1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып.3. С.87-104. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.Л. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1967. № 5. С.3-122. 3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., 1979. 4. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. 5. Джавадов М.Г. Смешанная задача для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных // Докл. АН СССР. 1963. Т.152. № 4. С.790-793. 6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 7. Мельник З.О. Змішана задача для загального гіперболічного рівняння другого порядку на площині // Доп. АН УРСР. 1965. № 4. С.13-15. 8. Флюд В.М., Цымбал В.Н. Асимптотика решения смешанной задачи для сингулярно возмущенной слабо связанной гиперболической системы // Укр. мат. журн. 1985. Т.37. С.481-487. 9. Цымбал В.Н. Задачи для сингулярно возмущенных уравнений математической физики с малым параметром в граничных условиях // Тез. докл. сов.-чехословац. совещ. Донецк, 1986. С.139. 10. Geel R. On initial and initial-boundary value problems of hyperbolic type in singular perturbation theory // Report of the Mathematical Istitute of the University of Amsterdam. 1975. P.16-75.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.91

УДК 517.956

І.І.Кміть

АНАЛОГ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Гіперболічні системи з двома незалежними змінними є предметом досліджень багатьох авторів. Розглянуті як класичні задачі, так і задачі з нерозділеними або інтегральними умовами /як по змінній x, так і по змінній t /. Некласичні задачі досліджені у працях [1-3]; ознайомитися з бібліографією, що стосується задач, можна, зокрема, у праці [4].

Дана стаття має за мету вивчення коректності постановки багатоточкової задачі по змінній x з нерозділеними умовами по змінній t для гіперболічної системи.

Нехай маємо область $\Omega = \{(x,t): 0<x<l, 0<t<T\}$. В Ω розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad i=\overline{1,n} \qquad /1/$$

з умовами

$$\alpha_i(x)u_i(x,0) + \beta_i(x)u_i(x,T) = \gamma_i(x), \quad i=\overline{1,n}, \qquad /2/$$

$$\sum_{s=0}^{p+1}\sum_{j=1}^{n} b_{isj}(t)u_j(x_s,t) = H_i(t), \quad i=\overline{1,n}. \qquad /3/$$

Щодо задачі /1/–/3/ зробимо припущення:

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \le \lambda_{k+2} \le \ldots \le \lambda_n$, $0 \le k \le n$, усюди в Ω; функції $\lambda_i(x,t), f_i(x,t,u), \alpha_i(x), \beta_i(x), \gamma_i(x), i,j = \overline{1,n}$ – неперервні по всіх своїх аргументах, а також неперервно диференційовані по x; $f_i(x,t,u)$, $i=\overline{1,n}$, мають неперервні перші похідні по u; $b_{isj}(t), H_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $s=\overline{0,p+1}$, $j=\overline{1,n}$ – неперервно диференційовані; $|\lambda_i(x,t)| \le \sigma_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, причому $\sigma_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ – неперервні на $[0,T]$; $x_0=0$, $x_{p+1}=l$, $p \ne 0$.

Введемо позначення:

$$\tilde\beta_i(x) = \frac{\beta_i(x)}{\alpha_i(x)}, \quad \tilde\gamma_i(x) = \frac{\gamma_i(x)}{\alpha_i(x)};$$

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} b_{101} \ldots b_{10k} & b_{1,p+1,k+1} \ldots b_{1,p+1,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_{n01} \ldots b_{n0k} & b_{n,p+1,k+1} \ldots b_{n,p+1,n} \end{pmatrix};$$

$$d_1 = \max_t \frac{1}{|\det\Gamma|} pn^2 \max_{\substack{t \\ i=\overline{1,n}}} |\Gamma_{ji}| \times$$

$$\times \max_{\substack{t \\ i,j=\overline{1,n} \\ s=\overline{1,p}}} \{|b_{isj}|, \max_{\substack{t \\ i=\overline{1,n} \\ j=\overline{k+1,n}}} |b_{i0j}|, \max_{\substack{t \\ i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,k}}} |b_{i,p+1,j}|\};$$

$$d_2 = \max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} |\tilde\beta_i| \max_{\substack{\tau,t \\ i=\overline{1,n}}} \exp\int_\tau^t \lambda_{i\xi}(\xi(s),s)\,ds;$$

$$d_3 = \max_{\substack{\tau, t \\ i=\overline{1,n}}} \exp \int_{\tau}^{t} \lambda_{i\xi}(\xi(s), s)\, ds ,$$

$$q_1 = d_1 \max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} \left\{ 1, |\tilde{\beta}_i|^{\max\{n_i\}+1} \right\} ;$$

$$q_2^1 = \frac{T d_1 L n}{1 - q_1} \sum_{p=0}^{\max\{n_i\}+1} \left(\max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} |\tilde{\beta}_i| \right)^p + TLn ;$$

