

1. Борсук К. Теория ретрактов М., 1971. 2. Фелдман В.В., Филиппов В.Д. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 3. Curtis D., Schori R.M. Hyerspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fund. Math. 1978, Vol. 101. №1. P. 19-38.

стаття надійшла до редколегії 30.04.91

УДК 515.12

Л.Є.Базилевич, М.М.Зарічний

ПРО ОДИН ПРИКЛАД У ТЕОРІЇ М'ЯКИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Відображення метричних просторів $f: X \longrightarrow Y$ називається n -м'яким / $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ / [4], якщо для кожного паракомпакта Z , $\dim Z \leq n$, кожної замкненої підмножини $A \subset Z$ і кожної комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

існує таке відображення $\Phi: Z \longrightarrow X$, що $f \circ \Phi = \varphi$ та $\Phi|_A = \psi$. Відображення називається нескінченно м'яким, якщо воно n -м'яке для кожного $n < \infty$, і називається абсолютно м'яким, якщо воно n -м'яке при $n = \infty$ [3, 4].

Перший приклад нескінченно м'якого не абсолютно м'якого AR-відображення на гільбертів куб Q навів ОМ.Дранішніков [2]. При цьому істотно використаний відомий приклад Тейлора SE-відображення, що не є шейповою еквівалентністю [5]. Оскільки умова скінченновимірності бази часто дає істотне поліпшення властивостей відображення, то природним є таке запитання: чи існує нескінченно м'яке не абсолютно м'яке AR-відображення $f: X \longrightarrow Y$, де $\dim Y < \infty$?

Наведемо елементарний приклад такого відображення.

Приклад. Через Q позначаємо гільбертовий куб,

$$Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i \quad (I_i = [0, 1]), \quad I^n = \{(x_i) \in Q \mid$$

$$x_i = 0, \ i \geq n+1\}, \quad S^{n-1} = \partial I^n. \quad \text{Нехай } B_n = \{(x_i) \in Q \mid$$

© Базилевич Л.Є., Зарічний М.М., 1993

$x_k = 0\}$, $B'_k = \{(x_i) \in Q \mid x_k = 1\}$ - k -ті грані куба Q .
Через $\text{Con}(X)$ позначимо конус над X . Вважаємо, що X лежить у $\text{Con}(X)$ як основа, і що $\text{Con}(A)$ природно лежить у $\text{Con}(X)$, якщо $A \subset X$.

Нехай $Y = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - збіжна послідовність, $X = \{(q, y) \in \text{Con}(Q) \times Y \mid \text{якщо } y = 1/n, \text{ то } q \in \text{Con}(S^n)\} \subset \text{Con}(Q) \times Y$, $f = \text{pr}_2 \mid X : X \rightarrow Y$,
 $\text{pr}_2 : \text{Con}(Q) \times Y \rightarrow Y$ - проектування/.

Покажемо, що сім'я $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ є рівностепенено локально стягнутою, тобто що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, для якого виконується умова: кожна підмножина діаметра $< \delta$ у $f^{-1}(y)$ стягується в точку по множині діаметра $< \varepsilon$.

Кожну точку з $\text{Con}(Q)$ запишемо у вигляді (q, t) , де $q \in Q$, $t \in [0, 1]$; при цьому $(q_1, 0) \sim (q_2, 0)$, $q_1, q_2 \in Q$.
Нехай d - стандартна метрика на Q , $d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$,
тоді метрика μ на $\text{Con}(Q)$ задається формулою

$$d((q_1, t_1), (q_2, t_2)) = \sqrt{(t_1 - t_2)^2 + (\max\{t_1, t_2\} d(q_1, q_2))^2}.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Нехай $A \subset \text{Con}(S^n)$, $\text{diam } A < \delta = \frac{\varepsilon}{8}$
і $\tau_0 = \inf\{t \mid (x, t) \in A\}$, $\tau_1 = \sup\{t \mid (x, t) \in A\}$.

Розглянемо два випадки.

