УДК 517.956

П.Я.Пукач

ПРО ЗАДАЧУ З ВИДОЗМІНЕНОЮ ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ

Параболічні рівняння та системи, що вироджуються за часовою змінною, досліджені у багатьох працях [2-5].

Мета даної праці - вивчення змішаної задачі для лінійної та нелінійної параболічних систем, що вироджуються у початковий момент часу. Застосовано таку видозмінену початкову умову, що завжди гарантує єдиність розв"язку вищезгаданої задачі.

У циліндричній області $Q=\Omega\times S$, $S=(0,T)$ розглянемо змішану задачу

$$\Phi(t)u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x,t)u_{x_i}+ \qquad /1/$$
$$+C(x,t)u=F(x,t),$$

$$u|_{\Gamma}=0, \qquad /2/$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-c_1}u=0. \qquad /3/$$

Щодо Q припустимо: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ - обмежена область, $\partial\Omega\in C^2$, $\Gamma=\partial\Omega\times S$ - бічна поверхня Q.

Припустимо також, що Φ, A_{ij}, B_i, C $(i=\overline{1,n})$ - квадратні матриці розмірності m, $F=(F_1,\dots,F_m)$.

Крім цього:

1^0. $\Phi(t)=diag[\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)]$,

$\varphi_i(t):\bar S\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,m}$; $\varphi_i(t)>0$, $t\in\bar S\setminus\{0\}$,

$\varphi_i(0)=0$, $\varphi_i(t)$ - нескінченно диференційовані на S функції;

$$(\Phi(t)\xi,\xi)\geq t^{\alpha}|\xi|^2,\ \alpha>0,$$
$$(\Phi'(t)\xi,\xi)\leq\alpha t^{\alpha-1}|\xi|^2.$$

$\forall t\in S$ - та довільного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n_m$.

2^0. Елементи матриць A_{ij}, $A_{ij_{x_k}}$ $(i,j,k=\overline{1,n})$ - обмежені в Q функції, причому

$$\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)\xi_i,\xi_j)\geq\nu\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$$

для майже всіх $(x,t)\in Q$ та довільного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n_m$.

3^0. Елементи матриць $B_i(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$ – обмежені в Q функції, такі що $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{x\in\Omega} \|B_i(x,t)\| = b(t)$, причому $\max\limits_{t\in\bar{S}} b(t) \le \frac{\nu}{A_0+1}$, де A_0 – константа відомої нерівності Фрідріхса для функцій з $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$.

4^0. $\left(\frac{C(x,t)}{t^{\alpha-1}}\xi,\xi\right) \le c_1|\xi|^2$, $c_1 \ge 0$

для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}_m^n$.

Таким чином, якщо $c_1 = 0$, то умова /3/ є звичайною початковою умовою. Якщо ж $c_1 > 0$, то розглядаємо розв"язки задачі /1/, /2/, що з певною швидкістю спадають при $t \to 0$.

Теорема 1.

Нехай виконуються умови 1^0–4^0. Тоді задача /1/–/3/ має не більш як один розв"язок $u(x,t)$, такий що

$$t^{\alpha/2}u \in L_m^\infty(S;L^2(\Omega)).$$

Приклад.

Розглянемо змішану задачу для скалярного рівняння:

$$tu_t - \varepsilon u_{xx} + cu = 0,\quad c<0, \qquad /4/$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad /5/$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-|c|}u(x,t) = 0. \qquad /6/$$

Задача /4/, /5/ з початковою умовою $\lim\limits_{t\to 0} t^{-|c|+2\varepsilon}u(x,t) = 0$ має нетривіальні розв"язки вигляду $u = const\cdot t^{-c-\varepsilon}\sin x$. Таким чином, умова /6/, а отже, і /3/, визначає точний клас єдиності розв"язку змішаної задачі для системи /1/.

Нехай далі

5^0. $F(x,t)\,t^{-\frac{1}{2}(\alpha+\varkappa+[\varkappa])} \in L^2(Q)$, $\alpha + 2c_1 = \varkappa$, $[\varkappa]$ – ціла частина $\varkappa$.

Теорема 2.

Нехай виконуються умови теореми 1, а також умова 5^0. Тоді задача /1/–/3/ має розв"язок $u(x,t)$, такий що

$$t^{-c}u \in L_m^\infty(S;L^2(\Omega)),$$

$$u \in L_m^2(S;\overset{0}{H}{}^1(\Omega)).$$

В області Q , описаній вище, розглянемо систему

$$\Phi(t)u_t + A(u) + C(x,t)u = F(x,t). \qquad /7/$$

Залишимо в силі припущення 1^0 та 4^0 щодо матриць $\Phi(t)$ і $C(x,t)$. Вважатимемо, що оператор $A: V^m \to (V^*)^m$, $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $p>2$, який фігурує в системі /7/, має вигляд

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_0(x, |\nabla u|^{p-1}) |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \omega_1(x) |u|^{p-2} u.$$

Щодо функцій ω_0 та ω_1 припускатимемо виконання певних умов, що гарантують хемінеперервність, монотонність та коерцитивність оператора A , як, наприклад, у праці [1].

Теорема 3.

Нехай A - оператор описаного вище вигляду, виконуються умови 1^0, 4^0. Тоді задача /7/, /2/, /3/ має не більш як один розв"язок $u(x,t)$, такий що

$$t^{\alpha/2} u \in L^{\infty}_m(S; L^2(\Omega)).$$

Припускаємо далі:

5^0а. $$\int_0^T \frac{\|F\|^q_{(V^*)^m}}{t^{1+2[\varkappa]}}\, dt < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Теорема 4.

Нехай виконуються умови 1^0, 4^0, 5^0а. Тоді існує розв"язок $u(x,t)$ задачі /7/, /2/, /3/, такий що

$$t^{-c_1} u \in L^{\infty}_m(S; L^2(\Omega)), \quad u \in L^p_m(S; V),$$

$$t^{\alpha} u_t \in L^q_m(S; V^*).$$

1. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 2. Глушак А.В., Шмулевич С.Д. О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравнения. 1986. Т.2?. № 6. С.1065-1068. 3. Калашников А.С Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. 1971. № 2. С.29-35. 4. Мысовских П.И. Об обобщенных решениях некоторых вырождающихся уравнений параболического типа // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. № 3. С.468-478. 5. Friedman Avner, Schuss Zeev. Degenerate evolution equations in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1971 Vol. 161. P.401-427.

Стаття надійшла до редколегії 24.06.92