УДК 539.3

Ю.О.Пир"єв, Р.І.Мокрик

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТА ВЛАСТИВІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ РІВНЯНЬ РУХУ ДВОКОМПОНЕНТНОЇ ТЕОРІЇ СУМІШЕЙ

Рівняння руху взаємопроникних сумішей у випадку наявності лише механічних процесів має вигляд

$$\begin{aligned}
&m_{11}\Delta\vec{u}^{(1)}+l_{11}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(1)}+m_{12}\Delta\vec{u}^{(2)}+l_{12}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(2)}+\\
&\quad+\vec{X}^{(1)}=\rho_1\partial_t^2\vec{u}^{(1)}+l(\partial_t)(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}),\\
&m_{22}\Delta\vec{u}^{(2)}+l_{22}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(2)}+m_{21}\Delta\vec{u}^{(1)}+l_{21}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(1)}+\\
&\quad+\vec{X}^{(2)}=\rho_2\partial_t^2\vec{u}^{(2)}-l(\partial_t)(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}),
\end{aligned} \qquad /1/$$

де $\vec{u}^{(\alpha)}=(u_1^{(\alpha)},u_2^{(\alpha)},u_3^{(\alpha)})$ - вектор переміщення α -компоненти $(\alpha=1,2)$; $\vec{X}^{(\alpha)}=(X_1^{(\alpha)},X_2^{(\alpha)},X_3^{(\alpha)})$ - вектор об"ємних сил, які прикладені до α -компоненти $(\alpha=1,2)$; $l(\partial_t)$ - диференціальний оператор, який в загальному випадку можна зобразити як

$$l(\partial_t)=\sum_{j=0}^{2}\beta_j d_t^j;$$

$\vec{R}=-l(\partial_t)(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)})$ - сила міжфазної взаємодії; m_{nj}, l_{nj}, $\rho_n, \beta_j, n,j=1,2$, β_0 - фізичні постійні [7, 8].

У випадку $\beta_1=0$ система рівнянь /1/ описує рух механічної суміші двох пружних компонент, причому у працях [7, 9] вважається, що $\beta_2=0$, а в статті [5] - $\beta_2\neq 0$. У випадку $\beta_1=0$, $m_{22}=0$ система рівнянь /1/ описує рух двокомпонентного середовища: пориста матриця - рідина, причому у публікаціях [4, 6] $\beta_2=0$, а в працях [1, 10] $\beta_2\neq 0$.

Розв"язок системи /1/ подати як

$$\vec{u}^{(\alpha)}=B_1^{(\alpha)}(\partial_x,\partial_t)\vec{W}^{(1)}+B_2^{(\alpha)}(\partial_x,\partial_t)\vec{W}^{(2)} \quad \alpha=1,2, \qquad /2/$$

де невідомі тривимірні вектори $\vec{W}^{(\alpha)}(x,t)$ визначаються з рівнянь

$$D(\partial_x,\partial_t)\vec{W}^{(\alpha)}(x,t)=-\vec{X}^{(\alpha)}(x,t),\quad \alpha=1,2, \qquad /3/$$

а оператори $B_n^{(m)}(\partial_x, \partial_t)$ $n, m = 1,2$ мають вигляд

$$B_m^{(m)} \equiv A_m^{(m)} \operatorname{graddiv} + D_p^T D_{12}^L \,, \; B_n^{(m)} \equiv A_n^{(m)} \operatorname{graddiv} - D_T D_{12}^L \,,$$
$$p, m, n = 1,2 \,, \; n \neq m \,, \; m + p = 3 \,;$$
$$A_n^{(m)}(\partial_x, \partial_t) \equiv (l_{mj} D_L - l_{mn} D_j^L) D_p^T - (l_{jp} D_L - l_{np} D_j^L) D_T \,,$$
$$l_{12} = l_{21} \,, \quad D_n^f(\partial_x, \partial_t) \equiv \square_n^f - l(\partial_t) \,,$$
$$\square_n^L \equiv (l_{nn} + m_{nn})\Delta - \rho_n \partial_t^2 \,, \; \square_n^T \equiv m_{nn}\Delta - \rho_n \partial_t^2 \,,$$
$$n, m, j, p = 1,2 \,, \; n + j = 3 \,, \; m + p = 3 \,, \; f \equiv L, T \,;$$
$$D_L(\partial_x, \partial_t) \equiv (l_{12} + m_{12})\Delta + l(\partial_t) \,, D_T(\partial_x, \partial_t) \equiv m_{12}\Delta + l(\partial_t) \,,$$
$$D_{nm}^f(\partial_x, \partial_t) \equiv D_n^f D_m^f - D_f D_f \,,$$
$$n, m = 1,2 \,, \quad n \neq m \,, \quad f \equiv L, T. \qquad /4/$$

