ченного порядку із T. Тоді $O(a+b)=\infty$ і $(a+b)e=0$, звідки також $be=0$. Таким чином, $R=T\oplus\Phi$. Теорема доведена.

1. Артемович О.Д. Про праві гамільтонові кільця.І // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С.70-73. 2. Артемович О.Д. О правых гамильтоновых кольцах // VI Симпоз. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. совещ. Львов. 11-13 сент. 1990. Львов, 1990. 3. Артемович О.Д. Про праві гамільтонові кільця.ІІ // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.43-45. 4. Фрейдман П.А. Письмо в редакцию /по поводу статьи М.Шперлинга/ // Матем. сб. 1960. 52/94/. № 3. С.915-916. 5. Фрейдман П.А. Кольца с идеализаторным условием.ІІ // Ученые зап. Урал. ун-та. 1959. Вып. 23. Тетрадь І. С.35-38.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.91

УДК 515.12

О.Й.Ткач

ПРО ТОПОЛОГІЮ ПОПОВНЕНОГО ПРОСТОРУ ЧАСТКОВИХ ФУНКЦІЙ З ОПУКЛИМИ ОБЛАСТЯМИ ВИЗНАЧЕННЯ

Топологізація простору часткових відображень за допомогою топології В'єторіса розглянута у праці [2]. У даній статті досліджується простір часткових функцій з областями визначення, що є компактними опуклими підмножинами в R^n. Доводиться, що поповнення такого простору є абсолютним ретрактом у класі метричних просторів.

Нехай $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ – множина неперервних функцій, визначених на компактних опуклих підмножинах простору $\mathbb{R}^n$. Для кожної функції $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ через $\mathrm{gr} f$ позначимо графік f, $\mathrm{gr} f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$.

Відображення $\mathrm{gr}: C_{vcc}(\mathbb{R}^n)\to \exp(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ є вкладенням та індукує на $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ топологію В'єторіса [2]. Надалі ототожнюватимемо множину $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ з її образом при відображенні gr. Позначимо через $\overline{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ замикання множини $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ в $\exp(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$. Для кожного $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ через $\mathrm{dom}\, f$ позначимо область визначення f, через $[x,y]$ замкнений відрізок з кінцями $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Лема 1. $\tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)=\{A\in \exp^c(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}) \mid pr_1 A$ – опукла множина, і для кожного $x\in pr_1 A$ множина $(\{x\}\times\mathbb{R})\cap A$ опукла.

Доведення. Нехай $A\in\tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$. Безпосередньо з означення випливає, що $pr_1 A$ – опукла множина. Припустимо, що для деякого $x\in pr_1 A$ існують точки $a_1, a_2, b\in\mathbb{R}$, $a_1<b<a_2$, такі що $(x,a_i)\in A$, $(x,b)\notin A$. Існує $\delta>0$, таке що $O_\delta(x,b)\cap A=\phi$. Можна вважати, що $\delta<\min\{b-a_1, a_2-b\}/2$.

За означенням A, існує така функція $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$, що $d_H(grf, A)<\delta/2$. Тоді існують $z_1, z_2\in \operatorname{dom} f$, такі що $d((z_i, f(z_i)),(x,a_i))<\delta/2$. Звідси маємо, що $d(x,z_i)<\delta/2$.

Оскільки за вибором δ маємо $f(z_1)<b<f(z_2)$, то існує $z\in[z_1,z_2]$, таке що $f(z)=b$. Тоді $d((x',y'),(z,f(z)))<\delta/2$. Нехай $(x',y')\in A$ – така точка, що $d((x',y'),(z,f(z)))<\delta/2$ /така точка існує, оскільки $d_H(grf,A)<\delta/2$ /. Тоді $d((x,b),(x',y'))\le$ $\le d((x,b),(z,f(z))+d((z,f(z)),(x',y'))<\delta/2+\delta/2=\delta$, і ми одержуємо суперечність.

Навпаки, нехай $A\in\exp^c(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ задовольняє умову твердження і задане $\varepsilon>0$.

