перетворюватись у нуль як на скінченній множині, так і на зчисленній множині $\Delta$, $\Delta \subset \sigma$. У цьому випадку рівняння /4/ має розв"язок у $S\{\sigma\}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\{g_n K_n^{-1}\} \in l_1,$$

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)^{-1} \sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N} G_m e^{-it_{nj}m} = 0, \quad t_{nj} \in \Delta.$$

При виконанні цих умов розв"язок рівняння /4/ у $S\{\sigma\}$ має вигляд

$$\Phi_m = \sum_{t_{nj}\in\Delta} c_j e^{it_{nj}m} + \sum_{t_n\in\sigma\setminus\Delta} g_n K_n^{-1} e^{it_n m}, \quad m \in M,$$

де $\{c_j\}_{t_{nj}\in\Delta}$ – довільна комплекснозначна послідовність із $l_1$.

Рівняння /5/ досліджується аналогічним чином.


1. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М., 1953. 2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971. 3. Fan K. Les fonctions asymptotiquement presqueperiodiques d'une variable entiére et leurs applications á l'etnde de l'iteration des transformations continues // Math. Z. 1942/43. №48. S.685-711.


Стаття надійшла до редколегії 19.02.91

УДК 517.956


В.М.Кирилич


## ОБЕРНЕНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА

Нехай $G$ – півплощина при $t>0$, $G^s \subset G$ – область, обмежена деякою наперед невідомою кривою $\gamma: x = s(t)$ $(s(0) = 0, s(t) \in C^1[0,T]$ та прямими $x = l$, $t = 0$, $t = T$.

Задача полягає у знаходженні кривої $\gamma$ разом із функціями $u(x,t)$, $f(t)$ з умов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F(x,t,u,u_t,u_x) f(t), \quad /1/$$

$$u(s(t),t) = h_1(s(t),t), \; u(l,t) = h_2(t), \; 0<t\le T, \quad /2/$$

$$u(x,0) = g_0(x), \; u_t(x,0) = g_1(x), \; 0<x\le l, \quad /3/$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = H(t), \qquad /4/$$

$$s(t) = \int_0^t \alpha(u_x(S(\tau),\tau))\,d\tau, \quad (0 \leq t \leq T). \qquad /5/$$

Припускаємо, що $\lambda_i(x,t) \in C^3[\bar{G}^s]$, $\lambda_i(x,t) \geq \lambda - const > 0$ для всіх $(x,t) \in \bar{G}^s$, $F(x,t,u,u_t,u_x)$ – неперервна по всіх змінних у $\bar{G}^s \times R^3$, неперервно диференційована по $x$, $u$, $u_t$, $u_x$, а похідні по $u$, $u_t$, $u_x$ – рівномірно обмежені, $\alpha(u_x(S(t),t))$ – неперервна в $R$ і має в ній обмежену похідну по $u_x$. Нехай також – $\lambda_1(S(t),t) < s'(t) < \lambda_2(S(t),t)$ при $t \in [0,T]$. Крім цього, вважаємо, що $g_0(x) \in C^2[0,l]$, $g_1(x) \in C^1[0,l]$, $h_1(y,t) \in C^2(R \times [0,T])$, $h_2(t), H(t) \in C^2[0,T]$; виконуються умови узгодження в кутових точках

$$F(0,l,h_2(0), g_1(l), H(0)) \neq 0. \qquad /6/$$

У близькій постановці "пряма" гіперболічна задача Стефана описана у праці [3]. Такі задачі виникають у багатьох фізичних процесах [2]. Обернені гіперболічні задачі розглянуті багатьма авторами, зокрема відзначимо працю [1]. Дослідження обернених гіперболічних задач з невідомими межами нам не відомі.

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x,t)$ розв"язки характеристичного рівняння $d\xi/d\tau = \lambda_i(\xi,\tau)$, $\xi(\tau) = x$ $(i=\overline{1,2})$.

Справедлива теорема.

<u>Теорема.</u> При виконанні наведених вище умов існує $\varepsilon > 0$ таке, що задача /1/–/5/ має єдиний класичний розв"язок $u(x,t) \in C^2(\bar{G}^s_\varepsilon)$, $s(t) \in C^1[0,\varepsilon]$, $f(t) \in C[0,\varepsilon]$.