$$q_2^2 = TLn \sum_{p=1}^{\max\{n_i\}+1} \left(\max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} |\tilde{\beta}_i| \right)^p +$$

$$+ \max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} \left\{ |\tilde{\beta}_i|, |\tilde{\beta}_i|^{\max\{n_i\}+1} \right\} (q_2^1 - TLn) + TLn ;$$

$$q_2 = \max \left\{ q_2^1 , q_2^2 \right\} ;$$

$$q_3 = d_1 d_3 \max_{\substack{x, t \\ i=\overline{1,n}}} \frac{1}{|\lambda_i|} \max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} \left\{ |\tilde{\beta}_i|, |\tilde{\beta}_i|^{\max\{n_i\}+1} \right\} ;$$

$$q_4^1 = \frac{T n C d_1 d_3^2}{1 - q_3} \max_{\substack{x, t \\ i=\overline{1,n}}} \frac{1}{|\lambda_i|} \sum_{p=0}^{\max\{n_i\}+1} d_2^p + T n C d_3 ;$$

$$q_4^2 = d_3^2 \max_{\substack{x, t \\ i=\overline{1,n}}} \frac{1}{|\lambda_i|} \max \left\{ d_2 , d_2^{\max\{n_i\}+1} \right\} \times$$

$$\times (q_4^1 - T n C d_3) + T n C d_3 ;$$

$$q_4 = \max \left\{ q_4^1 , q_4^2 \right\} ;$$

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} ; \quad \beta(x) = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} ;$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{1s1} & b_{1s2} & \cdots & b_{1sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{ns1} & b_{ns2} & \cdots & b_{nsn} \end{pmatrix} ;$$

$$C_s(t)=\begin{pmatrix} b_{1s1}(t)\lambda_1(x_s,t) & b_{1s2}(t)\lambda_2(x_s,t) & \ldots & b_{1sn}(t)\lambda_n(x_s,t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{ns1}(t)\lambda_1(x_s,t) & b_{ns2}(t)\lambda_2(x_s,t) & \ldots & b_{nsn}(t)\lambda_n(x_s,t) \end{pmatrix};$$

$$R_1=\begin{pmatrix} \alpha(x_0) & \ddots & 0 & \beta(x_0) & \ddots & 0 \\ 0 & & \alpha(x_{p+1}) & 0 & & \beta(x_{p+1}) \\ B_0(0) & \ldots & B_{p+1}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \bar{B}_0(T) & \ldots & \bar{B}_{p+1}(T) \end{pmatrix};$$

$$R_2=\begin{pmatrix} \alpha(x_0) & \ddots & 0 & \beta(x_0) & \ddots & 0 \\ 0 & & \alpha(x_{p+1}) & 0 & & \beta(x_{p+1}) \\ C_0(0) & \ldots & C_{p+1}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & C_0(T) & \ldots & C_{p+1}(T) \end{pmatrix},$$

Де

$$n_i \le \left[\frac{l}{\int_0^T G_i(t)\,dt} \right] + 1, \quad i=\overline{1,n} \; .$$

Теорема. Нехай крім зроблених вище припущень щодо задачі /I/-/3/ виконуються умови:

1/ $f_i \in Lip_u, L, i=\overline{1,n}$;

2/ $\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right| \leq C, i,j=\overline{1,n}, (x,t)\in\bar{\Omega}, |u|<\infty$;

3/ $\alpha_i(x)\neq 0, i=\overline{1,n}$;

4/ $\operatorname{rang} R_1 = \operatorname{rang} R_2 = 4n+np$;

5/ $q_i<1, i=\overline{1,4}$;

6/ $\det \Gamma(t)\neq 0, \forall t\in[0,T]$.

Тоді в області Ω існує єдиний класичний розв"язок задачі /I/-/3/.

Доводимо цю теорему за допомогою методу характеристик і принципу стискуючих відображень. Зокрема, вводимо невідомі функції $\varphi_i(x)=u_i(x,0)$, $i=\overline{1,n}$; $\mu_j(t)=u_j(0,t)$, $j=\overline{1,k}$ і $\nu_s=u_s(l,t)$, $s=\overline{k+1,n}$. Для функцій $\varphi_i(x), \mu_j(t)$, і $\nu_s(t)$ отримаємо деякі системи рівнянь, існування розв"язків яких гарантується умовами теореми. Після знаходження цих функцій, маємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра щодо невідомих $u_i(x,t), i=\overline{1,n}$.

I. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Дифференц. уравнения. I985. Т.2I № 2. С.246-253. 2. Мельник З.О. Общие граничные задачи для линейных гиперболических систем на прямой. Львов, I987. 47 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, I987, № I28I - Ук 87. 3. Мельник З.О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. I98I. Т.I7. № 6. С.I096-II04. 4. Пташник Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., I984.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.9I