порівняльного дослідження методів стаціонаризації ми вибрали методи кусково-лінійної апроксимації за часовою змінною [3] та інтегральних перетворень Чебишева-Лагерра [2], [5], які належать до таких двох великих груп, як проєкційні методи за часовою змінною та інтеграль-

них перетворень. Перший метод з групи проєкційних виділяється простотою, а другий – легкістю побудови оригіналу.

Розглянемо детальніше процес стаціонаризації за допомогою методу перетворень Чебишева-Лагерра. Застосовуємо до IP /1/ інтегральні перетворення Чебишева-Лагерра з ядрами вигляду $e^{-\lambda t} L_n(\lambda t)$ на інтервалі від 0 до ∞ , де $L_n(t)$ – поліном Чебишева-Лагерра степеня n , λ – деякий числовий параметр. Використовуючи властивості поліномів Чебишева-Лагерра, результат перетворень можемо записати у вигляді / [5], [6] /:

$$\int_S e^{-\lambda r_{xy}} r_{xy}^{-1} Q_n^\lambda(y) dS_y = G_n^\lambda(x) \quad n = \overline{0, N} \quad x \in S,$$

$$G_n^\lambda(x) = \begin{cases} F_0^\lambda(x) & n=0, \\ F_n^\lambda(x) - \int_S e^{-\lambda r_{xy}} r_{xy}^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-m}(\lambda r_{xy}) Q_m^\lambda(y) dS_y & n \neq 0, \end{cases} \quad /5/$$

$$F_n^\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} L_n(\lambda t) f(x, t) dt,$$

$$Q_n^\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} L_n(\lambda t) q(x, t) dt,$$

$$C_{n-m}(\lambda) = L_{n-m}(\lambda) - L_{n-m-1}(\lambda).$$

Завдяки ортогональності та повноті системи поліномів Чебишева-Лагерра отримуємо наближену рівність для побудови шуканої функції $q(x, t)$

$$q(x, t) \approx \lambda \sum_{n=0}^N Q_n^\lambda(x) L_n(\lambda t). \quad /6/$$

Рівність /6/ перетворюється в точну при $N \rightarrow \infty$. Встановимо умови рівномірності такого припущення. Припустимо, що задача /1/-/3/ поставлена коректно. Оскільки функція $f(x, t)$ обмежена при $t \rightarrow \infty$, то й густина $q(x, t)$ у регулярних точках поверхні S повинна мати таку ж властивість. З цього випливає, що добуток $(q'(y, t))^2 t$ обмежений при $t \rightarrow \infty$ і що інтеграли

$$\int_0^\infty e^{-t} q^2(y, t) dt, \quad \int_0^\infty [q'(y, t)]^2 t e^{-t} dt$$

збіжні в регулярних точках S . А цього досить [4], щоб ряд у правій частині рівності /6/ при $N \rightarrow \infty$ збігався до шуканої густини рівномірно за t на довільному відрізку $[t_1, t_2] \subset [0, \infty)$

у регулярних точках поверхні S . Таким чином, розв'язавши послідовність стаціонарних ІР /5/ відносно $Q_n^{\infty}(y)$ за допомогою формули /6/ можемо знайти наближене значення шуканої густини.

Розглянемо процес стаціонаризації за допомогою методу кусково-лінійної апроксимації та колокації за часовою змінною. Будемо шукати розв'язок ІР /I/ на деякому скінченному часовому інтервалі $[0, T]$. Покриємо цей інтервал рівномірною сіткою з кроком h_t . Невідому густину $q(x, t)$ апроксимуємо за допомогою кусково-лінійних функцій:

$$q(x, t) \approx Q^{\kappa, l}(x) \Phi_{t, \kappa}^l(t) + Q^{\kappa}(x) \Phi_{t, \kappa}^0(t) \quad t \in [t_{\kappa}, t_{\kappa+1}], \kappa = \overline{1, n_t}, /7/$$

$$\Phi_{t, \kappa}^l(t) = \begin{cases} \frac{t_{\kappa+1} - t}{h_t} & l=0, \\ \frac{t - t_{\kappa}}{h_t} & l=1 \end{cases} \quad t \in [t_{\kappa}, t_{\kappa+1}],$$

$$Q^{\kappa}(x) = q(x, t_{\kappa}), \quad t_{\kappa} = (\kappa - 1) h_t.$$

Зі співвідношення $f'_t(x, 0) = 0$ та властивості хвильового потенціалу простого шару $[I]$ випливає, що $q(y, 0) = Q(y) = 0$. Для довільної точки $x \in S$ визначимо допоміжне розбиття поверхні S :

$$S_1(x) = \{y \in S \mid r_{xy} \leq h_t\}, \quad S_2(x) = S \setminus S_1(x).$$

Неважко помітити, що множина $S_1(x)$ включає ті точки поверхні S , для яких значення запізнюючого часового аргумента $t_{n+1} - r_{xy}$ при довільному значенні n не виходить за межі інтервалу $[t_n, t_{n+1}]$. Вимагаючи задоволення ІР /I/ лише у вузлах часової сітки w_t доходимо до наступної послідовності стаціонарних ІР:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1(x)} Q^{n+1}(y) \Phi_{t, n}^l(t_{n+1} - r_{xy}) \theta(t_{n+1} - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y &= G(x, t_{n+1}) \quad x \in S, n = \overline{1, n_t} \\ /8/ \\ G(x, t_{n+1}) &= \begin{cases} f(x, t_2) & n=1, \\ f(x, t_{n+1}) - \iint_{S_1(x)} Q^n(y) \Phi_{t, n}^0(t_{n+1} - r_{xy}) \theta(t_{n+1} - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y - \\ - \sum_{l=1}^1 \iint_{S_2(x)} Q^{\kappa, l}(y) \Phi_{t, \kappa}^l(t_{n+1} - r_{xy}) \theta(t_{n+1} - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y & n \neq 1, \end{cases} \\ \kappa = \left[\frac{t_{n+1} - r_{xy}}{h_t} \right], & \quad - 75 - \quad Q^1(y) = 0 \end{aligned}$$

Розв'язавши отриману послідовність стаціонарних ІР відносно функцій $\Phi^0(x)$ шукану густину будуюмо за допомогою співвідношення /7/.

Таким чином, використання вказаних методів дає змогу задачу /1/-/3/ звести до послідовностей стаціонарних ІР вигляду /5/ або /6/ зі слабкими особливостями в ядрах. Подальший шлях розв'язання цих стаціонарних ІР подібний і відбувається за допомогою методу колокації та кусково-лінійної апроксимації по просторових змінних [5], [6]. В результаті приходимо до послідовностей систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Кожна з систем такої послідовності відрізняється від інших лише правою частиною, для обчислення якої використовуються коефіцієнти апроксимації густини $\varphi(x, t)$, знайдені на попередніх кроках. Тому, щоб уникнути перерахунків, матрицю систем доцільно розкласти на добуток матриць. Із цієї ж метою заздалегідь обчислюються допоміжні вектори, які дають змогу формувати праві частини систем лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи скалярні добутки цих векторів на коефіцієнти апроксимації густини. При організації цих обчислень виявляються суттєві відмінності між розглядуваними методами. Особливість методу перетворень Чебишева-Лагерра полягає в усуненні запізнення за змінною t , за рахунок чого спрощується алгоритм формування матриці й допоміжних векторів порівняно з методом часової колокації. Однак матриця й допоміжні вектори останнього методу є розрідженими, і тому містять значно менше ненульових коефіцієнтів, ніж аналогічні структури методу Чебишева-Лагерра.

Розв'язання стаціонарних задач за допомогою методу колокації дає змогу проводити апостеріорну оцінку похибки задоволення граничної умови задачі по нев'язці ІР /1/ у точках, які не збігаються з колокаційними. Оскільки решта умов висхідної початково-крайової задачі за поданням /4/ задовольняються точно, то вказана похибка і характеризуватиме точність побудованого розв'язку. Така характеристика використовується при розв'язанні більшості задач, для яких не побудовано аналітичних розв'язків.

