/функції $\beta(t), G_1, P, R$ — відомі, які можна легко записати через вихідні дані задачі/.

Таким чином, для визначення функцій $u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, f(t), s(t)$ отримаємо нелінійну систему інтегродиференціальних рівнянь /5/, /7/-/ /, яку для малих t можна розв"язати методом стискуючих відображень [2].

1. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. М., 1988. 2. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. № 3. С.497-503. 3. Мельник З.О. Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 8. С. 13-15.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.92

УДК 517.95

Н.М.Задорожна

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Задачі без початкових умов для рівнянь параболічного типу у певних аспектах досліджені у працях [1, 2]. Такі задачі мають важливе як теоретичне, так і практичне значення, оскільки описують нестаціонарні процеси, які не залежать від початкових умов протягом достатньо великого проміжку часу.

У даній праці для лінійного параболічного рівняння другого порядку в необмежених по t паралелепіпедах розглянуті задача без початкових умов та змішана задача з періодичними по x крайовими умовами. Встановлені умови існування та єдиності розв"язків задач, а у випадку змішаної задачі досліджено також питання асимптотичної поведінки розв"язку при $t \to +\infty$.

1. Вкажемо на деякі допоміжні відомості та функціональні простори, використані у праці [4]:

$H^1(\Omega)$ — гільбертовий простір з нормою

$$\|u(x)\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x))dx, \nabla u = grad u;$$

$L^\infty((0,T);X)$ — простір суттєво обмежених функцій $u(t) \in ((0,T) \to X)$

/ X - банахів простір/, вимірних за Бохнером з нормою

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty((0,T);X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(x,t)\|_X .$$

За теоремою Данфорда-Петтіса $L^\infty((0,T);X)=[L^1((0,T);X)]^*$.

У теорії нерефлексивних просторів важливу роль відіграє твердження [3]:

Теорема 1 [2]. Якщо E - сепарабельний лінійний нормований простір, то у будь-якій обмеженій послідовності неперервних лінійних функціоналів на E міститься слабо збіжна підпослідовність.

2. В області $\Pi=\{(x,t): x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,\ t\in(-\infty,T),T>0\}$, $\Omega=\{(x_1,\dots,x_n): 0<x_i<1,\ i=\overline{1,n}\}$ розглядаємо задачу

$$Lu\equiv u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}-c(x,t)u=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(x,t)\big|_{x_i=0}=u(x,t)\big|_{x_i=1},\ i=\overline{1,n}, \qquad /2/$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x_i=0}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x_i=1},\ i=\overline{1,n}, \qquad /3/$$

де коефіцієнти рівняння /1/ такі, що

$$\nu_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\mu_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ \nu_0>0,\ \xi\in\mathbb{R}^n, \qquad /4/$$

$$a_{ij}(x,t)\big|_{x_i=0}=a_{ij}(x,t)\big|_{x_i=1};\ a_{ij}=a_{ji},\ i,j=\overline{1,n}, \qquad /5/$$

$$\max|c(x,t);\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x,t)|\le M,\ M>0. \qquad /6/$$

Функцію $u(x,t)\in L^\infty_{loc}((-\infty,T);H^1(\Omega))$ або $u(x,t)\in H^1_{loc}(\Pi)$ називаємо узагальненим розв'язком задачі /1/-/3/, якщо вона задовольняє умову /2/ і рівність

$$\int_\Pi u_t v\psi\,dxdt+\int_\Pi\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\psi-\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}v\psi-$$
$$-cuv\psi\Big)dxdt=\int_\Pi fv\psi\,dxdt \qquad /7/$$

для довільних функцій $v(x)\in H^1(\Omega)$ і $\psi(t)\in C_0^\infty(\mathrm{int}(-\infty,T))$.

