УДК 517.95

С.П.Лавренюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ОДНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

В області $Q_T = \mathcal{D} \times \mathcal{J}$, де $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена з межею $\partial\mathcal{D}$, а $\mathcal{J} = (-\infty; T)$, розглянемо рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \qquad /1/$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) = f(x,t)$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \ i = 0, \ldots, m-1. \qquad /2/$$

Тут $S_T = \partial\mathcal{D} \times \mathcal{J}$, ν – зовнішня нормаль до S_T,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \ l \le m, \ m \ge 1.$$

Метою цієї праці є дослідження умов єдиності розв"язку задачі /1/, /2/ у деякому просторі. Позначимо через V простір функцій $u(x,t)$, для яких справедливі включення

$$u \in L^\infty_{loc}(\mathcal{J}; W_0^{m,2}(\mathcal{D})), \ u_t \in L^\infty_{loc}(\mathcal{J}; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2_{loc}(\mathcal{J}; W_0^{l,2}(\mathcal{D})).$$

Тут під $L^p_{loc}(\mathcal{J}; B)$ розуміється простір тих функцій, які належать $L^p((t_0, T); B)$ для довільного $t_0 \in \mathcal{J}$. Визначення простору $W_0^{k,p}(\mathcal{D})$ наведене у праці [2].

Припустимо, що коефіцієнти рівняння /1/ задовольняють у Q_T такі умови:

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} \frac{\partial^i a_{\alpha\beta}(x,t)}{\partial t^i} D^\alpha w D^\beta w \, dx \ge \mu_i \int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=m_i} (D^\alpha w)^2 dx, \ i = 0,1; \qquad /3/$$

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \frac{\partial^i b_{\alpha\beta}(x,t)}{\partial t^i} D^\alpha w D^\beta w \, dx \le \bar{w}_i \int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=\bar{l}_i} (D^\alpha w)^2 dx; \qquad /4/$$

$$\int\limits_{\mathcal{D}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}wD^{\beta}w\,dx \geq w_0\int\limits_{\mathcal{D}}\sum_{|\alpha|=l_0}(D^{\alpha}w)^2dx \qquad /5/$$

для довільної функції $w\in W_0^{m,2}(\mathcal{D})$. Тут $m_0, m_1\le m$; $l_0, \bar{l}_0, \bar{l}_1, \bar{l}_2\le l$.

Позначимо через V_μ підмножину тих функцій з V, для яких

$$\int\limits_{Q_T} e^{2\mu\cdot}\sum_{|\alpha|=m}(D^{\alpha}w)^2dx<\infty .$$

Надалі нам буде потрібна відома нерівність Фрідріхса [2]:

$$\int\limits_{D}\sum_{|\alpha|=j}(D^{\alpha}w)^2dx\le A_{K,j}\int\limits_{D}\sum_{|\alpha|=K}(D^{\alpha}w)^2dx, \qquad /6/$$

$j=0,\dots, K\le m$, яка справедлива для всіх функцій з $W_0^{m,2}(\mathcal{D})$. Причому сталі $A_{K,j}$ залежать лише від n, K і області $\mathcal{D}$.

<u>Теорема.</u> Нехай виконуються нерівності /3/-/5/;

$a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta t}(|\alpha|=|\beta|\le m)$, $\overset{o}{}_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta t}, b_{\alpha\beta tt}(|\alpha|=|\beta|\le l)\in L^{\infty}(Q_T)$;

$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}(|\alpha|=|\beta|\le m)$, $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}(|\alpha|=|\beta|\le l)$, $(x,t)\in\bar{Q}_T$;

$\bar{l}_2\le m_1$; $\bar{l}_1\le m_1$; $\bar{l}_1\le m_0$; $\bar{l}_0\le m_0$; $m_1\le m$; $m_0\le m$; $l_0\le l$.

Крім цього, нехай $\mu>0$ найбільше з чисел, що задовольняє нерівності:

$$\mu_0-\bar{w}_1A_{m_0,\bar{l}_1}-\bar{w}_0\mu A_{m_0,\bar{l}_0}\ge 0;$$

$$\mu_1-\bar{w}_2A_{m_1,\bar{l}_2}-\mu\bar{w}_1A_{m_1,\bar{l}_1}\ge 0;$$

$$w-\mu A_{l_0,0}\ge 0.$$

Тоді задача /1/, /2/ не може мати більше як один розв"язок на множині V_μ.

