УДК 517.948

В.А.Козицький

РІВНЯННЯ ТИПУ ЗГОРТКИ ДЛЯ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Нехай $\sigma=\{t_n\}_{-\infty}^{\infty}$ строго зростаюча послідовність дійсних чисел, таких що $t_{-n}=-t_n$, $\sigma\subset[-\alpha,\alpha[$, $0<\alpha<\infty$. Разом із l_1 і $AP_w\{\sigma\}$- простором майже-періодичних за Бором функцій, що зображаються абсолютно збіжним рядом Фур"є із заданим спектром σ, розглянемо спряжені простори, відповідно l_∞ і $AP_w^*\{\sigma\}$. Кожному елементові $f\in l_\infty$ за допомогою оператора W_σ поставимо у взаємно однозначну відповідність слабо збіжний ряд Фур"є $(W_\sigma f)(x)=$ $=\sum_{t_n\in\sigma} f_n\, e^{it_n x}=F(x)$, $x\in R$ – елемент простору $AP_w^*\{\sigma\}$. При цьому приймемо $\|F\|_{AP_w^*\{\sigma\}}=\|f\|_{l_\infty}$.
Відзначимо, що просторові $AP_w^*\{\sigma\}$ належить функціонал $\delta(x)=\sum_{t_n\in\sigma} e^{it_n x}$, для якого

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(x)\,dx=1.$$

Легко бачити, що для функції $\Phi(x)\in AP_w\{\sigma\}$ маємо рівність

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(x-t)\,\Phi(t)\,dt=\Phi(x)\ ,\ x\in R.$$

Визначимо оператор V :

$$[V\Phi(x)]_m=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(m-t)\,\Phi(t)\,dt=\Phi_m\,,\ m\in M, \qquad /1/$$

де $\Phi(x)\in AP_w\{\sigma\}$, $M=\{m=\pi\alpha^{-1}n:\ n\in\mathbb{Z}\}$.

<u>Означення.</u> Послідовність Φ_m, $m\in M$, визначена рівністю /1/, називається майже-періодичною послідовністю.

Із /1/ випливає, що Φ_m зображається абсолютно збіжним рядом Фур"є $\Phi_m=\sum_{t_n\in\sigma}\varphi_n\, e^{it_n m}$, $m\in M$.
Простір таких майже-періодичних послідовностей позначимо через $S\{\sigma\}$, з нормою $\|\Phi\|_{S\{\sigma\}}=\|\varphi\|_{l_1}$.
Використавши рівність $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}e^{i\tau k}=\begin{cases}1, & \tau=0\\ 0, & \tau\neq 0\end{cases}$,

одержимо

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\tilde{\delta}(x-m)\,\tilde{\delta}(m-t)=\tilde{\delta}(x-t),\ x,t\in\mathbb{R}. \qquad /2/$$

Використавши /2/, визначимо обернений оператор $V^{-1}: S\{\sigma\} \to AP_W\{\sigma\}$ за формулою

$$(V^{-1}\Phi_m)(x) = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m\tilde{\delta}(x-m) = \Phi(x), \; x\in\mathbb{R}. \quad /3/$$

Лема 1. Нехай $\Phi_m \in S\{\sigma\}$, $\Phi(x) \in AP_W\{\sigma\}$ і між собою зв"язані рівністю /3/. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m e^{-it_n m} = \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\Phi(x)e^{-it_n x}dx = \varphi_n, \; t_n\in\sigma.$$

Доведення.

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\Phi(x)e^{-it_n x}dx = \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\Big[\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m\tilde{\delta}(x-m)\Big]\times$$

$$\times e^{-it_n x}dx = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m\Big[\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(x-m)e^{-it_n x}dx\Big] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m e^{-it_n m} = \varphi_n, \; t_n\in\sigma.$$

Теорема. Оператор $V: AP_W\{\sigma\} \to S\{\sigma\}$ – ізометричний ізоморфізм.

Доведення безпосередньо випливає з формули

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}|\Phi_m|^2 = \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|\Phi(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varphi_n|^2,$$

справедливість якої встановлюється простим прямим підрахунком.

Визначимо оператори Ω_σ, Ω_σ^{-1}:

$$(\Omega_\sigma\varphi)(m) = \sum_{t_n\in\sigma}\varphi_n e^{it_n m} = \Phi_m, \; m\in M,$$

$$(\Omega_\sigma^{-1}\Phi_m)(n) = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m e^{-it_n m} = \varphi_n, \; t_n\in\sigma,$$

де $\varphi_n \in l_1$, $\Phi_m \in S\{\sigma\}$.

Оператор Ω_σ має такі с ми властивості, як і дискретний оператор Фур"є для періодичних функцій. Перечічимо деякі з них.

1. Згортка послідовностей. Нехай $\Phi, u \in S\{\sigma\}$, тоді

$$H_m = (\Phi * u)(m) = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_{m-p}u_p, \; m\in M$$

і при цьому

$$(\Omega_\sigma^{-1}H)(n) = \varphi_n u_n \; (\in l_1), \; t_n\in\sigma.$$

Лема 2. Нехай $\Phi(x)$, $G(x)\in AP_W\{\sigma\}$; $\Phi, G\in S\{\sigma\}$ і зв"язані між собою рівністю /1/. Тоді

$$[V(\Phi(x) * G(x))](m) = (\Phi * G)(m), \; m\in M.$$

Доведення здійснюємо за схемою доведення леми 1 із використанням рівності /2/.