Теорема 2. Нехай справджуються умови /4/-/6/ і нехай існує $\mu\ge0$ таке, що для всіх $(x,t)\in\Pi$ виконуються умови

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\mu+\frac{d}{dt}a_{ij}\right)\xi_i\xi_j\le\tilde{\mu}_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\ ,\ \tilde{\mu}_0>0,\ \xi\in\mathbb{R}^n; \qquad /8/$$

$$\int_{\Pi}e^{\mu t}f^2\,dxdt<\infty;$$

$$\mu\le4\pi^2\left(\nu_0-\tilde{\mu}_0-M\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi^2}\right)\right)-1-\delta\ ,\ (0<\delta<1). \qquad /9/$$

Тоді існує узагальнений розв"язок $u(x,t)$ задачі /I/-/3/, такий що $u_t\in L^2_{loc}(\Pi)$.

Доведення. Побудуємо послідовність наближених розв"язків задачі /I/-/3/

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}c_k^N(t)\varphi_k(x)\ ,\ \ N\in\mathbb{N}\ , \qquad /10/$$

де $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - повна ортогональна система функцій у $H^1(\Omega)$, які задовольняють умові /2/ [3]. В одновимірному випадку $(n=1)$ такою системою є функції $\{1;\ \cos 2\pi mx,\ \sin 2\pi mx,\ m=1,2,\ldots\}$. Використавши метод Гальоркіна для визначення коефіцієнтів $c_k^N(t)$, отримаємо систему рівнянь

$$\int_{\Omega}(u_t^N\varphi_k+a_{ij}u^N_{x_i}\varphi_{kx_j}-b_iu^N_{x_i}\varphi_k-cu^N\varphi_k)dx=\int_{\Omega}f\varphi_k dx,\ k=\overline{1,N}. \qquad /11/$$

Із /10/ і /11/ випливає, що функції $c_k^N(t)(k=\overline{1,N})$ є розв"язком системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, який, як відомо, однозначно визначається умовами Коші $c_k^N(t_0)=0\ (k=\overline{1,N})$ /ці умови задаємо додатково/.

Для того, щоб показати обмеженість побудованих таким чином наближених розв"язків $u^N(x,t)\ (N\in\mathbb{N})$ у скінченних областях, введемо дві апріорні оцінки. З цією метою помножимо кожне рівняння системи /11/ на $e^{\mu t}c_k^N(t)$, додамо їх та оцінимо члени отриманого рівняння, використовуючи нерівності Гельдера і Пуанкаре. Тоді одержимо нерівність

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}e^{\mu t}(u^N)^2dx+\left(\nu_0-\frac{M}{2}-\frac{1+\mu+\delta+2M}{4\pi^2}\right)\int_{\Pi_\tau}e^{\mu t}|\nabla u^N|^2dxdt\le \qquad /12/$$

$$\le\frac{1}{2}\int_{\Pi_\tau}e^{\mu t}f^2dxdt,$$

де $\Pi_\tau=\Omega\times[t_0,\tau]$, Ω_τ - верхня основа Π_τ.

При виведенні другої апріорної оцінки домножимо кожне рівняння системи /II/ на $e^{\mu t}\frac{d}{dt}c_k^N(t)$ та застосуємо аналогічні до попереднього випадку міркування. Тоді отримаємо оцінку

$$-\left(\tilde{\mu}_0+M+\frac{M}{2\pi^2}\right)\int\limits_{\Pi_\tau} e^{\mu t}|\nabla u^N|^2\,dxdt+\nu_0\int\limits_{\Omega_\tau} e^{\mu t}|\nabla u^N|^2dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{\Pi_\tau} e^{\mu t}(u_t^N)^2dxdt\leqslant\int\limits_{\Pi_\tau} f^2e^{\mu t}\,dxdt. \qquad /13/$$

Із нерівностей /12/ і /13/, враховуючи невід"ємність коефіцієнта при $\int\limits_{\Pi_\tau} e^{\mu t}|\nabla u^N|^2dxdt$ /за умови теореми/, одержимо нерівність

$$\|u^N\|^2_{L^\infty((-\kappa,T);H^1(\Omega))}+\|u^N\|^2_{H^1(\Pi_\kappa)}\leqslant C(\kappa)\ , \qquad /14/$$

де $\Pi_\kappa=\Omega\times(-\kappa,T)$; $C(\kappa)=const\, e^{\mu\kappa}$.

