УДК 530.145

В.С.Барбуляк, Ю.Г.Кондратьєв

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ ГІББСІВСЬКИХ СТАНІВ КВАНТОВИХ ҐРАТКОВИХ СИСТЕМ

У праці [1] побудовані ймовірнісні міри

$$d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)) \qquad /1/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta(\Lambda), \mathcal{G}(\Lambda))$ при фіксованій граничній умові $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$ та

$$d\nu(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-E(\omega(\cdot))} d\nu_0(\omega(\cdot)) \qquad /2/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta, \mathcal{G})$. Існування міри /2/ еквівалентне існуванню гіббсівського стану системи, що відповідає гамільтоніану

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} p_k^2 + E(\omega(\cdot)) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(q_k). \qquad /3/$$

Наступна теорема, що узагальнює на квантовий випадок відому в класичному випадку теорему Добрушина [2], є критерієм існування гіббсівських станів у нескінченному об"ємі.

Теорема. Нехай для гамільтоніана /3/ маємо:

а/ компактну функцію h ;

б/ числа $c_{jl}, j, l \in \mathbb{Z}^d$ і сталу c, $0<c<1$, для яких

$$\forall j \quad \sum_l |c_{jl}| \le c;$$

в/ число $K > 0$,

такі що $\forall \Lambda, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty$ і граничної умови $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$, для якої

$$\max_{j\in\Lambda} \sum_{l\in\Lambda^c} |c_{jl}| h(\bar{\omega}_l) < \infty,$$

міра $d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot))$ існує і

$$\int h(\omega_j)\, d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) \le K + \sum_{l\ne j} c_{jl}\, h(\omega_l). \qquad /4/$$

Тоді сім"я мір $\{ \nu_\Lambda(\omega_\Lambda|\bar{\omega}_{\Lambda^c}), \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty \}$ слабо компактна.

Нехай, крім цього, $\forall j \in \mathbb{Z}^d$ $\forall a$ – неперервної обмеженої функції на $\mathcal{S}$ [1] знайдуться:

а/ послідовність множин $M_n \subset \mathbb{Z}^d, |M_n| < \infty$, $\bigcup_n M_n = \mathbb{Z}^d \setminus \{j\}$;

б/ числа $d_{jl}^{(n)} \geq 0, j \neq l$, для яких

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} d_{jl}^{(n)} \leq D^{(n)}, \quad D^{(n)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

в/ послідовність неперервних обмежених функцій

$f_n(\omega_{M_n})$, таких що

для будь-якої граничної умови $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$, для якої

$$\sum_{l \neq j} |c_{jl}| h(\bar{\omega}_l) < \infty,$$

справедлива оцінка

$$\left| \int a(\omega_j) d\nu_j(\omega_j(\cdot) | \bar{\omega}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{j\}}(\cdot)) - f_n(\omega_{M_n}) \right| \leq D^{(n)} + \sum_{l \neq j} d_{jl}^{(n)} h(\omega_l). \quad /5/$$

Тоді існує хоча б одна міра $d\bar{\nu}(\omega(\cdot))$, що відповідає гамільтоніану /3/ в тому розумінні, що її умовні розподіли задаються /I/.

Доведення. Фіксуємо ростучу послідовність множин $\Lambda_n, \Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda_n| < \infty$ і граничних умов $\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}$, таких що $\forall l \in \Lambda_n^c$ $h(\bar{\omega}_l) \leq A$ для деякої сталої А. Послідовність ймовірнісних мір ν_n на Ω_β побудуємо таким чином:

$$\nu_n(\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}) = 1, \quad d\nu_n = d\nu_{\Lambda_n}(\omega_{\Lambda_n}(\cdot) | \bar{\omega}_{\Lambda_n^c}(\cdot)) \quad \text{/див. /7/ [1].}$$

Лема 1. $\forall j$

$$\sup_n \int h(\omega_j) d\nu_n \leq \frac{K + cA}{1 - c} \equiv K_0.$$

Доведення. Оскільки $\forall n$ $\Omega_\beta(\Lambda_n)$ – сепарабельний метричний простір, то міра ν_n є щільною, тобто $\forall \varepsilon \exists K_\varepsilon^n \subset \Omega_\beta(\Lambda_n) \times$ $\times \nu_n(K_\varepsilon^n) > 1 - \varepsilon$. Тоді

$$\int h(\omega_j) d\nu_n = \int_{K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n + \int_{\Omega_\beta(\Lambda_n) \setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n.$$

Із абсолютної неперервності інтеграла випливає, що $\forall \eta \exists K_\varepsilon^n$

$$\int_{\Omega_\beta(\Lambda_n) \setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n < \eta.$$