Нехай B – поліедральний опуклий компакт в R^n, такий що $B\subset pr_1 A$ і $d_H(B,pr_1A)<\varepsilon/2$. Виберемо тріангуляцію $\mathcal{T}$ компакта B, використовуючи, якщо треба, операцію барицентричного підрозбиття, таку що для множини всіх вершин $x_1,\dots,x_k$ тріангуляції $\mathcal{T}$ існують такі числа $y_1,\dots,y_k$, що множина $\{(x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)\}$ утворює $\varepsilon/2$ – сітку компакта A в $R^n\times R$.

Визначимо функцію $f:B\to\mathbb{R}$ таким чином. Нехай $x\in B$ і $x=\sum_{j=1}^m\alpha_j x_{i_j}$, і $\alpha_j\in[0,1]$, $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ – вершини симплекса тріангуляції $\mathcal{T}$, що містить x. Тоді, за означенням, $f(x)=\sum_{j=1}^m\alpha_j y_{i_j}$.

Очевидно, що $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$. Покажемо, що $d_H(grf,A)<\varepsilon$. Нехай $y\in grf$, тоді існує $x\in K\subset pr_1A$, де K – деякий симплекс тріангуляції $\mathcal{T}$, що містить точку x і $y=f(x)$. Позначимо через $K_1\ni y$ образ симплекса K при відображенні f. Оскільки $pr_1: A\to pr_1A$ –монотонне відображення, то $pr_1^{-1}(K)\cap A$ зв"язна множина. Тоді симплекс K_2, утворений паралельним перенесенням симплекса K відносно вертикальної осі в точку (x,y), не містить жодної точки з A, оскільки його діаметр менший, ніж $\varepsilon/2$. Однак $K_1\cap K_2\neq\emptyset$, тому K_2 розбиває множину $pr_1^{-1}(K)\cap A$, що суперечить її зв"язності. Отже, існує точка $a\in A$, така що $d(y,a)<\varepsilon$. З іншого боку, для кожної $a\in A$ знайдеться $p=(x_{i_j},y_{i_j})\in grf$, така що $d(a,p)<\varepsilon$.

Лема доведена.

Позначимо через $\mathcal{A} = \{A \in exp^c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \mid pr_1 A$ – опукла множина і визначимо відображення $\tau : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{C}}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$,
$\tau(A) = \cap \{ B \in \widetilde{\mathcal{C}}_{vcc}(\mathbb{R}^n) \mid B \supset A \}$ для кожної $A \in \mathcal{A}$.

Лема 2. Відображення τ є неперервним.

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{A}$, $\varepsilon > 0$. Покажемо, що $\tau(O_{\varepsilon/4}(A)) \subset O_\varepsilon(\tau(A))$. Справді, нехай $B \in \mathcal{A}$, $d_H(A,B) < \varepsilon/4$, $p = (x,y) \in \tau(A)$. Очевидно, якщо $p \in A \subset \tau(A)$, то знайдеться $b \in B \subset \tau(B)$, таке що $d(p,b) < \varepsilon/4 < \varepsilon$.

Якщо $p \in \tau(A) \setminus A$, то розглянемо вертикальний відрізок $[a_1, a_2]$, де $a_1 = (p_1, \alpha_1)$, $a_2 = (p_1, \alpha_2)$ і $a_1, a_2 \in A$. Нехай $b_1, b_2 \in B$, такі що $d(a_i, b_i) < \varepsilon/4$. Існує $f \in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$, для якого $d_H(grf, \tau(B)) < \varepsilon/4$, зокрема, знайдуться точки $c_1, c_2 \in gr\, f$, такі що $d(b_i, c_i) < \varepsilon/4$. За теоремою про середнє значення для функції $f|O_{\varepsilon/2}(p_1)$ існує $t_1 \in O_{\varepsilon/2}(p_1)$, така що $f(t_1) = p_2$. Звідси $d((p_1,p_2),(t_1,p_2)) < \varepsilon/2$. Існує $z \in \tau(B)$, таке що $d(t,z) < \varepsilon/4$, де $t = (t_1, p_2) \in grf$. Тоді $d(p,z) \leq d(p,t) + d(t,z) \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon$.

Аналогічно доводять, що $\tau(B) \subset O_\varepsilon(\tau(A))$. Лема доведена.