Для доведення розглянемо функцію

$$v(x,t)=\begin{cases} e^{\mu t}\int_t^{\tau}u(x,\theta)e^{\mu\theta}d\theta, & t\le\tau\le T,\\ 0, & t>\tau,\end{cases}$$

де $u(x,t)\in V_\mu$ - розв"язок задачі /1/, /2/, коли $f=0$. Помножимо рівняння /1/ на функцію v і проінтегруємо по області $\mathcal{D}$. Отримаємо

$$\int\limits_{\mathcal{D}}[u_{tt}v+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u)v+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(b_{\alpha\beta}D^{\beta}u_t)v]dx=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{D}}[u_{tt}v+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}a_{\alpha\beta}D^{\beta}u\,D^{\alpha}v+$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}b_{\alpha\beta}D^{\beta}u_tD^{\alpha}v]dx=0. \qquad /7/$$

Після певних перетворень та оцінки доданків у рівності /7/ з урахуванням умов теореми можна отримати нерівність

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} u^2 e^{2\mu\tau}dx - \int_{\mathcal{D}}[u_t e^{\mu t_0}\int_{t_0}^{\tau} ue^{\mu\theta}d\theta -$$

$$-\mu u e^{\mu t_0}\int_{t_0}^{\tau} ue^{\mu\theta}d\theta - \frac{1}{2}u^2 e^{\mu t_0} +$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta}D^{\beta}ue^{\mu t_0}\int_{t_0}^{\tau} D^{\alpha}ue^{\mu\theta}d\theta]dx \le 0. \qquad /8/$$

В останній нерівності перейдемо до межі, коли $t_0 \to -\infty$. Отримаємо

$$\int_{\mathcal{D}} u^2(x,t)\,dx \le 0.$$

Звідси $u \equiv 0$ в Q_T. Теорема доведена.

<u>Зауваження.</u> Наведена вище теорема дає деякі умови єдиності розв"язку задачі /1/, /2/, у класі функцій, які можуть рости при $t \to -\infty$ не швидше, ніж $e^{\mu t}$, причому величина додатного параметра μ залежить від коефіцієнтів рівняння. Виявляється, що це обмеження є природним. Дійсно, розглянемо задачу

$$u_{tt} - au_{xxt} + u_{xxxx} = 0, \quad a > 2,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad /9/$$

в області $Q_T = \{(x,t): 0 < x < 1, -\infty < t < T\}$.
Легко встановити, що рівняння

$$(2+a)\cos\gamma(1-b) - (a-2)\cos\gamma(1+b) = 4$$

для деяких значень c має корінь γ_0. Тут

$$b = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}, \quad b_1 = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}, \quad b_2 = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Тоді функція

$$u(x,t) = [(b\sin\gamma_0 b - \sin\gamma_0)\cos\gamma_0 bx +$$

$$+(b\cos\gamma_0 - \cos\gamma_0 b)\sin\gamma_0 bx + (\sin\gamma_0 - b\sin\gamma_0 b)\cos\gamma_0 x +$$

$$+(\cos\gamma_0 b - \cos\gamma_0)\sin\gamma_0 x]\, e^{-\frac{\gamma_0^2}{b_2}t}$$

буде нетривіальним розв"язком задачі /9/.

Єдиність розв"язку задач без початкових умов для параболічних рівнянь досліджена у працях [1, 3], де наведена також значна бібліографія з цього питання.

1. Б о к а л о Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1989. Вып. 14. С.3-44. 2. Г а е в - с к и й Х., Г р е г е р К., З а х а р и а с К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 3. И в а с и ш е н С.Д. О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. 1983. Т.34. № 5. С.547-552.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.91

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ ПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

В області $D=\{(x,t):0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

з граничними умовами

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\gamma u(0,t)-\alpha u(l,t), \qquad /2/$$
$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\alpha u(0,t)+\beta u(l,t)$$

або

$$u(l,t)=\varrho u(0,t),$$
$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\tau u(0,t) \qquad /3/$$

і початковою

$$u(x,0)=0, \qquad /4/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр; $\alpha,\beta,\gamma,\varrho,\tau$ – задані числа; не виключаються такі випадки, коли деякі /або усі/ ці числа перетворюються у нескінченність /або ϱ перетворюється у нуль/.

Зауважимо, що граничні умови /2/, /3/ досить загальні, вони включають в себе усі найбільш уживані граничні умови.