Описані методи реалізовані для осесиметричного випадку у вигляді прикладних програм, що дало змогу експериментально зіставити їхню ефективність на розв'язанні ряду задач. При розв'язанні цих задач використовувалось 30 просторових точок колокації, а для достатньої точності апроксимації розв'язку методом перетворень Чебишева-Лагерра - поліноми Чебишева-Лагерра до 30-го порядку /№ 30/. Було також встановлено, що підбір оптимальних значень параметрів α

/у методі інтегральних перетворень/ та h_t /у методі кусково-лінійної апроксимації/ дає змогу покращити точність задоволення граничної умови.

П р и к л а д 1. Розглянемо модельну задачу, коли межа поверхні S - сфера одиничного радіуса, гранична функція $f_2(t)$ не залежить від просторової змінної, а її часовим профілем є B -сплайн одиничної амплітуди й тривалості d . У цьому випадку розв'язок початково-крайової задачі з граничною умовою типу Діріхле визначається за формулою

$$u(x, t) = f_1(t - |x| + 1)/|x|.$$

Результати обчислень зведемо у таблицю.

Таблиця I

d	α	n_t	R	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$	R	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$
8	1	24	0,1	860	7	10	86	1
4	2	25	0,1	4300	260	10	420	21
1	-	17	0,1	-	1200	10	-	170

Тут d - тривалість граничного імпульсу; R - відстань точки спостереження від межевої поверхні; $u_{ан}$ - аналітичний розв'язок; u_1, ε_1 - наближений розв'язок та похибка методу перетворень Чебишева-Лагерра; u_2, ε_2 - розв'язок та похибка методу кусково-лінійної апроксимації.

П р и к л а д 2. Граничною поверхнею для цієї задачі служить диск одиничного радіуса. Гранична функція $f_2(t)$ знову не залежить від просторової змінної, але не є фінітною: на часовому інтервалі $[0, 2]$ вона є лівою половиною одиничного B - сплайна тривалості 4, а при $t \geq 2$ - тотожно дорівнює 1. Розв'язок цієї задачі зіставляється з аналітичним розв'язком стаціонарної задачі Діріхле для рівняння Лапласа при тій же межевій поверхні та граничній функції, що тотожно дорівнює 1. Цей аналітичний розв'язок задається формулою

$$u_{ан}(r, z) = \frac{2R_0}{\pi} \arcsin \left[\frac{2R_0}{\sqrt{(R_0 - r)^2 + z^2} + \sqrt{(R_0 + r)^2 + z^2}} \right],$$

де R_0 - радіус диска; (r, z) - координати точки спостереження у циліндричній системі координат. Порівняння нестационарного розв'язку з аналітичним дає змогу спостерігати процес виходу розв'язку на стаціонарний режим. При побудові наближених розв'язків встановлено такі оптимальні значення параметрів: $\alpha = 2$, $n_t = 30$.

Таблиця 2

Порівняння наближених розв'язків з аналітичним у точці $/r = 0, z = 1/$, розташованій на осі симетрії

t	$u_{\text{ан}}$	u_1	u_2	$\varepsilon_1 \cdot 10^3$	$\varepsilon_2 \cdot 10^3$
4,0	0,5	0,49	0,496	10	4
4,5	0,5	0,512	0,500	12	0
5,0	0,5	0,507	0,501	7	1
5,5	0,5	0,501	0,503	1	3
6,0	0,5	0,514	0,502	14	2
6,5	0,5	0,515	0,499	15	1
7,0	0,5	0,495	0,501	5	1

П р и к л а д 3. Межовою поверхнею наступної задачі є сфера одиничного радіуса, з центром у початку координат, яка містить круглий отвір. При цьому краї отвору із центра сфери видно під кутом 45° . Гранична функція знову не залежить від просторової координати, а за часовою змінною становить В-сплайн тривалості 8 з одиничною амплітудою. Максимальні похибки задоволення граничної умови контролювались на часовому інтервалі $[0,12]$ і становили $\varepsilon_1 = 0,014$, $\varepsilon_2 = 0,007$.

Щоб повністю порівняти ефективність методів, слід врахувати, що метод апроксимації та колокації при розв'язанні наведених задач вимагав значно менше /на порядок/ машинного часу, ніж метод перетворень. Отже, і за точністю, і за економією машинного часу, метод апроксимації та колокації переважає над методом перетворень Чебишева-Лагерра, а тому перший з них доцільніше використовувати при розв'язанні складніших, зокрема суттєво-просторових задач.

Таким чином, розглянуто два методи розв'язання задачі /1/-/3/ д. IP першого роду типу хвильового потенціалу: метод інтегральних перетворень та метод кусково-лінійної часової апроксимації і колокації. Обидва методи дають змогу розв'язувати задачу для широкого класу поверхонь складної форми. При зіставленні ефективності методів при розв'язанні ряду модельних задач можна дійти висновку про значно більшу ефективність методу кусково-лінійної апроксимації та рекомендувати його для розв'язання задач із складнішими межовими поверхнями.

І. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. М., 1961. 2. Г а л а з ю к В.А. Метод полиномов Чебышева-Лагерра в смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения вто-

рого порядку с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 1. С. 3-6. 3. Г л а д к о в А.А. Численное решение задач о применении интегральных уравнений для волновых поверхностных потенциалов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т. 20. № 2. С. 522-528. 4. Н и к и ф о р о в А.Ф., В в а р о в В.Б. Специальные функции математической физики. М., 1984. 5. О с т у д и н В.А., П а с и ч н и к Р.М. Использование метода граничных интегральных уравнений для определения акустического поля, отраженного от мягкой осесимметричной оболочки // Волны и дифракция: Мат. IX Всесоюз. симпозиум по дифракции и распространению волн. Тбилиси, 1985. Т. I. С. 125-128. 6. О с т у д и н В.А., П а с и ч н и к Р.М. Численное решение осесимметричной задачи Дирихле для волнов. уравнения методом интегральных преобразований. Львов, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 2179-Укр86. 7. П а с и ч н и к Р.М. Численное решение смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.91

УДК 518.5

В.О. Попов

РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ /ВЛАСТИВОСТІ ТА АЛГОРИТМИ/

Для одночасного точного та швидкого обчислення на ЕОМ різноманітних функцій $f(x) \in C^{m+2}[a, b]$ необхідно розділити проміжок наближення $[a, b]$ на r частин точками $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$ та знайти на кожній з цих частин $[z_{i-1}, z_i]$, $i = \overline{1, r}$ свій вираз

$$F(A_i, x) = F(a_c^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}, x).$$

Найменша максимальна похибка μ на всьому проміжку $[a, b]$ при цьому одержується тоді, коли максимальні похибки μ_i :

$$\mu_i = \inf_{A_i} \max_{x \in [z_{i-1}, z_i]} |f(x) - F(A_i, x)| / w(x), \quad i = \overline{1, r}$$

на кожній з частин $[z_{i-1}, z_i]$ проміжка $[a, b]$ рівні між собою:

$$\mu_i = \mu. \text{ Тут } w(x) \in C[a, b], w(x) \neq 0 - \text{ вага наближення.}$$

Таке наближення зовемо рівномірним наближенням чебишовськими сплайнами. Наближення має $M = (m+2)r - 1$ невідомих параметрів: $(m+1)r$ - це параметри $\{A_i\}_{i=1}^r$ виразів $F(A_i, x)$, $i = \overline{1, r}$, що наближають функцію $f(x)$ та $(r-1)$ - вузли $z = \{z_i\}_{i=1}^{r-1}$ сплайна $S(x)$. Донедавна усі вказані невідомі знаходилися внаслідок багато-

разомого розв'язування M нелінійних рівнянь з M невідомими. Відповідні методи не одержали розповсюдження через значні труднощі при обчисленні.

Встановлено [1], що якщо при $x \in [a, b]$ $f(x) \in C^{m+2}[a, b]$, $F(A, x) \in C^{m+1}[a, b]$, $w(x) \in C^1[a, b]$, $w(x) \neq 0$ та

$$\eta(f, F) = \eta(f(x), F = f^{(m+1)}(x) - F^{(m+1)}(A, x) \neq 0, \quad /1/$$

то при $r \rightarrow \infty$ похибка

$$R = \frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1} (m+1)!} \left(\int_a^b |\eta(f, F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}} dx \right)^{m+1} \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right) \right]. \quad /2/$$

Функцію /1/ називаємо ядром наближення функції $f(x)$ за допомогою виразу $F(A, x)$.

