

ЗМІШАНА ЗАДАЧА
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ
ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В області $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq \tau\}$ розглянемо змішану задачу для рівняння другого порядку:

$$\varepsilon L_2 u + L_1 u \equiv \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \\ + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + d(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + r(x, t) u = f(x, t), \quad /1/$$

де $\varepsilon > 0$ — малий дійсний параметр.

Далі накладатимемо умови.

1. У розкладі $\lambda^2 + 2a(x, t)\lambda\xi + b(x, t)\xi^2 = (\lambda - \lambda_1(x, t)\xi)(\lambda - \lambda_2(x, t)\xi)$ функції $\lambda_1(x, t)$, $\lambda_2(x, t)$ дійсні та різні при всіх $(x, t) \in D$, тобто рівняння /1/ є строго гіперболічне [4] і, крім цього, $\lambda_1(x, t) < \lambda_2(x, t) < 0$ у D , зауважимо, що звідси, зокрема, автоматично випливає, що $b(x, t) > 0$ в D .

Враховуючи цю умову, поставимо граничні та початкові умови [3]:

$$u(0, t) = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \psi(t), \quad /2/$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x). \quad /3/$$

Крім цього, нехай:

2. Функції, що входять у рівняння /1/, граничні й початкові умови /2/, /3/ достатньо гладкі для проведення подальших викладок;

3. $c(x, t) > 0, d(x, t) > 0$ у D і оператор L_1 розділяє оператор L_2 [4];

4. Виконуються умови узгодженості, які необхідні для існування класичного розв'язку задачі /1/-/3/, умови узгодженості зв'язані з наявністю других похідних в пр. вій частині рівня /5/, а також $\Pi_i(0, \tau) = Q_i(\xi, 0) = \frac{\partial \Pi_i(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial Q_i(\xi, 0)}{\partial t} = 0$ ($i = 0, \dots, N$).

Зауважимо, що однозначна розв'язальність задачі /1/-/3/ випливає з [7].

Методом примекового шару [2] побудуємо асимптотику розв'язку задачі /1/-/3/. Зауважимо, що випадок виродження гіперболічного рівняння другого порядку у гіперболічне рівняння першого порядку /змішана задача/, але без малого параметра у початкових і граничних умовах розглянутий у працях [5, 10], а з малим параметром у початковій умові – у праці [8].

Асимптотику розв'язку задачі /1/-/3/ шукаємо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i v_i(x, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i(\xi, t) + R_N(x, t, \varepsilon), \quad /4/$$

де $\tau = t/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$; N – натуральне число – точність асимптотики.

Випишемо задачі для визначення функцій, що входять у [4].

Функції регулярної частини асимптотики $v_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) визначаються розв'язками змішаних задач для рівнянь у часткових похідних першого порядку:

$$c(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial t} + d(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x} + e(x, t) v_i = f_i(x, t), \quad /5/$$

$$v_i(x, 0) = -\Pi_i(x, 0), \quad v_i(0, t) = -Q_i(0, t), \quad /6/$$

$$\text{де } f_i(x, t) = \delta_{i0} f(x, t) - \left(\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial t^2} + 2a(x, t) \frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x \partial t} + b(x, t) \frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2} \right) (i=0, \dots, N)$$

/тут і надалі функція з від'ємним індексом тотожно дорівнює нулю/; δ_{ik} – символ Кронекера.

Функції примекового шару $\Pi_i(x, \tau)$ ($i=0, \dots, N$) в околі $t=0$ є розв'язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / x – параметр/;

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \tau^2} + c(x, 0) \frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} = \mathcal{P}_i(x, \tau), \quad /7/$$

$$\frac{\partial \Pi_i(x, 0)}{\partial \tau} = \delta_{i0} \varphi(x) - \frac{\partial v_{i-1}(x, 0)}{\partial t}, \quad \Pi_i(x, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0, \quad /8/$$

де $\mathcal{P}_0(x, \tau) \equiv 0$, $\mathcal{P}_i(x, \tau)$ ($i=1, \dots, N$) лінійно виражаються через $\Pi_j(x, \tau)$ ($j < i$) та їх похідні.

