УДК 512.55

О.Д.Артемович

ПРО ПРАВІ ГАМІЛЬТОНОВІ КІЛЬЦЯ. III

Кільце R називається правим гамільтоновим /скорочено rh -кільцем/, якщо всі його власні підкільця є правими ідеалами. У цій статті продовжимо дослідження rh -кілець. Скористаємося тією ж термінологією, що й раніше [1-3]. Через $\mathbb{Z}^*$ позначимо множину $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Спочатку сформулюємо два твердження, необхідні нам надалі.

Твердження А [1]. Нехай R - кільце без кручення. Тоді R - rh - кільце, якщо і тільки якщо або 1/ $R^2=0$, або 2/ R ізоморфне кільцю, породженому ненульовим цілим числом κ , тобто $R\simeq\langle\kappa\rangle$, $\kappa^2=\alpha\kappa$, α - ненульове ціле число, або 3/ $R=J+\langle t\rangle$, $J^2=0$, $J\cap\langle t\rangle=0$, $tJ=0$, $t^2=\beta t$, $it=\beta i$ для будь-якого елемента $i\in J$.

Твердження Б [2, 3]. Нехай R - періодичне кільце, причому $0\neq\mathcal{L}(R)\neq R$, де $\mathcal{L}(R)$ - радикал Левицького. Тоді R - rh - кільце, якщо і тільки якщо $R=T+\Phi$, $\Phi\cdot T=0$, $T\cap\Phi=0$, $T=\sum_{p\in I_1}\oplus\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_p$ - rh-p-ніль-кільце, $\langle e_p\rangle\simeq\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $\Phi=\sum_{p\in I_2}\oplus\langle e_p\rangle$, множина I_1 /відповідно I_2 / непорожня і складається з різних простих чисел, причому якщо $q\in I_1\cap I_2$, то або $e_q\mathcal{L}_q=\mathcal{L}_q e_q=0$, або $\mathcal{L}_q^2=0, le_q=e_q$ для кожного ненульового $l\in\mathcal{L}_q$.

Одержимо результати.

Теорема 1. Нехай R - кільце зі змішаним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$. Тоді R - rh - кільце, якщо і тільки якщо $R=R_1\oplus R_2$, $R_1=\mathcal{L}(R_1)+\langle a\rangle$ - rh-кільце фактор-кільцем $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ без кручення, $R_2\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $o(a)=\infty$, $a^3=\nu a^2$, $o(a^2-\nu a)=\pi$, де π та m - вільні від квадратів ненульові цілі числа, а ν - ненульове ціле число, яке ділиться на π .

Теорема 2. Нехай R - змішане кільце з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$. Тоді R - rh -кільце, якщо і тільки якщо $R=T\oplus\Phi$, де підкільце T - неперіодичне rh -ніль-кільце, підкільце R^2 періодичне, $\Phi=\sum_p\oplus\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ - пряма сума по різних простих p .

Достатність у теоремах 1 і 2 перевіряється безпосередньо. Тому доведемо лише необхідність умов цих теорем.

Доведення теореми 1. Необхідність. Унаслідок леми 3 [1] фактор-кільце $R/\mathcal{L}(R)$ комутативне, а тому також гамільтонове. Звідси внаслідок [4] випливає $R/\mathcal{L}(R)=\langle\bar{a}\rangle$, де $O(\bar{a})=\infty$, $\bar{a}^2\neq\bar{0}$. Отже, $R=\mathcal{L}(R)+\langle a\rangle$, де a – прообраз елемента $\bar{a}$ в кільці R, причому, як випливає з описання гамільтонових кілець з однією твірною, підкільце $\langle a\rangle=\langle a_1\rangle\oplus R_2$, $O(a_1)=\infty$, $\nu\in\mathbb{Z}^*$, $R_2\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$, $m>1$, $m|\nu$, m – вільне від квадратів простих чисел і або $a_1^2=\nu a_1$, або $a_1^3=\nu a_1^2$, $O(a_1^2-\nu a_1)=\pi$, π – ненульове ціле число, вільне від квадратів, та $\pi|\nu$.

Через R_1 позначимо підкільце $\langle\mathcal{L}(R),a\rangle$ кільця R. Зрозуміло, що $R=R_1+R_2$ та фактор-кільце $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ – zh-кільце без кручення. Крім цього, очевидно, $R_2R_1=0$.

Нехай t – довільний елемент із $\mathcal{L}(R)$ індекса нільпотентності n, причому $O(t)=p^k$. Тоді для одиничного елемента e кільця R_2 маємо $te=\alpha t+\beta t^2$, де $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, $te=te^2=\alpha te+\beta t^2e=\alpha te$. Крім цього, $0=tet^{n-2}=\alpha t^{n-1}$, а тому $(\alpha,p)\neq 1$. На основі цього $te=\alpha te=\ldots=\alpha^k te=0$, а отже, $\mathcal{L}(R)e=0$. Звідси, врахувавши, що $eR_2=R_2$, отримаємо $\mathcal{L}(R)R_2=0$ і, як наслідок, $R_1R_2=0$. Таким чином, $R=R_1\oplus R_2$. Теорема доведена.