Формула /2/ формально дає змогу вибрати той вираз $F(A, x)$ із деякого набору, при якому досягається найменша похибка при заданій кількості параметрів. Для цього необхідно мати аналітичні вирази для ядер, що не залежать від параметрів. Відомо, що для многочлена $P_m(x)$ зі степенем m ядро $\eta(f, P_m) = f^{(m+1)}(x)$. Вирази для ядер в інших випадках значно складніші. В основу їх знаходження покладено встановлені загальні властивості ядер [1].

1. Нехай $F(A, x) = \Phi(b, x) = \Phi(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}; x)$. Тоді

$$\eta(f, \Phi) = \eta(f, F) = \eta(f, F).$$

2. Нехай $g(x) \in C^{m+2}[a, b]$, $g(x)f(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$. Тоді

$$\eta(f, gF) = g(x)\eta(f/g, F).$$

3. Нехай $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$. Тоді

$$\eta(f, \exp f) = f(x)\eta(\ln f, F).$$

4. Нехай $F(A, x) > 0$ при $x \in [a, b]$. Тоді

$$\eta(f, \ln F) = \exp(-f(x))\eta(\exp f, F).$$

5. Нехай $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, α - дійсне число. Тоді

$$\eta(f, F^\alpha) = \alpha f(x)^{1-\alpha} \eta(f^{1/\alpha}, F).$$

6. Нехай $F_p(A, x) = F(A, x^p)$, де p - ціле число. Тоді

$$\eta(f, F_p) = (P(x))^{m+1} \eta(f(t^{1/p}), F) \Big|_{t=x^p}$$

Щоб одержати конкретні вирази для $\eta(f, F_p)$ необхідно у формулу для ядра $\eta(f(x), F)$ підставити $f(t^{1/p})$ замість $f(x)$, узяти всі похідні й далі замінити t на x^p .

За допомогою перелічених, а також і деяких інших властивостей ядер наближень можна знайти аналітичні вирази ядер багатьох набли-

жених виразів. Так ядро наближення за допомогою раціонального многочлена $R_{k,l}(x)$, чисельник якого - многочлен степеня k , а знаменник - многочлен степеня l ($m = k + l$), має вигляд

$$\eta_{k,l}(f) = \eta(f, R_{k,l}) = (m+1)! \Delta_{k+1,l+1}(f) / \Delta_{k,l}(f),$$

$$\Delta_{k,l}(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } l \leq 0 \\ \begin{vmatrix} C_{k+1-l} & C_{k+2-l} & \dots & C_k \\ C_{k+2-l} & C_{k+3-l} & \dots & C_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_k & C_{k+1} & \dots & C_{k+l-1} \end{vmatrix} & \text{при } l > 0, \end{cases}$$

$$C_s = C_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < 0 \\ f^{(s)}(x) / s! & \text{при } s \geq 0; \end{cases}$$

ядро наближення $\eta(f, V_m)$ за допомогою многочлена за степенями p / p , s - цілі числа/

$$V_m(x) = x^3 \sum_{i=0}^m a_i x^{ip}$$

вирається за рекурентним співвідношенням

$$\eta(f, V_m) = x^{(p-1)m+s} \mathfrak{a}_m(f), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{де } \mathfrak{a}_{-1}(f) = f(x) x^{p-1-s}, \mathfrak{a}_m(f) = (\mathfrak{a}_{m-1}(f) x^{1-p})', \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

Ядро наближення $\eta(f, E_m)$ за допомогою суми многочлена та експонент

$$E_m(x) = A e^{Vx} + \sum_{i=2}^m a_i x^{i-2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

вирається за формулою

$$\eta(f, E_m) = f^{(m+1)}(x) - f^{(m)}(x)^2 / f^{(m-1)}(x).$$

Аналітичні вирази ядер одержані також для багатьох інших нелінійних наближень, способи знаходження параметрів яких описано у працях [1, 2]. Для виведення виразів ядер доцільно користуватися системами для аналітичних перетворень на ЕОМ [4].

Нехтуючи останнім співмножником у формулі /2/, переходимо до асимптотично рівномірного наближення, тобто до такого наближення,

що для нього справедливе $\mu_i = \mu \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right) \right]$ при $i = \overline{1, r}$. Для асимптотично рівномірного наближення вузли Z чебишовського сплайна задовольняють систему рівнянь

$$i \int_a^b |\eta(t, F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}} dx = r \int_a^b |\eta(t, F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}} dx, \quad i = \overline{0, r}. \quad /3/$$

Кожне із цих рівнянь може розв'язуватись незалежно від інших, воно містить тільки одне невідоме Z_i . Побудовані обчислювальні алгоритми для розв'язання рівняння /3/. Далі за відомими алгоритмами [1, 2] можна знайти параметри кожного із r наближень $F(A_i, x)$.

Використовуючи алгоритми [2] для знаходження параметрів найкращих чебишовських наближень різними виразами $F(A, x)$ відповідні аналітичні вирази для ядер наближень [1] та формулу /2/ і рівняння /3/ можна побудувати пакет програм для рівномірного наближення чебишовськими сплайнами гладких функцій. У пакет входить також вибір виду ланок сплайна при наближенні із набору можливих, що дає найменшу похибку і не передбачає фактичної побудови наближень.

Розроблені обчислювальні алгоритми для побудови аналогічного пакета для наближення негладких функцій та функцій заданих у вигляді таблиць [1-3]. Такий пакет не використовує вирази /2/ та /3/, і тому розв'язування задач із його допомогою вимагає значно більше часу ЕОМ.

Вирази /2/ та /3/ особливо корисні для знаходження наближень математичних функцій [4]. У деяких важливих випадках на основі цих формул вдається одержати прості аналітичні вирази для похибки μ та вузлів чебишовських сплайнів Z . Так при рівномірному наближенні показникової функції $f(x) = e^{\alpha x}$ ($\alpha \neq 0, c > 0, c \neq 1$) на проміжку $[a, b]$ при $w(x) = 1$ чебишовськими раціональними сплайнами з r ланками

$$\mu = \frac{(m+1)^{m+1} k! l!}{2^{2m+1} m! (m+1)! r^{m+1}} \left| C^{\frac{ab}{m+1}} - C^{\frac{aa}{m+1}} \right|^{m+1} \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right) \right]; \quad /4/$$

$$Z_i = \frac{m+1}{\alpha \ln c} \ln \left[\frac{r-i}{r} C^{\frac{ab}{m+1}} + \frac{i}{r} C^{\frac{aa}{m+1}} \right], \quad i = \overline{0, r}. \quad /5/$$

Для $f(x) = C^{\alpha x}$ при $w(x) = f(x)$ похибка

$$\mu = \frac{k! l! (\alpha \ln c)^{m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)! r^{m+1}} (b-a)^{m+1} \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right) \right], \quad /6/$$

а вузли Z_i ділять проміжок $[a, b]$ на рівні частини.

Із рівностей /4/ та /6/ випливає, що у розглянутих випадках найменша похибка μ при сталій кількості $m+1$ параметрів одержується, якщо $k = \ell$ або $k = \ell + 1$.

Вирази, аналогічні до формул /4/-/6/, одержані для ряду інших математичних функцій. Із їх використанням одержані параметри багатьох раціональних та нелінійних асимптотично рівномірних наближень сплайнами. Деякі з них подано у довіднику [3]. При цьому у більшості випадків із точністю до трьох-чотирьох значущих цифр $\mu_k = \max \mu_i = \min \mu_i$. Подамо результати знаходження похибок рівномірного чебишовського раціонального наближення функції e^x на проміжку $[0, 1]$ при $w(x) = 1$ для різних k та ℓ . Вузли сплайнів знайдені за формулою /5/. Верхня цифра у кожній клітці таблиці - μ , нижня величина, визначена за формулою /4/.

