УДК 539.3

Л.О.Тисовський

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПІВПРОСТОРІ З ТУНЕЛЬНИМ ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружний ізотропний півпростір, що містить тунельний отвір у вигляді прямокутника із заокругленими кутами. Сторони прямокутника $2a, 2b$; радіус заокруглення r. Поверхня півпростору вільна від зовнішніх навантажень, а контур отвору перебуває під дією рівномірно розподіленого нормального тиску інтенсивності p. Центр отвору розміщений на відстані h від вільної поверхні. Позначивши контур отвору через L_1, а межу півпростору - через L_0, граничні умови задачі запишемо у вигляді

$$N(t)+iT(t)=0, \quad t_0\in L; \qquad /1/$$

$$N(t_1)+iT(t_1)=-p, \quad t_1\in L_1, \qquad /2/$$

де N і T - відповідно нормальна і дотична компоненти вектора зовнішніх зусиль.

Таким чином, можна вважати, що виконуються умови плоскої деформації, тобто стан пружної рівноваги в тілі описується рівняннями плоскої задачі теорії пружності. У цьому випадку для визначення напружено-деформованого стану в довільній точці потрібно знайти три компоненти тензора напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ і дві складові вектора переміщень u, v, які можна визначити через дві функції комплексної змінної $\Phi(Z), \Psi(Z)$ [1]:

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(Z)+\overline{\Phi(Z)}],$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\overline{Z}\Phi'(Z)+\Psi(Z)],$$
$$2\mu\frac{\partial}{\partial X}(u+iv)=\varkappa\Phi(Z)-\overline{\Phi(Z)}-Z\overline{\Phi'(Z)}-\overline{\Psi(Z)}. \qquad /3/$$

З огляду на лінійність задачі комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі можна зобразити як

$$\Phi(Z)=\Phi_*(Z)+\Phi_1(Z)+\Phi_0(Z),$$
$$\Psi(Z)=\Psi_*(Z)+\Psi_1(Z)+\Psi_0(Z), \qquad /4/$$

де функції $\Phi_*(Z), \Psi_*(Z)$ характеризують напружено-деформований стан у нескінченному однорідному просторі при заданих зовнішніх чинниках; $\Phi_1(Z), \Psi_1(Z)$ – кусково-голоморфні функції, що мають стрибок на лінії L_1; $\Phi_0(Z), \Psi_0(Z)$ – функції, голоморфні у нижній півплощині.

Вважаючи, що головний вектор і головний момент зовнішніх зусиль, прикладених до контура L_1, дорівнює нулю і використавши результати праці [2], комплексні потенціали $\Phi_1(Z), \Psi_1(Z)$ зобразимо у вигляді

$$\Phi_1(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{Q(t)dt}{t - Z},$$

$$\Psi_1(Z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{Q(t)}d\bar{t}}{t - Z} + \frac{\bar{t}Q(t)dt}{(t-Z)^2} \right], \qquad /5/$$

де $Q(t)$ – невідома функція.

Для визначення функцій $\Phi_0(Z), \Psi_0(Z)$ скористаємося працею [3], тобто функцію $\Phi_0(Z)$ аналітично продовжимо через незавантажену поверхню у верхню півплощину та визначимо її у всій комплексній площині. Потім, увівши нові допоміжні функції, виконаємо крайові умови /1/. Унаслідок розв"язування отриманої граничної задачі теорії аналітичних функцій одержимо вирази для потенціалів:

$$\Phi_0(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{Q(t)dt}{z - \bar{T}} + \frac{(\bar{T} - T)\overline{Q(t)}d\bar{t}}{(z - \bar{T})^2} \right],$$

$$\Psi_0(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\bar{T}Q(t)dt}{(\bar{T} - Z)^2} + \left(\frac{1}{\bar{T} - z} + \frac{(\bar{T} + Z)(T - \bar{T})}{(\bar{T} - Z)^3} \right) \overline{Q(t)}d\bar{t} \right]. \qquad /6/$$