Доведення теореми 2. Необхідність. Нехай z – довільний елемент із R. За теоремою 3 [5] $\langle z\rangle=S\oplus P$, де S – нільпотентне кільце, породжене одним елементом, $P\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m\neq 0$. На основі цього $R=\mathcal{F}(R)+\mathcal{L}(R)$, де $\mathcal{F}(R)$ – періодична частина кільця R. Оскільки $R/\mathcal{F}(R)$ – ніль-кільце без кручення, то згідно з твердженням А, $R^2\subseteq\mathcal{F}(R)$.

Якщо $\mathcal{F}(R)\cap\mathcal{L}(R)=0$, то $\mathcal{F}(R)\mathcal{L}(R)=\mathcal{L}(R)\mathcal{F}(R)=0$ тому $R=\mathcal{F}(R)\oplus\mathcal{L}(R)$ та $\mathcal{L}(R)^2=0$. За твердженням 2 [1], $\mathcal{F}(R)=\sum_p{}'\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – пряма сума по різних простих p. Однак тоді $\mathcal{F}(R)$ та $\mathcal{L}(R)$ – гамільтонові кільця, а тому і R також гамільтонове кільце.

Тепер припустимо, що $\mathcal{L}(R)\cap\mathcal{F}(R)\neq 0$. Тоді $\mathcal{F}(R)\neq\mathcal{L}(\mathcal{F}(R))\neq 0$ і будова кільця $\mathcal{F}(R)$ описана в твердженні Б. На основі цього отримаємо, що $R=\mathcal{F}(R)+\mathcal{L}(R)=T+\Phi$, $T\cap\Phi=0$, $\Phi T=0$, T – змішане zh-ніль-кільце, підкільце R^2 періодичне, $\Phi=\sum_p\oplus\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $(n\in\mathbb{N})$ – пряма сума по різних простих p. Якщо $a\in T$ та $O(a)=\infty$, то $ae=\gamma a+\delta a^2$, де $\gamma,\delta\in\mathbb{Z}$, а отже, $\gamma a=ae-\delta a^2\in\mathcal{F}(R)$. Звідси $\gamma=0$, $ae=\delta a^2$ та $ae=ae^2=\delta a^2e=\delta ea=0$. Нехай b – довільний елемент скінченного порядку із T. Тоді $O(a+b)=\infty$ і $(a+b)e=0$, звідки також $be=0$. Таким чином, $R=T\oplus\Phi$. Теорема доведена.

1. Артемович О.Д. Про праві гамільтонові кільця.I // Віон. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С.70-73. 2. Артемович О.Д. О правых гамильтоновых кольцах // VI Симпоз. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. совещ. Львов. 11-13 сент. 1990. Львов, 1990. 3. Артемович О.Д. Про праві гамільтонові кільця.II // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.43-45. 4. Фрейдман П.А. Письмо в редакцию /по поводу статьи М.Шперлинга/ // Матем. сб. 1960. 52/94/. № 3. С.915-916. 5. Фрейдман П.А. Кольца с идеализаторным условием.II // Ученые зап. Урал. ун-та. 1959. Вып. 23. Тетрадь I. С.35-38.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.91

УДК 515.12

О.Й.Ткач

ПРО ТОПОЛОГІЮ ПОПОВНЕНОГО ПРОСТОРУ ЧАСТКОВИХ ФУНКЦІЙ З ОПУКЛИМИ ОБЛАСТЯМИ ВИЗНАЧЕННЯ

Топологізація простору часткових відображень за допомогою топології В"еторіса розглянута у праці [2]. У даній статті досліджується простір часткових функцій з областями визначення, що є компактними опуклими підмножинами в R^n. Доводиться, що поповнення такого простору є абсолютним ретрактом у класі метричних просторів.

Нехай $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ – множина неперервних функцій, визначених на компактних опуклих підмножинах простору $\mathbb{R}^n$. Для кожної функції $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ через $\operatorname{gr} f$ позначимо графік f, $\operatorname{gr} f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$.

Відображення $\operatorname{gr}: C_{vcc}(\mathbb{R}^n)\to \exp(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ є вкладенням та індукує на $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ топологію В"еторіса [2]. Надалі ототожнюватимемо множину $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ з її образом при відображенні gr. Позначимо через $\bar{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ замикання множини $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ в $\exp(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$. Для кожного $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ через $\operatorname{dom} f$ позначимо область визначення f, через $[x,y]$ замкнений відрізок з кінцями $x,y\in\mathbb{R}^n$.