1. Б о к а л о Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1989. Вып. 14. С.3-44. 2. Г а е в с к и й Х., Г р е г е р К., З а х а р и а с К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 3. И в а с и ш е н С.Д. О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. 1983. Т.34. № 5. С.547-552.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.91

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ ПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

з граничними умовами

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\gamma u(0,t)-\alpha u(l,t),$$
$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\alpha u(0,t)+\beta u(l,t) \qquad /2/$$

або

$$u(l,t)=\varrho u(0,t),$$
$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\tau u(0,t) \qquad /3/$$

і початковою

$$u(x,0)=0, \qquad /4/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр; $\alpha,\beta,\gamma,\varrho,\tau$ – задані числа; не виключаються такі випадки, коли деякі /або усі/ ці числа перетворюються у нескінченність /або ϱ перетворюється у нуль/.

Зауважимо, що граничні умови /2/, /3/ досить загальні, вони включають в себе усі найбільш уживані граничні умови.

Нехай виконуються умови:

I/ Існує єдиний розв"язок задачі /I/, /2/ або /3/, /4/;

2/ функції $a(x,t)$, $f(x,t)$ достатньо гладкі для проведення подальших викладок;

3/ $a(x,t)>0$; $\beta \leq 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha^2+\beta\gamma \leq 0$ знак рівності в одному з цих перших двох співвідношень повинен відповідати знакові рівності у третьому.

Побудуємо асимптотику розв"язку задачі /I/, /2/, або /3/, /4/ у припущенні існування єдиного розв"язку цієї задачі /для деяких часткових випадків граничних умов цей факт добре відомий/ за ступенями малого параметра ε, при цьому використаємо метод примежового шару [3]. Зауважимо, що граничний перехід при $\varepsilon \to 0$ досліджений для досить загальних систем у праці [2]. Асимптотика розв"язку першої граничної задачі одержана у працях [I, 9] методом примежового шару і у [5] – методом регуляризації.

Асимптотику розв"язку задачі /I/, /2/ або /3/, /4/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /5/$$

де $\tau = t/\varepsilon$; N – натуральне число – точність асимптотики.

Випишемо задачі, з яких можна визначити функції, що входять у /5/. Їх одержують стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики одержуємо як розв"язки граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь / t входить як параметр/:

$$-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + a(x,t) v_i = f_i(x,t), \qquad /6/$$

$$\frac{\partial v_i(0,t)}{\partial x} = \gamma v_i(0,t) - \alpha v_i(l,t),$$

$$\frac{\partial v_i(l,t)}{\partial x} = \alpha v_i(0,t) + \beta v_i(l,t), \qquad /7/$$

або

$$v_i(l,t) = \varrho v_i(0,t),$$

$$\frac{\partial v_i(l,t)}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v_i(0,t)}{\partial x} + \tau v_i(0,t), \qquad /8/$$

де $f_0(x,t) \equiv f(x,t)$, $f_i(x,t) = -\frac{\partial v_{i-1}}{\partial t}$ $(i=1,\dots,N)$.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,..,N)$ в околі $t=0$ визначаємо як розв"язки змішаних задач для параболічних рівнянь:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2}+a(x,0)\Pi_i=g_i(x,\tau), \qquad /9/$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x}=\gamma\Pi_i(0,\tau)-\alpha\Pi_i(l,\tau),$$

$$\frac{\partial \Pi_i(l,\tau)}{\partial x}=\alpha\Pi_i(0,\tau)+\beta\Pi_i(l,\tau), \qquad /10/$$

або

$$\Pi_i(l,\tau)=\rho\Pi_i(0,\tau), \qquad /11/$$

$$\frac{\partial \Pi_i(l,\tau)}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x}+\tau\Pi_i(0,\tau),$$

$$\Pi_i(x,0)=-v_i(x,0), \qquad /12/$$

де $g_0(x,\tau)\equiv 0$, $g_i(x,\tau)$ $(i=1,...,N)$ лінійно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$.

Таким чином, з одержаних формул бачимо, що всі $v_i(x,t)(i=0,...,N)$ визначаються незалежно від $\Pi_i(x,\tau)$ рекурентно як розв"язки граничних задач /6/,//7/ або /8//, а потім – рекурентно усі $\Pi_i(x,\tau)(i=0,...,N)$ як розв"язки змішаних задач для параболічних рівнянь /9/,//10/, або /11//, /12/.

Як випливає з [8]/задачі легко переписати у вигляді задач для систем першого порядку/, неоднорідні задачі /6/,//7/, або /8// мають єдиний розв"язок, якщо для однорідних задач $f_i(x,t)=0$ $(i=0,...,N)$ існує єдиність. Єдиність розв"язку однорідних задач /6/,//7/, або /8// легко одержати методом інтегралів енергії шляхом домноження однорідного рівняння /6_i/ на $v_i(x,t)$ та інтегруванням по x у межах від 0 до l з урахуванням граничних умов //7_i/ або /8_i//. Отже, задачі /6/, //7/ або /8// однозначно розв"язальні.

Функції $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,...,N)$ є функціями типу примежового шару в околі $t=0$, тобто вони експоненціально спадні при $\tau\to\infty$, що можна довести застосуванням методу Фур"є до граничних задач /9/, //10/ або /11//, /12/ [6].

Залишковий член є розв"язком задачі, аналогічної до задачі /1/, //2/ або /3//, /4/. Методом інтегралів енергії [4] одержана оцінка

$$\|R_N\|_{L_2(D)} \leqslant C\varepsilon^{N+1}, \qquad /13/$$

де константа C не залежить від ε. Зауважимо, що оцінка розв"язку подібної задачі з іншим варіантом входження малого параметра одержана у праці [6].

Сформулюємо результат роботи.

Теорема. Нехай виконуються умови /1/, 2/. Тоді розв"язок задачі /1/,//2/, або /3//, /4/ допускає асимптотичне зображення /5/, де $v_i(x,t)$, функції типу примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач /6/, //7/, або /8//; /9/, //10/, або /11//, /12/, залишковий член $R_N(x,t,\varepsilon)$ допускає оцінку /13/.

1. Богатырев С.В. Об асимптотике решений одного сингулярно возмущенного параболического уравнения // Приближ. методы исслед. дифференц. уравнений и их приложения. 1982. С.30-40. 2. Борисов В.Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t // Мат. сборник. 1986. Т.131. № 3. С.293-308. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 5. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981. 6. Сеньо П.С., Цимбал В.М. Оцінка розв"язку змішаної задачі для сингулярно збуреного параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 27. 1987. С.36-38. 7. Стеклов В.В. Основные задачи математической физики. М., 1983. 8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 9. Roos H.-G. Die asymptotische Lösung einer speziellen Randwertaufgabe // Z. angew. Math. und Mech. 1979. Bd. 59. N1. P. 61.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.91