На основі теореми і в кожному скінченному паралелепіпеді Π_κ з послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\{u^{i,\kappa}\}_{i=1}^{\infty}$, яка, в свою чергу, є підпослідовністю $\{u^{i,\kappa-1}\}_{i=1}^{\infty}$. Ці підпослідовності такі, що для кожного $\kappa=\overline{1,\infty}$

$$u^{i,\kappa}\xrightarrow[i\to\infty]{}u^\kappa \quad -\ * \ -\text{слабо в } L^\infty((-\kappa,T);H^1(\Omega));$$
$$u^{i,\kappa}\xrightarrow[i\to\infty]{}u^\kappa \quad -\text{слабо в } H^1(\Pi_\kappa). \qquad /15/$$

Легко показати, що в Π_1 $u^\kappa=u^{\kappa-1}=\ldots=u^1$.
Далі, вибравши з послідовності $\{u^{i,\kappa}\}_{i,\kappa=1}^{\infty}$ діагональну підпослідовність $\{u^{i,i}\}_{i=1}^{\infty}$, показуємо

$$u^{i,i}\xrightarrow[i\to\infty]{}u \quad -\ * \ -\text{слабо в } L^\infty_{loc}((-\infty,T);H^1(\Omega));$$
$$u^{i,i}\xrightarrow[i\to\infty]{}u \quad -\text{слабо в } H^1_{loc}(\Pi), \qquad /16/$$

де $u(x,t)=\{u^\kappa(x,t):(x,t)\in\Pi_\kappa\}$ – узагальнений розв"язок задачі /1/–/3/.

<u>Теорема 3.</u> Нехай виконуються умови /4/–/6/ і нехай існує $\mu\in\mathbb{R}$ таке, що справедлива нерівність

$$\mu\leqslant 4\pi^2\left(2\nu_0-M\left(1+\frac{1}{2\pi^2}\right)\right)-1\ . \qquad /17/$$

Тоді в класі функцій $u(x,t)$, таких, що $\int\limits_{\Pi} e^{\mu t} u^2 dxdt<\infty$, задача /I/-/3/ не може мати більш як один узагальнений розв"язок.

<u>Доведення</u>. Нехай існують два узагальнених розв"язки $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$ задачі /I/-/3/. Тоді функція $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ задовольняє умови /2/, /3/ т рівняння $Lu=0$. Домноживши це рівняння на $ue^{\mu t}$, проінтегрувавши по області Ω та оцінивши члени отриманого рівняння, одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}(ue^{\frac{\mu t}{2}})^2_t dx \le \left(M-2\nu_0+\frac{1+2M+\mu}{\pi^2}\right)\int\limits_{\Omega} e^{\mu t}|\nabla u|^2 dx . \qquad /18/$$

Проінтегрувавши нерівність /I8/ по t у межах від $-\infty$ до T, матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_T} u^2 e^{\mu t} dx \le \left(M-2\nu_0+\frac{1+2M+\mu}{4\pi^2}\right)\int\limits_{\Pi} e^{\mu t}|\nabla u|^2 dxdt, \qquad /19/$$

це Ω_T - верхня основа П. На основі /I9/, враховуючи /I7/, робимо висновок про неможливість існування двох різних розв"язків задачі /I/-/3/.

3. Розглянемо тепер в області $\Pi'=\{(x,t): x\in\Omega, t\in(0;+\infty)\}$ для рівняння /I/ задачу з умовами /2/, /3/ та умовою

$$u(x,0)=u_0(x) . \qquad /20/$$

<u>Теорема 4.</u> Нехай в області Π' виконуються умови /4/-/6/ і нехай існує таке $\mu\in\mathbb{R}$, що задовольняються нерівності /8/, /9/ і нерівність $\int\limits_{\Pi'} e^{\mu t} f^2 dxdt<\infty$. Тоді в області Π' існує узагальнений розв"язок $u(x,t)$ задачі /I/-/3/, /20/, такий що $u_t\in L^2_{loc}(\Pi')$.