Оператор $D(\partial_x, \partial_t)$ у рівняннях /3/ є добутком
$$D(\partial_x, \partial_t) \equiv D_{12}^L(\partial_x, \partial_t) D_{12}^T(\partial_x, \partial_t) \,,$$
де оператори $D_{12}^f(\partial_x, \partial_t)$, $f \equiv L, T$ мають вигляд /4/ і записуються у вигляді полінома від оператора Лапласа:
$$D_{12}^f(\partial_x, \partial_t) \equiv \sum_{m=0,2,4} \Delta^{m/2} a_m^f(\partial_t) \,, \quad f \equiv L, T.$$
Коефіцієнти цього поліноміального диференціального оператора задаються співвідношеннями:
$$a_0^f(\partial_t) \equiv a_{04}^f \partial_t^4 + a_{03}^f \partial_t^3 + a_{02}^f \partial_t^2 \,, \; a_4^f(\partial_t) \equiv a_{40}^f \,,$$
$$a_2^f(\partial_t) \equiv a_{22}^f \partial_t^2 + a_{21}^f \partial_t + a_{20}^f \,, \quad f \equiv L, T;$$
$$a_{04}^L = a_{04}^T = C_1' \,, \; a_{03}^L = a_{03}^T = \beta_1 C_2' \,, \; a_{02}^L = a_{02}^T = \beta_0 C_2' \,,$$
$$C_1' = \rho_1 \rho_2 + \beta_2 C_2' \,, \quad C_2' = \rho_1 + \rho_2 \,,$$
$$a_{22}^f = -B_1^f \,, \, a_{21}^f = -\beta_1 B_2^f \,, \; a_{20}^f = -\beta_0 B_2^f \,, \; f \equiv L, T;$$
$$B_1^T = \rho_1 m_{22} + \rho_2 m_{11} + \beta_2 B_2^T \,, \; B_2^T = m_{11} + m_{11} + 2m_{12} \,,$$
$$B_1^L = \rho_1 (l_{22} + m_{22}) + \rho_2 (l_{11} + m_{11}) + \beta_2 B_2^L \,,$$
$$B_2^L = l_{11} + m_{11} + l_{22} + m_{22} + 2(l_{12} + m_{12}) \,,$$
$$a_{40}^L = (l_{11} + m_{11})(l_{22} + m_{22}) + (l_{12} + m_{12})^2 \,,$$
$$a_{40}^T = m_{11} m_{22} - m_{12}^2 = 0.$$

Зауважимо, що співвідношення /2/-/4/ у стаціонарному випадку переходять у відоме представлення [8].

Використавши відому методику [2, 3], можна довести справедливість такого твердження.

Якщо $\vec{X}^{(\alpha)} e^{-\omega_2 t} \in S'$, $\omega_2 > 0$,

де S' – простір узагальнених функцій повільного росту, які дорівнюють нулю для $t < 0$, то і розв"язок /2/ системи /1/ належить до цього ж простору:

$$\vec{u}^{(\alpha)} e^{-\omega_2 t} \in S', \ \omega_2 > 0, \ \alpha = 1,2 .$$

Для доведення цього твердження спочатку потрібно довести, що у верхній комплексній півплощині трансформанта перетворення Фур"є-Лапласа фундаментального розв"язку рівняння /3/ є аналітичною функцією.

1. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 3. № 6. С.1115-1123. 2. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Динамические свойства решений задач термоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 4. С.44-47. 3. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Свойства решений динамических задач обобщенной связанной термоупругости // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. Вып. 5. С.912-918. 4. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М., 1970. 5. Рушицкий Я.Я. К вопросу о применимости линейной теории смеси // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 6. С.62-65. 6. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т.8. № 4. С.133-150. 7. Хорошун Л.П. К теории взаимопроникающих смесей // Прикл. механика. 1977. Т.13. № 10. С.124-132. 8. Хорошун Л.П., Солтанов Г.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. К., 1984. 9. Bedford A., Stern M. Toward a diffusion continuum theory of composite materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1971. E38. No 1. P.8-14. 10. Biot M.A. Theory of propagation of elastik waves in a fluid-saturated porous. 1-low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. Vol. 28. No 2. P.168-178.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.92