Оскільки $\tau|_{\widetilde{\mathcal{C}}_{vcc}(\mathbb{R}^n)} = id$, то відображення τ є ретракцією множини $\mathcal{A}$ на $\widetilde{\mathcal{C}}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$.

Надалі будемо використовувати теорему.

Теорема /друга теорема Ханнера/ [1]. Якщо метризовний простір X є зчисленним об"єднанням своїх відкритих підмножин G_i, $i = 1,2,\ldots$, які є $ANR(\mathcal{M})$ – просторами, то X є $ANR(\mathcal{M})$ – простором.

Легко бачити, що $exp^c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} exp^c(]-m,m[^{n+1})$, причому $exp^c(]-m,m[^{n+1})$ – відкриті множини в $exp^c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ і $\mathcal{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m$, де $\mathcal{A}_m = \{A \in exp^c(]-m,m[^{n+1}) \mid pr_1 A$ – опукла множина, причому кожна $\mathcal{A}_m$ відкрита в $\mathcal{A}$.

Опираючись на сформульовану теорему Ханнера, обмежимося розглядом простору $exp^c(]-m,m[^{n+1})$ і його підмножини $\mathcal{A}_m$.

Задамо відображення $\alpha : exp^c(]-m,m[^{n+1}) \to \mathbb{R}_+$,

$$\alpha(A) = d_H(pr_1 A, C(pr_1 A));$$

$$\beta : exp^c(]-m,m[^{n+1}) \to exp^c(]-m,m[^{n+1}),$$

$$\beta(A) = pr_1^{-1}(C(pr_1 A)),$$

де pr_1 – відображення проектування в R^n; $C(A)$ – опукла оболонка множини A, тобто перетин всіх опуклих множин, що містять A.

Легко бачити, що відображення α і β неперервні, оскільки відображення pr_1, взяття опуклої оболонки і p_1^{-1} не збільшують відстані між множинами.

Позначимо через $exp_c^c(]-m,m[^{n+1})$ підмножину $exp^c(]-n,m[^{n+1})$, яка містить опуклі множини. Визначимо відображення
$\Phi : exp^c(]-m,m[^{n+1}) \times \mathbb{R}_+ \times exp_c^c(]-m,m[^{n+1}) \to exp^c(]-m,m[^{n+1})$,
$\Phi(A,\varepsilon,B) = \overline{O_\varepsilon(A)} \cap B$, якщо $A \subset B$.

Лема 3. Відображення Φ є неперервним.

Доведення. Нехай $(A,\varepsilon,B) \subset exp^c(]-m,m[^{n+1}) \times \mathbb{R}_+ \times exp_c^c(]-m,m[^{n+1})$, такі що $A \subset B$ і $\eta > 0$. Покажемо, що $\Phi(O_\delta(A), O_\delta(\varepsilon), O_\delta(B)) \subset \subset O_\eta(\Phi(A,\varepsilon,B))$, $0<\delta<\eta/4$. Візьмемо довільну точку (A_1,ε_1,B_1) добутку $exp^c(]-m,m[^{n+1}) \times \mathbb{R}_+ \times exp_c^c(]-m,m[^{n+1})$, для якої виконуються умови $A_1 \subset B_1$, $d_H(A_1,A)<\delta$, $|\varepsilon-\varepsilon_1|<\delta$, $d_H(B,B_1)<\delta$. Тоді $d_H(\Phi(A,\varepsilon,B),\Phi(A_1,\varepsilon_1,B_1))<\eta$. Справді, нехай $c \in \Phi(A,\varepsilon,B)$, тобто $c \in \overline{O_\varepsilon(A)}$ і $c \in B$. Тоді знайдуться точки $a \in A$ і $a_1 \in A$, такі що $d(a,c) \leq \varepsilon$, $d(a,a_1) < \delta$. Легко бачити, що на прямій, яка проходить через точку a паралельно відрізку $[c,a]$, існує точка $c_1 \in O_{\varepsilon_1}(A_1)$, розміщена від точки c на відстані меншій, ні 2δ, тобто $d(c,c_1)<2\delta$. Позначимо через $\lambda = d(c_1,a)$. Знайдеться точка $b_1 \in B$, така що $d(c,b_1) < \delta$. З опуклості множини B_1 випливає, що $[a_1,b_1] \subset B_1$.