$k \backslash \ell$	2	4	8	16	32
1,0	2,631/-2/ 2,631/-2/	6,565/-3/ 6,569/-3/	1,641/-3/ 1,641/-3/	4,102/-4/ 4,102/-4/	1,025/-4/ 1,025/-4/
2,0	1,087/-3/ 1,088/-3/	1,357/-4/ 1,360/-4/	1,696/-5/ 1,701/-5/	2,119/-6/ 2,126/-6/	2,649/-7/ 2,649/-7/
3,0	3,381/-5/ 3,389/-5/	2,111/-6/ 2,118/-6/	1,319/-7/ 1,324/-7/	8,242/-9/ 8,275/-9/	- -
1,1	5,414/-4/ 5,442/-4/	6,787/-5/ 6,803/-5/	8,488/-6/ 8,503/-6/	1,061/-6/ 1,063/-6/	1,326/-7/ 1,329/-7/
2,1	1,124/-5/ 1,130/-5/	7,032/-7/ 7,061/-7/	4,396/-8/ 4,413/-8/	2,748/-9/ 2,758/-9/	- -
2,2	1,399/-7/ 1,409/-7/	4,380/-9/ 4,404/-9/	1,370/-10/ 1,376/-10/	4,283/-12/ 4,301/-12/	- -

Числові дані таблиці показують, що асимптотично рівномірне наближення практично не відрізняється від рівномірного.

Можливі деякі узагальнення введеного поняття рівномірного наближення нелінійними сплайнами. Ефективність рівномірного наближення зростає при можливості вибору виду сплайна на кожній ланці з S можливих. При цьому приходимо до рівномірного наближення P -сплайнами, котре вводиться аналогічно до рівномірного наближення нелінійними сплайнами і відрізняється від останнього тим, що на кожній ланці використовується той із можливих виразів, що дає найменшу похиб-

ку. Застосування рівномірного наближення P - сплайнами особливо доцільно у тих випадках, коли наближувані функції мають різний характер зміни на різних частинах проміжку наближення. Такими, наприклад, є функції Бесселя.

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К., 1989.
2. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. К., 1980. 3. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. К., 1984. 4. Попов Б.О., Монцибович Б.Р. Розв'язування задач на машинах для інженерних розрахунків. К., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.91

УДК 517.944.947

М.Д.Мартиненко, Х.С.Басьоні

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ДАРБУ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай f, g, φ, ψ - неперервні функції своїх аргументів та, крім того, φ та ψ - неперервно-диференційовані*, а f задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L . В області $\Pi = \{ |x - x_0| \leq H_1, |y - y_0| \leq H_2 \}$ розглянемо задачу Дарбу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= f(u) + g(x, y), \\ u(x_0, y) &= \varphi(y), \quad u(x, y_0) = \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad /1/$$

При зроблених припущеннях задача /1/ має єдиний розв'язок /4/. Нехай $u_0 = u(x_0, y_0) \equiv \varphi(y_0) = \psi(x_0) \neq 0$.

Поставимо у відповідність задачі /1/ виступну лінеаризовану задачу Дарбу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} &= \kappa \tilde{u} + g(x, y), \quad \kappa = \frac{f(u_0)}{u_0}, \\ \tilde{u}(x_0, y) &= \varphi(y), \quad \tilde{u}(x, y_0) = \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad /2/$$

Розв'язок задачі /2/ дає формула [1,2]:

$$u(x, y) = u_0 J_0(\sqrt{\kappa(-\kappa)}(x - x_0)(y - y_0)) +$$

© Мартиненко М.Д., Басьоні Х.С., 1992

* Ця умова не є істотною.

$$\begin{aligned}
& + \int_{y_0}^y \psi'(\eta) J_0 \left(\sqrt{4(-\kappa)(x-x_0)(y-y_0)} \right) d\eta + \\
& + \int_{x_0}^x \psi'(\xi) J_0 \left(\sqrt{4(-\kappa)(\xi-x_0)(y-y_0)} \right) d\xi + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y g(\xi, \eta) J_0 \left(\sqrt{4(-\kappa)(\xi-x_0)(\eta-y_0)} \right) d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

де J_0 - функція Бесселя I-го роду нульового порядку.

Близкість розв'язків задач /1/-/2/ дають такі нерівності:

$$\max_{(x,y) \in \Pi} |u - \tilde{u}| \leq \frac{H_1 H_2 [L + |\frac{f(u_0)}{u_0}|]}{1 - L H_1 H_2} \max_{(x,y) \in \Pi} |\tilde{u} - u_0|, \quad L H_1 H_2 < 1, \quad /4/$$

$$\|u - \tilde{u}\|_A \leq \frac{L + |\frac{f(u_0)}{u_0}|}{A^2 - L} \|\tilde{u} - u_0\|_A, \quad A^2 > L, \quad /5/$$

де

$$\|u\|_A = \max_{(x,y) \in \Pi} \|u\| e^{-A[|x-x_0|+|y-y_0|]}.$$

З а у в а ж е н н я: 1. Лінеаризація /2/ припускає узагальнення на більш загальний клас задач Дарбу. Тут розглянута лише задача /1/ через її важливість для теорії пластичності, нелінійних хвиль, диференціальної геометрії тощо. 2. У ідейному плані ця стаття пов'язана з працями [3,4]. 3. Конкретні приклади чисельної реалізації формули /3/ показують достатню ефективність лінеаризації /2/ при розв'язуванні задачі /1/.

1. Б а б и ч В.М. Линейные уравнения математической физики. М., 1964. 2. М а р т и н е н к о М.Д., Б а с ь ю н і А. Один варіант побудови початкової вилки для задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С. 92-94. 3. М а р т и н е н к о М.Д., Б а с ь ю н і А. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С. 69-72. 4. Т и к о м и Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1937.

Стаття надійшла до редколегії 23.09.91

В.Й.Горбайчук, В.М.Тимошук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Класична теорія наближення функцій оволоділа рядом ефективних методів для дослідження прямих і обернених теорем своєї теорії. Ці методи виявились плідними для якісного дослідження розв'язків крайових задач у плоских канонічних областях. Першими в цьому плані були результати 50-х років І.П.Натансона, О.П.Тімань, Я.Д.Геронімуса, які стосувались оцінок відхилення гармонійних функцій від їх значень на межі в термінах модулів неперервності M_N крайових даних. Їх дослідження підтвердило думку про природну залежність поведінки розв'язків задачі Діріхле від властивостей гладкості функцій, заданих на межі. Ми проводимо дослідження розв'язків більш загальних рівнянь з крайовими даними із різних функціональних класів.

Нехай $u = u(\varphi, r)$ – розв'язок крайової задачі для бігармонійного рівняння $\Delta^2 u = 0$ в одиничному крузі з граничною функцією $f(\varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ і нормальною граничною похідною, що дорівнює нулеві. Позначимо через $H_2^{\omega} L_p[\pi, \pi]$ клас функцій f , M_N другого порядку яких $\omega_2(f; t)$ задовольняє умову $\omega_2(f; t) \leq A \omega(t)$, де $A = \text{const} > 0$, $\omega(t)$, $t > 0$ – функція типу M_N другого порядку. Якщо f – неперервна, то $\|u(\cdot, r) - f(\cdot)\| \leq A_1 \omega(1-r)$, $A_1 = \text{const} > 0$ [7]. С.Канієв [3] досліджував $\|u(\varphi, r) - f(\varphi)\|$ у випадку розривних $f(\varphi)$ з можливими точками φ розриву першого роду. Якщо $W_{\varphi}(\delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(\varphi+t) - 2f(\varphi) + f(\varphi-t)\|$, то справедливе таке уточнення /за порядком/ результату С.Канієва.

Теорема I / [I]/. Якщо точка φ така, що

$$\int_0^{\pi} \frac{W_{\varphi}(t)}{t} dt < \infty,$$

то при $0 < r < 1$

$$\|u(\varphi, r) - f(\varphi)\| \leq C \left[\int_0^{1-r} \frac{W_{\varphi}(t)}{t} dt + (1-r)^2 \int_{1-r}^{\pi} \frac{W_{\varphi}(t)}{t^3} dt \right].$$

Теорема С. Канієва допускає обернення, досліджене в [3, 4].

Теорема 2 [3]. Нехай $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < \infty$, $u(\varphi, r)$ – розв'язок бігармонійної задачі Діріхле. Якщо при деякому фіксованому цілому невід'ємному k виконується нерівність

$$\|u(\cdot, r) - f(\cdot)\| \leq A(1-r)^k \omega(1-r), \quad A = \text{const} > 0, \quad 0 \leq r < 1,$$

де $\omega(t)$, $t > 0$ – функція типу МН другого порядку, яка при $k \geq 1$ задовольняє умову Діні, то $f(\varphi)$ майже для всіх $\varphi \in [-\pi, \pi]$ збігається з функцією, яка має абсолютно неперервну похідну $f^{(k-1)}(\varphi)$ і похідну $f^{(k)} \in L_p[-\pi, \pi]$ /при $p = +\infty$ неперервну/, причому

$$\omega_2(f; t) \leq \begin{cases} A_1(1-r)^2 \int_{1-r}^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du, & k=0, \\ A_2 \left[\int_0^{1-r} \frac{\omega(u)}{u} du + (1-r)^2 \int_{1-r}^1 \frac{\omega(u)}{u^3} du \right], & \text{якщо } k \geq 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \leq r < 1$ де A_1, A_2 – додатні сталі, що не залежать від r .