1. $\tau_0 < \delta$. Тоді $\tau_1 < 2\delta$ і множина A стягується до вершини конуса вздовж твірних по множині діаметра $< 4\delta < \varepsilon$.
2. $\tau_0 \geq \delta$. Тоді існує $k \geq 1$ таке, що $\frac{\tau_0}{2^{k+1}} < \delta < \frac{\tau_0}{2^k}$. При деформаційній ретрації вздовж твірних підмножини $S^n \times [\tau_0, \tau_1] \subset \text{Con}(S^n)$ в $S^n \times \{\tau_0\} \subset \text{Con}(S^n)$ множина A перейде у множину A' діаметра $< \delta$. Тоді множина A' не перетинає однієї з двох множин $B_k \times \{\tau_0\}, B'_k \times \{\tau_0\}$.
Нехай для визначеності, $A' \cap (B'_k \times \{\tau_0\}) = \emptyset$, тоді відображення $H : A' \times I \rightarrow \text{Con}(S^n)$, $H((x_i), s) =$

$= ((x_1, \dots, x_{k-1}, s x_k, x_{k+1}, \dots), \tau_0), ((x_i), s) \in A'$,
задає деформацію множини A' на множину $A'' \subset (S^n \times B_k) \times \{\tau_0\}$.
Тоді $\text{diam}(A'') < \delta$ і, оскільки множина $S^n \times B_k$ опукла, то множину A'' можна стягнути лінійною гомотопією в точку по множині діаметра $< \delta$. Розглядаючи для кожної точки множини A її шлях при послідовних гомотопіях, одержуємо, що множина A стягується в точку по множині діаметра $< 8\delta = \varepsilon$.

Оскільки зведеного вище випливає, що сім'я $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} \in \text{equi-}LC^n$ для кожного n , то з леми 1.1 праці [3] одержуємо, що відображення f є n -м'яким для кожного $n < \infty$.

Покажемо, що відображення f не є м'яким. Нехай $Z = \{(q, y) \in Q \times Y \mid q \in I^{n+1}, \text{ якщо } y = 1/1\} \subset Q \times Y$ і $A = \{(q, y) \in Q \times Y \mid q \in S^n, \text{ якщо } y = 1/n\} \subset Z$. Розглянемо відображення $\varphi: Z \rightarrow Y$, $\varphi(q, y) = y$, $(q, y) \in Z$ і нехай $\psi: A \rightarrow X$ - вкладення. Припустимо, що відображення f м'яке. Тоді існує відображення $\Phi: Z \rightarrow X$, таке що $f \circ \Phi = \varphi$ та $\Phi|_A = \psi$. Очевидно, що $\Phi(S^n \times \{1/n\}) \subset \text{Con}(S^n) \times \{1/n\}$ і тому в просторі $\text{exp } X$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(S^n \times \{1/n\}) = \text{Con}(Q) \times \{0\}$. З іншого боку, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(S^n \times \{1/n\}) = \Phi(Q \times \{0\}) = Q \times \{0\} \subset \text{Con}(Q) \times \{0\}$ і ми одержуємо суперечність.

Умору рівностепеневості локальної стягуваності К.Борсук [1] узяв за основу топологізації гіперпростору $\text{anr}(X)$ компактних ANR -підмножин метричного простору X . Як показує наведений приклад /а також приклад з праці [2]/, мова локальної м'якості відображення $f: X \rightarrow Y$ не еквівалентна неперервності оберненого відображення $f^{-1}: Y \rightarrow \text{anr}(X)$.

Цим мотивований розгляд наступної топологізації $\text{anr}_S(X)$ множини $\text{anr}(X)$. За означенням, простір $\text{anr}_S(X)$ є k -простором, у якому множина $\mathcal{A} \subset \text{anr}_S(X)$ є компактною тоді і лише тоді, коли а/ $\mathcal{A}$ замкнена підмножина в $\text{exp } X$ і б/ канонічне відображення $p_{\mathcal{A}}: \mathcal{Y}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ локально м'яке. Тут $\mathcal{Y}(\mathcal{A}) = \{(x, A) \mid x \in A \in \mathcal{A}\} \subset X \times \mathcal{A}$, $p_{\mathcal{A}}(x, A) = A$, $(x, A) \in \mathcal{Y}(\mathcal{A})$. Перевага топологізації anr_S полягає в тому, що вона означена також для неметризованих просторів X .

Залишається відкритим таке запитання: чи простір $\text{anr}_S(X)$ метризований для метричного компакту X ?

І. Б о р с у к К. Теория ретрактов. М., 1971. 2. Д р а - н и ш н и к о в А.Н. Абсолютные F -значные ретракты и пространства функций в топологии поточечной сходимости // Сиб. мат. журн. 1986. Т.27. № 3. С.74-86. 3. Д р а н и ш н и к о в А.Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n -мягкие отображения, повышающие размерность // Успехи мат. наук. 1984. Т.39. Вып.5. С.55-95. 4. Ш е п и н Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып.3. С.3-62. 5. Taylor J.L. A counterexample in shape theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. Vol.81. P. 629-632.

Стаття надійшла до редакції 14.01.91