Знайдемо на відрізку $[a_1,b_1]$ або на його продовженні точку c_2, таку що $d(c_2,a_1)=\lambda$. Оскільки $d(a_1,b_1) \leq \leq d(a_1,c_1) + d(c_1,b_1) \leq d(a_1,c_1)+d(c_1,c)+d(c,b_1)<\lambda+2\delta+\delta=\lambda+3\delta$, то $d(c_2,b_1)<3\delta$ і $d(c,c_2) \leq d(c,b_1)+d(b_1,c_2)<\delta+3\delta<\eta$.

Вкладення $\Phi(A_1,\varepsilon_1,B_1) \subset O_\eta(\Phi(A,\varepsilon,B))$ можна перевірити аналогічним чином.

Лема доведена.

Задамо відображення $R: exp^c(]-m,m[^{n+1}) \to \mathcal{A}_m$, $R(A) = \Phi(A,\alpha(A),\beta(A))$. Із неперервності відображень α,β і Φ випливає неперервність відображення R. Очевидно, що R є ретракцією простору $exp^c(]-m,m[^{n+1})$ на $\tilde{c}_{vcc}(]-m,m[^{n+1})$.

Теорема. Простір $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ є абсолютним ретрактом у класі метричних просторів.

Доведення. Оскільки $exp^c(]-m,m[^{n+1}) \in AR(\mathcal{M})$ [3], то $\tilde{c}_{vcc}(]-m,m[^{n+1}) \in AR(\mathcal{M})$ і з другої теореми Ханнера випливає, що $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n) \in ANR(\mathcal{M})$. Однак простір $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ очевидно, є стягуваним, тому $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n) \in AR(\mathcal{M})$.

Наслідок. Нехай U – відкрита множина в R^n. Тоді $\tilde{c}_{vcc}(U)$ є абсолютним околовим ретрактом у класі метричних просторів.

Доведення. Нехай $A \in \tilde{c}_{vcc}(U)$. Позначимо через V відкриту опуклу підмножину U, таку що $pr_1 A \subset V \subset U$. Тоді $A \in \tilde{c}_{vcc}(V)$, де $\tilde{c}_{vcc}(V)$ – відкрита в $\tilde{c}_{vcc}(U)$ і $\tilde{c}_{vcc}(V) \in AR(\mathcal{M})$.

1. Б о р с у к К. Теория ретрактов. М., 1971. 2. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 3. Curtis D., Schori R.M. Hyherspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fund. Math. 1978. Vol. 101. N1. P. 19-38.

Стаття надійшла до редколегії 30.04.91

УДК 515.12

Л.Є.Базилевич, М.М.Зарічний

ПРО ОДИН ПРИКЛАД У ТЕОРІЇ М"ЯКИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Відображення метричних просторів $f: X \longrightarrow Y$ називається n -м"яким / $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ / [4], якщо для кожного паракомпакта Z, $\dim Z < n$, кожної замкненої підмножини $A \subset Z$ і кожної комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array}$$

існує таке відображення $\Phi: Z \longrightarrow X$, що $f \circ \Phi = \varphi$ та $\Phi | A = \psi$. Відображення називається нескінченно м"яким, якщо воно n -м"яке для кожного $n < \infty$, і називається абсолютно м"яким, якщо воно n -м"яке при $n = \infty$ [3, 4].

Перший приклад нескінченно м"якого не абсолютно м"якого AR-відображення на гільбертів куб Q навів О.М.Дранішніков [2]. При цьому істотно використаний відомий приклад Тейлора CE - відображення, що не є шейповою еквівалентністю [5]. Оскільки умова скінченновимірності бази часто дає істотне поліпшення властивостей відображення, то природним є таке запитання: чи існує нескінченно м"яке не абсолютно м"яке AR - відображення $f: X \longrightarrow Y$, де $\dim Y < \infty$?

Наведемо елементарний приклад такого відображення.

Приклад. Через Q позначаємо гільбертовий куб, $Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$ $(I_i = [0,1])$, $I^n = \{(x_i) \in Q \mid x_i = 0,\ i \geq n+1\}$, $S^{n-1} = \partial I^n$. Нехай $B_k = \{(x_i) \in Q \mid$