Важливим моментом у цьому дослідженні є оцінка [3]:

$$\left\| \frac{\partial^k u(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\| \leq M \frac{\|f\|}{(1-r)^k}, \quad 0 \leq r < 1, \quad M = \text{const} > 0,$$

яку розглядаємо як аналог відомих оцінок С.Н.Бернштейна для похідних тригонометричних поліномів. Якщо $f \in H_2^\omega L_p[-\pi, \pi]$, то правильна оцінка

$$\left\| \frac{\partial u(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\| \leq M \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^k}, \quad /1/$$

яка є аналогом теореми Харді – Літтльвуда для L_p -норми похідних функції $u(\varphi, r)$ за дотичним напрямком. Бказані оцінки висвітлюють поведінку похідних функції $u(\varphi, r)$ поблизу межі області. Цілком аналогічні результати одержані для бігармонійних функцій у півплощині.

У [4] для ітерованого рівняння Гельмгольца $(\Delta - c^2)^2 u = 0$ проведено порівняння граничних властивостей розв'язків у півплощині $y > 0$ двох типів крайових задач: задачі Лаурічеллі та задачі Рік'є [5]. Справедливі для обох типів задач повні аналоги оцінок /1/ з ідентичними мажорантами, незважаючи на те, що множина розв'язків задачі Лаурічеллі ширша від множини розв'язків задачі Рік'є для розглядуваного рівняння.

Методом теорії наближення перший з авторів досліджував такі задачі математичної фізики, обернені в причинно-наслідковому відношенні:

I/ задачу відновлення граничних даних у проблемах гармонійного /і бігармонійного/ продовження функції у плоских канонічних областях.

2/ задачу відновлення граничної умови в задачі Ліріхле для рівняння $(\Delta - c^2)u = 0$ у півплощині та в задачі Лауріцеллі для його ітерації;

3/ задачу відновлення початкової умови в задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності тощо.

І. Г о р б а й ч у к В.И. О некоторых граничных свойствах бигармонических функций // Изв. вузов. Математика. 1974. № 12. С. 54-57. 2. Г о р б а й ч у к В.И. Обратные теоремы приближения бигармоническими функциями // Матем. физика. 1976. Вып. 19. С. 73-78. 3. Г о р б а й ч у к В.И., Т и м о щ у к В.Н. Об обратных теоремах приближения бигармоническими функциями // Укр. матем. журн. 1986. Т. 38. № 5. С. 569-575. 4. Г о р б а й ч у к В.И., Т и м о щ у к В.Н. О граничном поведении решений некоторых краевых задач в канонических областях. Приближенные методы решений некоторых задач математ. физики. Луцк, 1990. С. 33-38. Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 915. Ук-90 деп. 5. Г о р б а й ч у к В.И. Умови розв'язності задачі Рік"е для бігармонічного рівняння у півплощині і граничні властивості, розв'язків // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1983. № 7. С. 9-13. 6. К а н и е в С. Локальные отклонения бигармонических в круге функций от их граничных значений // Уч. зап. Казан. ун-та. 1964. Т. 124. Кн. 6. С. 144-147. 7. К а н и е в С. Об отклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 5. С. 995-998.

Стаття надійшла до редакції 30.03.91

УДК 621.865

Р.О.Сорока

ПОБУДОВА ПРОГРАМНИХ РУХІВ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ РОБОТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙНІВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Пономіальні сплайни широко використовуються для побудови програмних рухів маніпуляційних роботів [1,2]. Неперервні механічні характеристики руху дають кубічні сплайни. Проте вимоги проходження сплайну через задані вузли зі заданою швидкістю приводять до появи додаткових умов на його коефіцієнти. Це є однією з причин збільшення порядку сплайну.

Нехай $t_1, t_2, \dots, t_n$ - задані інтервали часу /вузли/, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ і $V_1, V_2, \dots, V_n$ - відповідно значення інтерполяційного полінома та його першої похідної у цих вузлах, неперервного на інтервалі $[t_1, t_n]$ разом зі своїми першою та другою похідними.

Тоді коефіцієнти полінома $Q(q, t) = \sum_{i=0}^n a_i^{(i)} (t_{i+1} - t)^i, i=0, n-1$ повинні задовольняти такі умови при $i=1, n-2$

$$q_i(t_{i+1}) = \theta_{i+1}; \quad \dot{q}_i(t_{i+1}) = V_{i+1}; \quad q_i(t_{i+1}) = q_{i+1}(t_{i+1}),$$

© Сорока Р.О., 1992

$$\dot{q}_i(t_{i+1}) = \dot{q}_{i+1}(t_{i+1}), \quad \ddot{q}_i(t_{i+1}) = \ddot{q}_{i+1}(t_{i+1}).$$

Крім того, $q_1(t_1) = \theta_1$, $q_{n-1}(t_n) = \theta_n$. Таким чином, для визначення $5(n-1)$ коефіцієнтів маємо $5n-8$ умов. Решту можна задати різними способами залежно від конкретної задачі. Як правило, такі системи розв'язуються чисельними методами лінійної алгебри /наприклад, методом прогонки/. Ми одержали коефіцієнти для таких умов:

$$\alpha_1 \dot{q}_1(t_1) + \beta_1 \ddot{q}_1(t_1) = \gamma_1,$$

$$\alpha_2 \dot{q}_{n-1}(t_n) + \beta_2 \ddot{q}_{n-1}(t_n) = \gamma_2,$$

$$\int_{t_1}^{t_n} [\ddot{q}(t)]^2 dt = \min.$$

Тут $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - задані величини, що визначають швидкість або прискорення на одному з кінців інтервалу й умову плавності руху на всьому інтервалі. Даний метод може бути поширений і на інші крайові умови.

І. Зав'язлов Ю.С., Квасов Б.И., Миросниченко В.Л. Метод сплайн-функций. М., 1980. 2. Кириченко Н.Ф., Сорока Р.А., Крак Д.В. Манипуляционные роботы. Алгоритмическое и программное обеспечение средств управления движением. К., 1987.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.91

І.В. Коробчук, О.В.Лисенко

ГЕОМЕТРИЧНА ОЦІНКА ПЕРШОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ
БІГАРМОНІЙНОГО ОПЕРАТОРА У ПРОСТОРІ E^3

Розглянемо метод знаходження першого власного числа задачі

$$\Delta^2 u - \lambda^4 u = 0; \quad /1/$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad /2/$$

що задана в опуклому тілі Ω з гладкою межею $\partial\Omega$. Апроксимуємо тіло зовні многогранником. Нехай Q - точка мінімумів функціоналів

$$B(Q) = \sum_p \frac{S_p}{h_p^3}; \quad B = \min_Q B(Q);$$

$$m(Q) = \sum_p \frac{S_p}{h_p^2}; \quad m = \min_Q m(Q),$$

де S_p - площа p -ї грані многогранника; h_p - відстань від Q до p -ї грані. При переході до сферичних координат (r, θ, φ) з центром в Q з рівняння /1/ отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda^4 = \frac{1}{u} & \left[\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{4}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - \right. \right. \\ & = \operatorname{ctg}^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta (3 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^4 \sin^4 \theta} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \right. \\ & + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \left. \right) + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^4 u}{\partial r^2 \partial \varphi^2} \right) + \\ & \left. + \frac{2}{r^4 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^2 \partial \varphi^2} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^2 \partial \theta} \right) \right], \quad /3/ \end{aligned}$$

де $u \in C^{(4)}[\Omega]$ задовільняє граничні умови /2/.