2. Зсув аргумента на число $p\in M$. Нехай $\Phi\in S\{\sigma\}$, тоді $(\Omega_\sigma^{-1}\Phi_{m-p})(\kappa)=\varphi_\kappa e^{-it_\kappa p}$ $(\in l_1)$, $t_\kappa\in\sigma$.

Для майже-періодичних послідовностей можна розглядати рівняння типу згортки

$$\lambda\Phi_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}K_{m-p}\Phi_p=G_m\ ,\quad m\in M, \qquad /4/$$

$$\lambda\Phi_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}[A_{m-p}+B_{m+p}]\Phi_p=C_m\ ,m\in M, \qquad /5/$$

де $\lambda\in\mathbb{C}$, $K_m, A_m, B_m, G_m\in S\{\sigma\}$ – відомі, а $\Phi_m\in S\{\sigma\}$ – розв"язок рівняння.

Розглянемо рівняння /4/. За допомогою оператора Ω_σ^{-1} рівняння /4/ зводиться до простого рівняння

$$(\lambda+K_n)\varphi_n=g_n\quad ,\ t_n\in\sigma,$$

де $\varphi_\kappa, K_n, g_n\in l_1$.

У випадку $\lambda\neq 0$ множник $\lambda+K_n$ може перетворюватись у нуль лише для скінченного числа елементів $t_n\in\sigma$. Якщо $\lambda+K_n\neq 0$, тоді рівняння /4/ має безумовний і єдиний у $S\{\sigma\}$ розв"язок

$$\Phi_m=\lambda^{-1}G_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}R_{m-p}G_p\ ,\quad m\in M,$$

це $R_m=\Omega_\sigma[-\lambda^{-1}K_n(\lambda+K_n)^{-1}](m)\in S\{\sigma\}$.
Якщо множник $\lambda+K_n$ перетворюється в нуль $\varkappa$ раз для $\{t_{n_j}\}_{j=1}^{\varkappa}=\Delta\subset\sigma$, тоді однорідне рівняння /4/ має $\varkappa$ лінійно незалежних розв"язків $e^{it_{n_j}m}$, $t_{n_j}\in\Delta$, $m\in M$, а неоднорідне рівняння має в $S\{\sigma\}$ розв"язок

$$\Phi_m=\lambda^{-1}G_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}Q_{m-p}G_p+\sum_{t_{n_j}\in\Delta}c_j e^{it_{n_j}m}\ ,\ m\in M$$

при виконанні $\varkappa$ умов розв"язальності

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}G_m e^{-it_{n_j}m}=0\ ,\quad t_{n_j}\in\Delta,$$

де $Q_m=\Omega_{\sigma\setminus\Delta}[-\lambda^{-1}(\lambda+K_n)](m)\in S\{\sigma\}$, c_j – довільні комплексні числа. У випадку $\lambda=0$ множник K_n може перетворюватись у нуль як на скінченній множині, так і на зчисленній множині Δ, $\Delta \subset \sigma$. У цьому випадку рівняння /4/ має розв"язок у $S\{\sigma\}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\{g_n K_n^{-1}\} \in l_1$$

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)^{-1} \sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N} G_m e^{-it_{nj}m} = 0, \quad t_{nj} \in \Delta .$$

При виконанні цих умов розв"язок рівняння /4/ у $S\{\sigma\}$ має вигляд

$$\Phi_m = \sum_{t_{nj}\in\Delta} c_j e^{it_{nj}m} + \sum_{t_n\in\sigma\setminus\Delta} g_n K_n^{-1} e^{it_n m}, \quad m \in M,$$

де $\{c_j\}_{t_{nj}\in\Delta}$ – довільна комплекснозначна послідовність із l_1.

Рівняння /5/ досліджується аналогічним чином.

І. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М., 1953. 2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971. 3. Fan K. Les fonctions asymptotiquement presqueperiodiques d'une variable entiére et leurs applications á l'etnde de l'iteration des transformations continues // Math. Z. 1942/43. №48. S.685-711.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.91

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ОБЕРНЕНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА

Нехай G – півплощина при $t>0$, $G^s \subset G$ – область, обмежена деякою наперед невідомою кривою $\gamma: x=s(t)$ $(s(0)=0, s(t) \in C^1[0,T]$ та прямими $x=l$, $t=0$, $t=T$.

Задача полягає у знаходженні кривої γ разом із функціями $u(x,t)$, $f(t)$ з умов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F(x,t,u,u_t,u_x)f(t), \quad /1/$$

$$u(s(t),t) = h_1(s(t),t), \; u(l,t) = h_2(t), \; 0<t\le T, \quad /2/$$

$$u(x,0) = g_0(x), \; u_t(x,0) = g_1(x), \; 0\le x\le l, \quad /3/$$