Функції примежового шару $Q_i(\xi, t)$ ($i = 0, \dots, N$) в околі $x = 0$ є розв'язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / 1 - параметр /:

$$b(0, t) \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^2} + d(0, t) \frac{\partial Q_i}{\partial \xi} = q_i(\xi, t), \quad /9/$$

$$\frac{\partial Q_i(\cdot, t)}{\partial \xi} = \psi(t) \delta_{i0} - \frac{\partial v_{i-1}(0, t)}{\partial x}, \quad Q_i(\xi, t) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad /10/$$

де $Q_0(\xi, t) \equiv 0$, $Q_i(\xi, t)$ ($i = 1, \dots, N$) лінійно виражаються через $Q_j(\xi, t)$ ($j < i$) та їх похідні.

Таким чином, з одержаних формул бачимо, що функції, які входять у /4/, визначаються рекурентно у такій послідовності $P_0(x, \tau)$, $Q_0(\xi, t)$, $v_0(x, t)$, $P_1(x, \tau)$ і т.д. Стандартним чином [2] доводять, що функції $P_i(x, \tau)$ і $Q_i(\xi, t)$ ($i = 0, \dots, N$) експоненціально спадні. Одностороння розв'язальність задач /5/, /6/ впливає з праці [1].

Зауважимо, що виродженою задачею для /1/-/3/ є задача знаходження розв'язку виродженого рівняння /5₀/ з умовами

$$v_0(x, 0) = \varphi(x)/c(x, 0), \quad v_0(0, t) = \frac{b(0, t)\psi(t)}{d(0, t)},$$

а не з нульовими граничними умовами, як можна було б сподіватися з умов /2/ і /3/.

Для залишкового члена $R_N(x, t, \varepsilon)$ методом інтегралів енергії [6, 10] одержана оцінка

$$\|R_N(x, t, \varepsilon)\|_{L_2(D)} \leq C \varepsilon^{N+1}, \quad /11/$$

де константа C не залежить від ε .

Сформулюємо результат роботи.

Теорема. Якщо умови 1 - 4 виконуються, то розв'язок задачі /1/-/3/ допускає асимптотичне зображення /4/, де функції визначаються рекурентно у такій послідовності $P_0(x, \tau)$, $Q_0(\xi, t)$,

$v_0(x, t)$, $P_1(x, \tau)$ і т.д. Функції регулярної частини асимптотики визначаються розв'язками граничних задач для диференціальних рівнянь /5/, /6/; функції звичайних примежових шарів $P_i(x, \tau)$ в околі $t = 0$ і $Q_i(\xi, t)$ в околі $x = 0$ - із задач /7/, /8/ і /9/, /10/ відповідно; залишковий член $R_N(x, t, \varepsilon)$ має оцінку /11/.

Зауваження. Результат роботи анонсовано у праці [9].

1. Аболина В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып.3. С.87-104. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.Д. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1967. № 5. С.3-122. 3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., 1979. 4. Гордиинг Д. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. 5. Джаддов М.Г. Смешанная задача для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных // Докл. АН СССР. 1963. Т.152. № 4. С.790-793. 6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 7. Мельник З.О. Эммануэла задача для загалного гіперболічного рівняння другого порядку на площині // Доп. АН УРСР. 1965. № 4. С.13-15. 8. Флюд В.М., Цымбал В.Н. Асимптотика решения смешанной задачи для сингулярно возмущенной слабо связанной гиперболической системы // Укр. мат. журн. 1985. Т.37. С.481-487. 9. Цымбал В.Н. Задачи для сингулярно возмущенных уравнений математической физики с малым параметром в граничных условиях // Тез. докл. сов.-чехословац. совещ. Донецк, 1986. С.139. 10. Geel R. On initial and initial-boundary value problems of hyperbolic type in singular perturbation theory // Report of the Mathematical Institute of the University of Amsterdam. 1975. P.16-75.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.91

УДК 517.956

І.І.Кміть

АНАЛОГ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Гіперболічні системи з двома незалежними змінними є предметом досліджень багатьох авторів. Розглянуті як класичні задачі, так і задачі з нерозділеними або інтегральними умовами /як по змінній x , так і по змінній t /. Некласичні задачі досліджені у працях [1-3]; ознайомитися з бібліографією, що стосується задач, можна, зокрема, у праці [4].

Дана стаття має за мету вивчення коректності постановки багатоточкової задачі по змінній x з нерозділеними умовами по змінній t для гіперболічної системи.

© Кміть І.Я., 1993