Введемо функції

$$B_1 = \frac{1}{u} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}; \quad B_2 = \frac{1}{u} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}; \quad B_3 = \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^4};$$

$$B_4 = \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}; \quad B_5 = \frac{1}{u} \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3}; \quad B_6 = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \varphi};$$

$$B_7 = \frac{1}{u} \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}; \quad B_8 = \frac{1}{u} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \varphi^2}; \quad B = \frac{1}{u} \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^2 \partial \theta},$$

які конструктивно будуються. Для цього шляхом з'єднання точки Q з гранями многогранника розбиваємо тіло Ω на частини Ω_p , а проекцією Q на p -ту грань буде точка $M_p(h_p, \theta_p, \varphi_p)$.

Розглянемо функції

$$\psi = \frac{b r \cos \alpha_p}{h_p}, \quad H_{\frac{1}{2}}(\psi) = W_{\frac{1}{2}}(b) \omega_{\frac{1}{2}}(\psi) - \omega_{\frac{1}{2}}(b) W_{\frac{1}{2}}(\psi), \quad /4/$$

де, b - найменший додатний корінь рівняння

$$W_{\frac{1}{2}}(x) \omega_{\frac{1}{2}}(x) - \omega_{\frac{1}{2}}(x) W_{\frac{1}{2}}(x) = 0, \quad \omega_{\frac{1}{2}}(x) -$$

розв'язок рівняння Лапласа

$$\omega'' + \frac{2x+1}{x} \omega' + \omega = 0, \quad \text{а } W_{\frac{1}{2}}(x) - \text{розв'язок модифікованого рівняння Лапласа } W'' + \frac{2x+1}{x} W' - W = 0,$$

$$\cos \alpha_p = \sin \theta_p \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_p) + \cos \theta_p \cos \theta.$$

Таким чином побудована функція $H_{\frac{1}{2}}(\psi)$ задовольняє граничні умови /2/. Якщо тепер покласти $\theta_1 = 0$ /1 = 3,9/, а

$$B_1 = \frac{b^3 \cos^2 \alpha_p}{h_p^3} \frac{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}; \quad B_2 = \frac{b \cos \alpha_p}{h_p} \frac{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)},$$

то рівняння /3/ запишемо наступним чином:

$$\frac{b^4 \cos^4 \alpha_p}{h_p^4} \left[H_{\frac{1}{2}}^{(4)} + \frac{4}{\psi} H_{\frac{1}{2}}^{(3)} \right] = \lambda_1^4 H_{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи співвідношення /4/, отримуємо

$$\frac{b^4 \cos^4 \alpha_p}{h_p^4} = \lambda_1^4$$

Шляхом усереднення за областю Ω отримуємо оцінку знизу

$$\lambda_1^4 \geq \left(\frac{b^2 B}{3V} \frac{4\pi}{m} \right)^2,$$

де V - об'єм тіла Ω .

Стаття надійшла до редколегії 30.03.91

В.А.Шах

АБСОЛЮТНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ КРАТНИХ
СТОХАСТИЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Нехай μ - довільна σ -скінченна міра на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Припустимо, що для набору

$$\{W_i(A)\}_{A \in \mathcal{A}}, \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B} \mid \mu(A) < \infty\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

гауссовських випадкових мір, визначених на основному ймовірнісному просторі, виконані співвідношення

$$EW_i(A) = 0, \quad EW_i(A_1)W_j(A_2) = r_{ij} \cdot \mu(A_1 \cap A_2),$$

де $A, A_1, A_2 \in \mathcal{A}$; $1 \leq i, j \leq n$; $R = \{r_{ij}\}$ - довільна коваріаційна матриця.

Розглянемо кратний стохастичний інтеграл вигляду

$$I_n(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) dW_1 \dots dW_n; \quad f \in L^2(\mu^n). \quad /1/$$

Визначення та основні властивості такого інтеграла подаються у праці [3]. Відображення I_n можна розглядати як неперервний лінійний оператор із $L^2(\mu^n)$ в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Якщо всі елементи матриці R дорівнюють 1, I_n збігається зі звичайним кратним інтегралом Вінера-Іто. Стохастичні інтеграли такого типу знаходять застосування у гідрології та в деяких розділах теоретичної фізики [див., наприклад, працю [2]].

Ми розглядаємо деякі важливі характеристики розподілів випадкових величин, поданих у формі [3].

Теорема 1. Нехай $K \in \text{Ker } I_n$ - ядро лінійного оператора I_n . Якщо $f \notin \text{Ker } I_n$, то випадкова величина $I_n(f)$ має абсолютно неперервний розподіл відносно міри Лебега λ на $\mathbb{R}$.

Теорема 1 узагальнює аналогічний результат, отриманий для звичайних кратних інтегралів Вінера-Іто.

Знайдено точний опис для $\text{Ker } I_n$, тобто для множини функцій f таких, що випадкова величина $I_n(f)$ є виродженою. Цей опис подається у праці [1].

У випадку двократних інтегралів вдається також отримати достатні умови, які забезпечують існування обмеженої густини у розподілі випадкової величини $I_2(f)$, $f \in L^2(\mu^2)$.

І. Шах В.А. Кратные стохастические интегралы по зависимым гауссовским мерам // Д., 1989. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 7194 - 89
Деп. 2. Таqqи М. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank // Z. Wahr. verw. Geb. 1979. V.50. P.53-83. 3. Fox, Таqqи. Multiple stochastic integrals with dependent integrators // Journal of Multivariate analysis. 1987. V.21. N1. P. 105-127.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.91

УДК 519.651

Р.І.Михальчук, С.П.Шевчук

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ У ТЕОРЕМАХ ПРО СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ

Т е о р е м а 1. Нехай на $[a; b]$ задана послідовність додатних інтегровних функцій $\{f_i(t)\}$ і монотонна, знакопостійна на $[a; b]$ функція $g(t)$ а також $\{\Phi_i(t)\}$ послідовність таких первісних від функцій $\{f_i(t)\}$, що

$$\left(\frac{\Phi_i(t)}{\Phi_{i+1}(t)} \right) > 0, \quad \left(\left(\frac{\Phi_i(t)}{\Phi_{i+1}(t)} \right)' \right) < 0.$$

Тоді $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq \zeta_i \geq \dots$; $(\zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_i < \dots)$, /1/
де точки $\zeta_i \in [a; b]$ / $i = 1, 2, \dots$ / визначаються співвідношеннями

$$\int_a^b f_i(t) g(t) dt = g(\zeta_i) \int_a^b f_i(t) dt. \quad /2/$$

Послідовності /1/ монотонні та обмежені, а тому вони збіжні.

Т е о р е м а 2. Нехай кожна з функцій послідовності $\{f_i(t)\}$ означена і неперервна на $[a; b]$. І нехай $\{f_i(t)\}$ збігається на $[a; b]$ до функції $f(t)$ рівномірно. Крім цього, кожна з функцій $\{f_i(t)\}$ / $i = 1, 2, \dots$ / в сукупності з функцією $g(t)$ задовольняє всі умови теореми про середнє значення в інтегральному численні. Тоді

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i = \zeta,$$

де значення середніх точок ζ_i, ζ визначаються рівностями /2/.

Д о в е д е н н я. Те, що $\{f_i(t)\} \rightarrow f(t)$ на $[a; b]$ рівномірно означає, що $(\forall \varepsilon > 0), (\exists N = N(\varepsilon)), (i > N) \Rightarrow$

$$\max_{t \in [a; b]} |f_i(t) - f(t)| < \varepsilon / \left| \int_a^b g(t) dt \right|.$$

© Михальчук Р.І., Шевчук С.П., 1990

Знайдемо

$$\left| \int_a^b f_i(t) g(t) dt - \int_a^b f(t) g(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_i(t) - f(t)) g(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \max_t |f_i(t) - f(t)| \int_a^b |g(t)| dt < \varepsilon \quad /3/$$

З іншого боку,

$$\left| \int_a^b f_i(t) g(t) dt - \int_a^b f(t) g(t) dt \right| = \left| g(\xi_i) \int_a^b f_i(t) dt - g(\xi) \int_a^b f(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| g(\xi_i) \int_a^b f_i(t) dt - g(\xi) \int_a^b f_i(t) dt \right| + \left| g(\xi_i) \int_a^b f_i(t) dt - g(\xi) \int_a^b f(t) dt \right| \leq$$

$$\leq |g(\xi_i) - g(\xi)| \left| \int_a^b f_i(t) dt \right| + |g(\xi)| \left| \int_a^b f_i(t) - f(t) dt \right| \leq$$

$$\leq |g(\xi_i) - g(\xi)| \int_a^b |f_i(t)| dt + |g(\xi)| \max_t |f_i(t) - f(t)| (b-a).$$

Таким чином, на основі /3/

$$\left| \int_a^b f_i(t) dt \right| |g(\xi_i) - g(\xi)| + |g(\xi)| \max_t |f_i(t) - f(t)| (b-a) < \varepsilon.$$

Звідси

$$|g(\xi_i) - g(\xi)| < \varepsilon^*,$$

/4/

де ε^* - деяке мале число, що і доводить теорему.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.91

Б.І.Дутчак

ПРО ОДИН СПОСІБ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНИХ
МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЖОРСТИХ СИСТЕМ
ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо один із можливих способів побудови наближених методів чисельного розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

де $x \in R^m$; $g(x, t) \in C_{t,x}^{(l,l)}(D)$; $D \subset I_t \times R^m$; $I_t = \{t_0 \leq t < \infty\}$; /1/

A – квадратна матриця m -го порядку і наївна нерівність $\|Ax\| \gg \|g(x, t)\|$ в області D .