<u>Доведення</u> теореми аналогічне доведенню теореми 2, але в апріорних оцінках /I2/, /I3/ інтегрування виконуємо по областях Π'_τ і Ω'_τ, це $\Pi'_\tau=\Omega\times[0,\tau]$, Ω'_τ - верхня основа Π'_τ. Додатково з"являються нові члени $\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(u_0^N)^2 dx$ і $\mu_0\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0^N|^2 dx$. Із цих нових апріорних оцінок, враховуючи /9/, одержуємо нерівність

$$c_1\int\limits_{\Omega'_\tau}((u^N)^2+|\nabla u^N|^2)e^{\mu t}dx + c_2\int\limits_{\Pi'_\tau}(|\nabla u^N|^2+(u_t^N)^2)e^{\mu t}dxdt \le$$
$$\le c_3\int\limits_{\Omega}((u_0^N)^2+|\nabla u_0^N|^2)dx , \qquad /21/$$

де c_1, c_2, c_3 - константи.

Із нерівності /2I/ бачимо, що залежно від μ ($\mu<0, \mu=0, \mu>0$) маємо обмеженість послідовності наближених розв"язків $\{u^N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ задачі /I/-/3/, /20/ або в області Π', або лише в скінченних областях.

При $\mu > 0$ і $\mu = 0$ із нерівності /21/ випливає нерівність

$$\|u^N\|^2_{L^\infty((0,T);H^1(\Omega))} + \|u^N\|^2_{H^1(\Pi'_T)} \leq const\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}\text{ , де } \Pi'_T = \Omega \times [0,T], \qquad /22/$$

При $\mu < 0$ маємо

$$\|u^N\|^2_{L^\infty((0,T);H^1(\Omega))} + \|u^N\|^2_{H^1(\Pi'_T)} \leq C(T)\text{ , де } C(T) = const \cdot e^{\mu t}, \mu > 0, \qquad /23/$$

Із нерівності /22/ бачимо, що послідовність $\{u^N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ обмежена в області Π'. На основі теореми і з цієї послідовності можна вибрати таку підпослідовність $\{u^K(x,t)\}_{K=1}^{\infty}$, що

$$\begin{cases} u^K \xrightarrow[K\to\infty]{} u & \text{— * — слабо в } L^\infty_{loc}((0;+\infty);H^1(\Omega)); \\ u^K \xrightarrow[K\to\infty]{} u & \text{— слабо в } H^1_{loc}(\Pi'). \end{cases}$$

Показуємо, що $u(x,t)$ є узагальненим розв"язком задачі /1/–/3/, /20/. З нерівності /23/ випливає, що узагальнений розв"язок даної задачі при $t \to +\infty$ зростатиме не швидше, ніж експонента, і слабка збіжність буде лише в скінченних областях Π'_T. Вибір діагональної підпослідовності і доведення того, що вона збігається до узагальненого розв"язку задачі /1/–/3/, /20/, здійснюємо так само, як і у випадку задачі /1/–/3/.

Теорема 5. Якщо в області Π' виконуються умови /4/–/6/ та існує $\mu \in \mathbb{R}$, для якого справедлива оцінка /17/, то в класі функцій $u(x,t)$, для яких $\int_{\Pi'} e^{\mu t} u^2 dx dt < \infty$, задача /1/–/3/, /20/ не може мати більш як один узагальнений розв"язок.

Доведення теореми виконуємо аналогічно доведенню теореми 3, але нерівність /18/ інтегруємо по t в межах від 0 до j ($j = 1, 2, \ldots$).

Результати роботи переносяться на системи параболічних рівнянь вигляду /1/.

1. И в а с и ш е н С.Д. О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий //Дифф. уравнения. 1978. Т.14. № 2. С.201–205. 2. И в а с и ш е н С.Д. О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. 1982. Т.34. № 5. С.168–169. 3. К о л м о г о р о в А.Н., Ф о м и н С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1989. 4. Л и о н с Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.92