З теореми Лузіна випливає існування неперервної функції $h^c(\omega_j)$ на $K_\varepsilon^n(j) \equiv K_\varepsilon^n \big|_{\Omega_\beta(\{j\})}$ такої, що міра множини $\{\omega_j | h(\omega_j) \neq h^c(\omega_j)\}$

є меншою від довільного додатного числа. На $K_\varepsilon^n(\bar{j})$ функція $h^c(\omega_{\bar{j}})$ досягає своєї верхньої межі, тому $\forall \varepsilon \forall n$

$$\int_{K_\varepsilon^n} h(\omega_{\bar{j}})\,d\nu_n$$

скінченний. Зафіксуємо числа ε і n. Тоді

$$\max_{j\in\Lambda_n} \int h(\omega_j)\,d\nu_n \equiv A_\varepsilon^n < \infty .$$

Вибравши те $\bar{j}$, при якому досягається максимум, підставивши у /4/ $\Lambda = \{\bar{j}\}$ і проінтегрувавши це співвідношення по мірі ν_n, отримаємо

$$A_\varepsilon^n \leqslant K + A_\varepsilon^n c + cA .$$

Отже,

$$\sup_n \sup_\varepsilon A_\varepsilon^n \leqslant \frac{K+cA}{1-c} ,$$

звідки і випливає твердження леми.

З цієї леми та співвідношення /6/, наведеного у праці [1], випливає, що ν_n – слабо компактна послідовність. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що до деякої граничної міри $\bar{\nu}$ збігається сама послідовність ν_n.

<u>Лема 2.</u> Нехай f – невід"ємна, півнеперервна знизу функція на метричному просторі X і послідовність ймовірнісних мір μ_n на X слабо збігається до деякої міри μ. Крім цього, $\forall n$

$$\int f\,d\mu_n \leqslant C.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int f\,d\mu_n \geqslant \int f\,d\mu .$$

<u>Доведення.</u> Для довільної міри χ, такої що

$$\int f\,d\chi \leqslant C,$$

справедлива оцінка

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{i-1}{K}+l\right)\chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l < f(x) \leqslant \frac{i}{K}+l\right\} \leqslant \int f\,d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{i}{K}+l\right)\chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l < f(x) \leqslant \frac{i}{K}+l\right\},\ x\in X.$$

Позначимо $G_i^l = \left\{x \,\middle|\, f(x) > \frac{i}{K}+l\right\}$. Тоді, зробивши очевидні перетворення і скориставшися скінченністю інтеграла функції f по мірі χ, отримаємо що

$$\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\chi(G_i^l) \leqslant \int f\,d\chi \leqslant \frac{1}{K} + \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\chi(G_i^l) .$$

Виписавши ланцюжок нерівностей

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int f d\mu_n \geq \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\mu_n(G_i^l) \geq \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(G_i^l) \geq$$
$$\geq \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\mu(G_i^l) \geq -\frac{1}{K}+\int f d\mu$$

і перейшовши до межі при $K\to\infty$, отримаємо твердження леми.

Із лем 1 і 2 випливає, що

$$\int h(\omega_j)d\bar{\nu} \leq K_0 .$$

Тут $\bar{\nu}$ – граничний розподіл, що відповідає гамільтоніану /3/, якщо для довільних вимірних $a(\omega_K)$, $b(\omega_\Lambda)$

$$\int a(\omega_K)b(\omega_\Lambda)d\bar{\nu} = \int b(\omega_\Lambda)d\bar{\nu}\int a(\omega_K)d\nu_K(\omega_K(\cdot)|\bar{\omega}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{K\}}(\cdot)) \quad /6/$$

Оскільки міра однозначно відновлюється при заданні її значень на неперервних обмежених функціях, то /6/ достатньо довести для $a(\omega_K)$, $b(\omega_\Lambda)$ неперервних і обмежених.

Для досить великих n, таких що $\Lambda\subset\Lambda_n$, справедлива рівність

$$\int a(\omega_K)b(\omega_\Lambda)d\nu_n = \int b(\omega_\Lambda)d\nu_n\int a(\omega_K)d\nu_K(\omega_K(\cdot)|(\bar{\omega}_{\Lambda_n\setminus\{K\}}\cup\bar{\omega}_{\Lambda_n^c})(\cdot)). \quad /7/$$

За означенням слабої збіжності ліва частина /7/ при $n\to\infty$ прямує до лівої частини /6/. Із /5/ випливають оцінки зверху і знизу для внутрішнього інтеграла у правій частині /7/. Підставивши ці оцінки у /7/ і використавши лему 1, отримаємо /6/. Теорема доведена.

1. Б а р б у л я к В.С., К о н д р а т ь є в Ю.Г. Задання гіббсівських станів квантових граткових систем в термінах функціональних інтегралів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Випуск 36. С.70–74. 2. Д о б р у ш и н Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1970. Т.15. Вып. 3. С.469–497.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.90