На основі розкладу

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \sum_{s=1}^k (-1)^{s+1} \left[\left[\sum_{i=0}^s \frac{h^i C_{s-i}}{i!} \right] \frac{d^s x(t_{n-1})}{dt^s} - \frac{d^s x(t_n)}{dt^s} \right] + (-1)^{k+2} \int_0^h \left[\sum_{s=0}^k \frac{\tau^s C_{k-s}}{s!} \right] \frac{d^{k+1} x(t_n + \tau)}{d\tau^{k+1}}, \quad /2/$$

де $C_0 = E, C_j$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$) – довільні квадратні матриці, а матриця C_k вибирається з умови нульового інтеграла в /2/ на розв'язку системи /1/, будуються методи різних порядків. Однак для досягнення порядку точності $2k$ матриці C_{s-1} обчислимо за формулою

$$C_{s-1} = (-1)^s \frac{(2s-1)!}{l!(s-1)!} \frac{s!}{(2s)!} E, \quad /3/$$

де $s = 1, 2, k-1$; $0 \leq i \leq s$ а матрицю C_k вибираємо з умови нульового інтеграла в /2/

$$C_k = (-1)^k \left\{ \exp(Ah) \sum_{i=0}^k \frac{(2k-i)! k!}{i!(k-i)!(2k)!} (-Ah)^i - \sum_{i=0}^k \frac{(2k-i)! k!}{i!(k-i)!(2k)!} * (Ah)^i \right\} (E - \exp(Ah))^{-1} A^{-k}. \quad /4/$$

У цьому випадку метод

$$u_{n+1}^{(i+1)} = u_n^{(i)} + \sum_{s=1}^k (-1)^{s+1} \left[\left[\sum_{i=0}^s \frac{h^i C_{s-i}}{i!} \right] u_{n+1}^{(s)} - C_s u_n^{(s)} \right], \quad /5/$$

де $u_{n+1}^{(s)}$ s -та похідна в точці $n+1$, а матриці C_{s-1} , C_s визначають відповідно за виразами /3/, /4/, буде точним на розв'язку лінеаризованої системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

отже він буде A -стійким.

У випадку коротких систем /I/ губляться всі переваги A -стійких методів при обчисленні з постійним кроком. Метод /5/ може бути поширений на розрахунок зі змінним кроком. При цьому крок h необхідно замінити на h_n .

Оскільки сім'я методів /5/ є неявною, то внаслідок застосування їх до нелінійних систем /I/ отримуємо системи нелінійних рівнянь, до розв'язування яких потрібно застосовувати методи типу Ньютона. Так, наприклад, при застосуванні до системи /I/ методу четвертого порядку отримуємо ітераційну процедуру

$$u_{n+1}^{(i+1)} = u_{n+1}^{(i)} - \left\{ E - \frac{h_n}{2} \left[A + \left[\frac{\partial g(u_{n+1}^{(i)}, t_{n+1})}{\partial u_{n+1}} \right] \right] \right\}^{-1} \times \\ \times \left\{ \left[E - \frac{h_n}{2} A \right] u_{n+1}^{(i)} + \frac{h_n}{2} g(u_{n+1}^{(i)}, t_{n+1}) + \right. \\ \left. + C_2 \left[\frac{\partial \varphi(u_{n+1}^{(i)}, t_{n+1})}{\partial u_{n+1}} \right] \right\}^{-1} \left\{ \left[E + \frac{h_n}{2} A \right] u_n + \frac{h_n}{2} g(u_n, t_n) - C_2 \varphi(u_n, t_n) \right\}$$

де $u_{n+1}^{(i)}$ i -та ітерація за Ньютоном для u_{n+1} , $\left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]$ - матриця Якобі;

$$\varphi(u, t) = \left[A + \left[\frac{\partial g(u, t)}{\partial u} \right] \right] \left[Au + g(u, t) \right] + \frac{\partial g(u, t)}{\partial t},$$

$$C_2 = \left[\left(E - \frac{h}{2} A \right) \exp(Ah) - \left(E + \frac{h}{2} A \right) \left(E - \exp(Ah) \right)^{-1} A^{-2} \right].$$

Очевидно, що при застосуванні методів /5/ необхідно мати ефективний метод для обчислення матричної експоненти. Існує три способи обчислення матричної експоненти:

I/ класичний метод

$$\exp(Ah) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{i!};$$

2/ Паде апроксимація

$$R_{k,l}(Ah) = Q_{k,l}^{-1}(Ah) P_{k,l}(Ah), \quad \text{де}$$

$Q_{k,l}(A, h); P_{k,l}(Ah)$ матричні многочлени вигляду

$$Q_{k,l}(Ah) = \sum_{i=0}^l \frac{(k+l-i)!}{i! (k-i)!} (-Ah)^i,$$

$$P_{k,l}(Ah) = \sum_{i=0}^l \frac{(k+l-i)! l!}{k! i! (l-i)!} (Ah)^i;$$

3/ розкладання в ряд матричної експоненти за многочленами Чебишова та функціями Бесселя

$$\exp(Ah) = I_0(A) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} I_j(A) T_j(h), \quad /6/$$

де $I_j/a/$ - функції Бесселя j -го порядку; $T_j h$ - многочлени Чебишова першого роду. На основі проведених експериментів виявилось, що застосування формули /6/ є більш ефективним.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.91

УДК 539.3

В.Д.Середа

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ РОЗЩЕПЛЕННЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

Ідея методу розщеплення наближеного розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = p_c(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds \quad /1/$$

полягає в тому [1,2], що область визначення ядра $a \leq x, s \leq b$ ділиться на m прямокутників прямим, паралельними до осі $Ox: s = s_k$ ($k = \overline{0, m-1}$; $s_0 = a$, $s_m = b$), і в кожному з таких прямокутників ядро $K(x,s)$ рівняння /1/ подається у вигляді суми двох ядер - виродженого і малого за нормою:

© Середа В.Д., 1992

ІЗ-3036

$$K(x,s) = \sum_{k=1}^m K_k(x,s) + D(x,s),$$

$$K_k(x,s) = \sum_{i=1}^{n_k} P_{ik}(x) Q_{ik}(s)$$

при $s_{k-1} < s \leq s_k$ $|k = \overline{1, m}|$ де, n_k - кількість членів апроксимації ядра на k -му прямокутнику. Розв'язок $\varphi(x)$ рівняння /I/ шукається у вигляді

$$\varphi(x) = M_0(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} M_{ik}(x),$$

де
$$\alpha_{ik} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s) \varphi(s) ds \quad (i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, m}),$$

$$n = \max \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$$

Для визначення невідомих функцій $M_0(x)$ і $M_{ik}(x)$ потрібно розв'язати $nm+1$ допоміжних інтегральних рівнянь

$$M_0(x) = P_0(x) + \lambda \int_a^b D(x,s) M_0(s) ds,$$

$$M_{ik}(x) = P_{ik}(x) + \lambda \int_a^b D(x,s) M_{ik}(s) ds \quad (i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, m})$$

з одним і тим же "малим" ядром $D(x,s)$, а параметри α_{ik} визначаються зі системи nm лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\vec{\alpha} = \vec{B},$$

/3/

де $A = E - \lambda C$, C - nm -квадратна матриця з елементами

$$C_{ik,rs} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s) M_{rs}(s) ds \quad (i, r = \overline{1, n}; \quad k, s = \overline{1, m}),$$

$\vec{\alpha} = \{\alpha_{ik}\}$, $\vec{B} = \{B_{ik}\}$ - nm -компонентні вектори, причому

$$B_{ik} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s) M_0(s) ds \quad (s_{k-1} < s \leq s_k, \quad k = \overline{1, m}).$$

Виведено апіорну оцінку похибки методу розщеплення, доведено збіжність його. Швидкість збіжності методу можна регулювати як збільшенням кількості членів апроксимації ядра на прямокутниках $s_{k-1} < s \leq s_k$, $k = \overline{1, m}$, так і подібненням області $a \leq x, s \leq b$, тобто збільшенням кількості прямокутників.