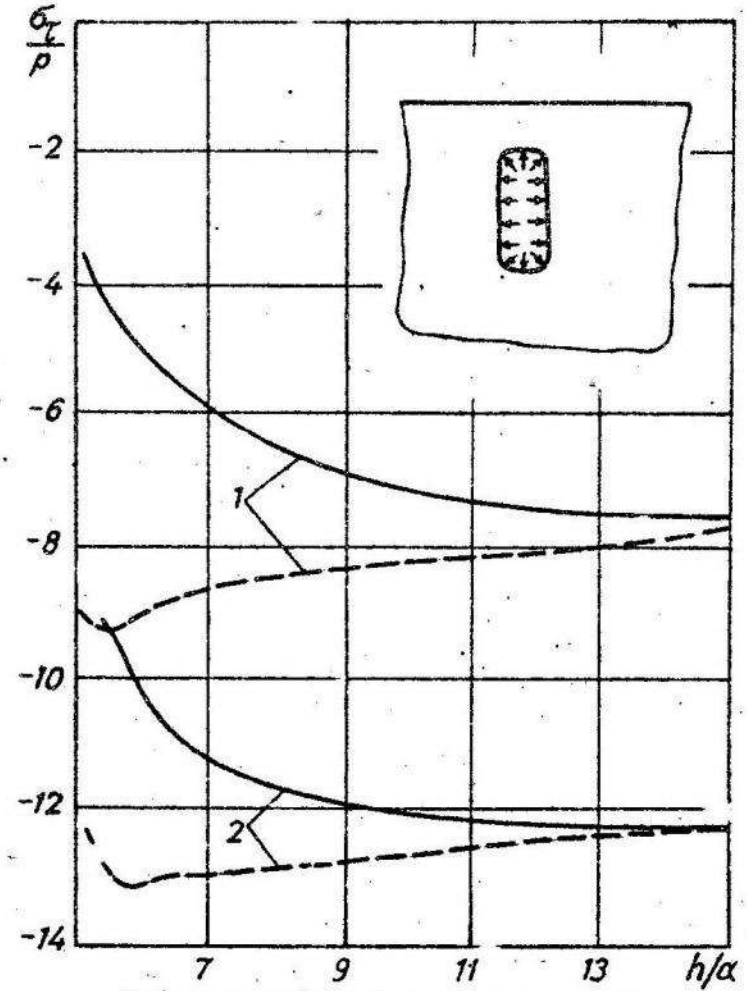
Узявши до уваги співвідношення /4/–/6/ і виконавши крайові умови /2/, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення функції $Q(t)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \Bigg\{ \Bigg[\frac{1}{t - t_1} + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \frac{1}{\bar{t} - \bar{t}_1} + \frac{1}{X - \bar{T}} + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \frac{1}{\bar{X} - T} + \frac{\bar{T} - T}{(\bar{X} - T)^2} \left(1 + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right) -$$

$$- \frac{2(\bar{T} - T)(X - T)}{(\bar{X} - T)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \Bigg] Q(t)dt + \Bigg[-\frac{1}{\bar{t} - \bar{t}_1} + \frac{t - t_1}{(t - t_1)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} - \frac{T - \bar{T}}{(X - \bar{T})^2} -$$

$$- \frac{1}{\bar{X} - T} + \frac{X - T}{(\bar{X} - T)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \Bigg] \overline{Q(t)}d\bar{t} \Bigg\} = -p, \quad t_1 \in L_1, \qquad /7/$$

де $T = t + ih$, $X = t_1 + ih$.



Зміна коефіцієнта концентрації напружень $k = \sigma_\tau / p$.

Якщо форма гладкої замкнутої кривої L_1 визначається параметричним рівнянням

$$x = x(\vartheta),\ y = y(\vartheta),\ 0 \le \vartheta < 2\pi,$$

то після заміни змінних

$$t_1 = \omega(\vartheta) = x(\vartheta) + iy(\vartheta),\ t = \omega(\tau)$$

сингулярне інтегральне рівняння задачі можна записати у нормалізованому вигляді:

$$\int_0^{2\pi} [M(\tau,\vartheta)Q(\tau) + N(\tau,\vartheta)\overline{Q(\tau)}]\,d\tau = -p,\ 0 \le \vartheta < 2\pi$$

і для числового розв"язування застосовувати розрахункову схему методу механічних квадратур [3].

Проаналізовано розв"язок задачі, причому для визначення концентрації напружень на контурі отвору використані співвідношення

$$\sigma_\tau = p + 4Re\Big\{-\frac{1}{2}Q(\vartheta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\Big[\Big(\frac{1}{\omega(\tau)-\omega(\vartheta)} + \frac{1}{\bar{\bar{X}}-T}\Big)\times$$

$$\times\,\omega'(\tau)Q(\tau) + \frac{(\bar{T}-T)\overline{\omega'(\tau)}\,\overline{Q(\tau)}}{(\bar{T}-X)^2}\Big]d\tau\Big\}.$$

На рисунку зображені залежності, що характеризують зміну коефіцієнта концентрації напружень $k = \sigma_T / p$ у півплощині з прямокутним отвором залежно від відстані центра отвору до вільної поверхні. Прийняті значення безрозмірних параметрів $b/a = 5$, $r^* = r/a = 0{,}5$ /лінії 1/ і $r^* = 0{,}1$ /лінії 2/. Суцільними лініями подане значення коефіцієнта концентрації у ближчій /до межі півпростору/ вершині, штриховими – у дальшій. Як бачимо, із зменшенням радіуса заокруглення збільшується концентрація напружень в околі вершин прямокутника. Відзначимо також, що наявність вільної поверхні відіграє велику роль у перерозподілі напружено-деформованого стану у півпросторі з тунельним отвором. Прямолінійний край спричиняє зменшення концентрації напружень в дальшій вершині і збільшення – у ближчій. Із віддаленням отвору від краю ця відмінність згладжується.

1. Г р и л и ц к и й Д.В., О п а н а с о в и ч В.К., Т и с о в с к и й Л.О. Упругое состояние пластины с круглой шайбой и прямолинейным тонким упругим включением // Прикл. математика и механика. 1982. Т.46. № 6. С.993–1000. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 3. С а в р у к М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.92