Доведемо цю теорему згідно з методикою [2, 3] за такою схемою. Вибравши функцію $s(t)$ з відповідного класу /вибирати слід таким чином, щоб виконувалися всі припущення щодо функції $S(t)$ в околі початку координат/, зведемо задачу /1/–/5/ до еквівалентної системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду [3]:

$$\underset{(x,t)\in\Pi_0}{u(x,t)} = \gamma_0(x,t) + \int_0^t f(\tau)\,d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)\,d\xi,$$

$$u(x,t) = h_1(s(t^s(x,t)), t^s(x,t)) + \gamma_1(x,t) +$$
$(x,t)\in \Pi_1$

$$+ \int_{t^s(x,t)}^{t} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi + \qquad /7/$$

$$+ \int_0^{t^s(x,t)} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_2(\tau;s(t^s(x,t)),t^s(x,t))}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi$$

$$u(x,t) = h_2^l(t^l(x,t)) + \gamma_2(x,t) +$$
$(x,t)\in \Pi_2$

$$+ \int_{t^l(x,t)}^{t} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi +$$

$$+ \int_0^{t^l(x,t)} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_1(\tau;l,t^l(x,t))} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi$$

$$(0\leq t\leq T)$$

та ще дванадцяти рівнянь щодо $u_x$, $u_t$, $u_{tx}$, $u_{xx}$, які одержують диференціюванням наведених співвідношень. Тут $\gamma_i$, $(i=\overline{0,2})$, $G$ – відомі функції; $t^s(x,t)$ і $t^l(x,t)$ – ординати точок перетину відповідних характеристик з кривою $\gamma$ та прямою $x=l$.

Для знаходження $f(t)$ підставимо значення $\frac{\partial u}{\partial x}((x,t)\in\Pi_2)$ в умову /4/. У результаті одержимо інтегральне рівняння Вольтерра першого роду щодо функції $f(t)$

$$\beta(t) = \int_0^t G_1(l,t,\varphi_1(\tau;l,t),\tau)F(\varphi_1(\tau;l,t),\tau,u,u_t,u_x)f(\tau)d\tau,$$

або в результаті диференціювання маємо

$$f(t) = P(t) + \int_0^t R(t,\tau,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tx})f(\tau)d\tau \qquad /8/$$

/функції $\beta(t), G_1$, $P$, $R$ – відомі, які можна легко записати через вихідні дані задачі/.

Таким чином, для визначення функцій $u$, $u_t$, $u_x$, $u_{tx}$, $u_{xx}$, $f(t)$, $s(t)$ отримаємо нелінійну систему інтегродиференціальних рівнянь /5/, /7/–/ /, яку для малих $t$ можна розв"язати методом стискуючих відображень [2].

I. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. М., 1988. 2. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. № 3. С.497-503. 3. Мельник З.О. Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 8. С. 13-15.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.92

УДК 517.95

Н.М.Задорожна

## НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Задачі без початкових умов для рівнянь параболічного типу у певних аспектах досліджені у працях [I, 2]. Такі задачі мають важливе як теоретичне, так і практичне значення, оскільки описують нестаціонарні процеси, які не залежать від початкових умов протягом достатньо великого проміжку часу.

У даній праці для лінійного параболічного рівняння другого порядку в необмежених по $t$ паралелепіпедах розглянуті задача без початкових умов та змішана задача з періодичними по $x$ крайовими умовами. Встановлені умови існування та єдиності розв"язків задач, а у випадку змішаної задачі досліджено також питання асимптотичної поведінки розв"язку при $t \to +\infty$.

1. Вкажемо на деякі допоміжні відомості та функціональні простори, використані у праці [4]:

$H^1(\Omega)$ – гільбертовий простір з нормою

$$\|u(x)\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x))\,dx, \quad \nabla u = \mathrm{grad}\,u;$$

$L^\infty((0,T);X)$ – простір суттєво обмежених функцій $u(t) \in ((0,T) \to X)$