Апіорний характер оцінки похибки дає змогу оптимально вибрати деякі параметри методу розщеплення з метою відшукування розв'язку даного інтегрального рівняння з довільною наперед заданою точністю.

Розглянуто так звані "багатоступінчасті" методи розв'язання лінійних інтегральних рівнянь вигляду /I/; зокрема детально дослідже-

но двохступінчастий метод, ідея якого полягає в тому, що ядро $D(x,s)$ допоміжних інтегральних рівнянь /2/ подається в області $a \leq x, s \leq b$, розглядуваній як, наприклад, один прямокутник, у вигляді суми двох ядер:

$$D(x,s) = \sum_{j=1}^m y_j(x) z_j(s) + D_1(x,s),$$

де ядро $D_1(x,s)$ "мале" порівняно з ядром $D(x,s)$, а для розв'язання допоміжних інтегральних рівнянь /2/ застосовується розглянутий метод розщеплення. Перевага багатоступінчастих методів розв'язання інтегральних рівнянь полягає в тому, що вони дають змогу зводити розв'язання системи допоміжних алгебраїчних рівнянь /3/, скажімо, t -го порядку, при одноступінчастому методі до розв'язання декількох систем більш низьких порядків $n_1, n_2, \dots, n_k$ | $n_1 + n_2 + \dots + n_k = t$ з k різними матрицями при k -ступінчастому методі; при цьому кількість допоміжних інтегральних рівнянь типу /2/ не залежить від k .

Досліджено застосування методу розщеплення для відшукування власних функцій інтегральних рівнянь вигляду /I/, виведено апріорну оцінку похибки методу, дано спосіб відшукування власних значень ядра інтегрального рівняння.

Досліджено метод розщеплення розв'язання інтегральних рівнянь з використанням формул чисельного інтегрування. Зокрема, показано побудову реальних алгоритмів чисельного розв'язання рівнянь вигляду /I/ і виведено оцінку похибки одного класу реальних алгоритмів розв'язання цих рівнянь на базі методу розщеплення. Оскільки повна похибка реального розв'язку рівняння /I/ залежить від реальних розв'язків допоміжних інтегральних рівнянь /2/ і системи алгебраїчних рівнянь /3/, то проведено детальне дослідження усіх похибок, що виникають у процесі реального розв'язання інтегрального рівняння /I/ на ЕОМ.

І. К а л а й д а А.Ф., С е р е д а В.Ю. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений второго рода // Укр. математ. журн. 1968. Т.20. № 2. С. 257-263. 2. С е р е д а В.Ю. Узагальнений метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду // ДАН УРСР. Сер. А, фіз. Техн. та мат. науки. 1968. № 2. С.127-131.

Стаття надійшла до редколегії 05.12.91

З М І С Т

Бартіш М.Я., Шахно С.М. Узагальнений метод типу Ньютона для розв'язування нелінійних рівнянь.....	3
Голуб Б.М., Щербина Ю.М. Алгоритм лінеаризації в задачах дискретного мінімаксу.....	5
Маянн Б.Н., Голуб Б.М., Цегелик Г.Г., Щербина Ю.М. Моделі оптимізації параметрів обчислювальної сітки.....	8
Жук М.В. Застосування методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь.....	12
Притула М.М. Гамільтонова структура та перетворення Беклунда інверсного модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза.....	16
Притула М.М., Самойленко В.Г., Суяров С.У. Гамільтонова структура рівняння типу Больцмана-Власова в просторі бінарних функцій розподілу.....	20
<u>Квіт І.Д.</u> Сподівані та довірчі інтервали.....	23
<u>Квіт І.Д.</u> , Москвяк Б.В. Критерій Колмогорова для зрізаної вибірки.....	27
Гнатишин О.П., Москвяк Б.В. Критерій Смирнова для порівняння двох зрізаних вибірок.....	29
Мисак Р.Т. Матрична регуляризація мінімаксної оцінки.....	32
Роман Л.Л. Збіжність одного рекурсивного методу з послідовною апроксимацією оберненого оператора.....	34
Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями.....	39
Флейшман Н.П., Олексів О.Б. Динамічні умови спряження для оболонок і пластин з видавками.....	45
Дияк І.І., Шарманський Б.Я., Шинкаренко Г.А. Чисельне дослідження регуляризованої задачі оптимального керування нестационарним нагрівом.....	49
Зубов В.М., Шинкаренко Г.А. Розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач переносу та дифузії домішок в нестисливій атмосфері.....	55
Блажисевська О.В., Гуць А.Б., Полатайко М.М. Математичне моделювання процесу нанесення напівпровідникових плівок.....	61

Дещенко С.Г., Остудін Б.А. Застосування методів теорії нечітких множин при розв'язуванні некоректних задач класифікації.....	65
Пасічник Р.М., Остудін Б.А. Порівняння двох методів розв'язання інтегрального рівняння першого роду типу хвильового потенціалу простого шару.....	73
Попов Б.О. Рівномірне наближення сплайнами /властивості та алгоритми/.....	79
Мартиненко М.Д., Басьоні Х.С. Лінеаризація для однієї задачі Дарбу другого порядку.....	84
Горбайчук В.Й., Тимощук В.М. Застосування методів теорії наближення функцій до дослідження граничної поведінки розв'язків деяких крайових задач математичної фізики.....	87
Сорока Р.О. Побудова програмних рухів маніпуляційних роботів за допомогою сплайнів четвертого порядку.....	88
Коробчук І.В., Дисенко О.В. Геометрична оцінка першого власного значення бігармонійного оператора в просторі E^3	90
Шах В.А. Абсолютна неперервність кратних стохастичних інтегралів.....	92
Михальчук Р.І., Шевчук С.П. Про одну властивість у теоремах про середні значення.....	93
Дутчак Б.І. Про один спосіб побудови наближених методів розв'язування жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь.....	95
Середа В.Ю. Дослідження методу розщеплення наближеного розв'язання лінійних інтегральних рівнянь другого роду.....	97

Збірник наукових праць
Міністерство освіти України

Вісник
Львівського університету

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 37

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Львів. Видавництво "Світ" при Львівському університеті
290000 Львів-центр, вул. Університетська, 1

Адреса редколегії: 290000 Львів, вул. Університетська, 1
Університет, кафедра прикладної математики

Художній редактор Е.А. Каменщик
Технічний редактор І.Г. Федас
Коректор К.Г. Логвиненко

Н/К

Підп. до друку 28.08.92. Формат 60х84/16. Папір друк. № 3.
Умовн. друк. арк. 6,25. Умовн. фарбо-відб. 6,04. Обл.-вид.
арк. 5,6. Вид. № 9. Зам. 3036. Замовне

Львівська обласна книжкова друкарня
290000 Львів, вул. Стефаніка, 11

У видавництві "Світ" при Львівському держуніверситеті в 1993 р. вийде друком посібник В.В.Божидарника, Г.Т.Сулима "Елементи теорії пружності", обсягом 26 арк., українською мовою.

У посібнику розглядаються основні положення сучасної теорії пружності, методи аналізу задач згину та кручення призматичних стержнів, просторової та плоскої теорії пружності, поширення пружних хвиль. Велика увага приділяється застосуванню персональних ЕОМ до розв'язування задач механіки.

Для студентів університетів і технічних вузів, які навчаються за спеціальністю "Механіка", "Фізика твердого тіла".

Замовлення можна надсилати на адресу: Львів-центр, вул.Університетська, 1, видавництво "Світ".

ISSN 0201-758X. 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип. 37. 1—104.