УДК 539.3

В.П.Левицький, В.М.Онишкевич

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ІЗ ЗНОШУВАННЯМ

Уперше задачі із зношуванням /стирання, зминання мікронерівностей/ розглянуті у працях Л.О.Галіна [3]. У даній статті досліджується осесиметричне зношування під підошвою жорсткого штампа. Температурними ефектами при цьому нехтуємо, оскільки задачі в стаціонарній постановці при врахуванні теплоутворення і зношування втрачають сенс. Слід зауважити, що при стаціонарному теплоутворенні введення параметра часу τ лише у зношування порушуватиме принцип причинності [1]. Осесиметричне зношування описане у праці [2].

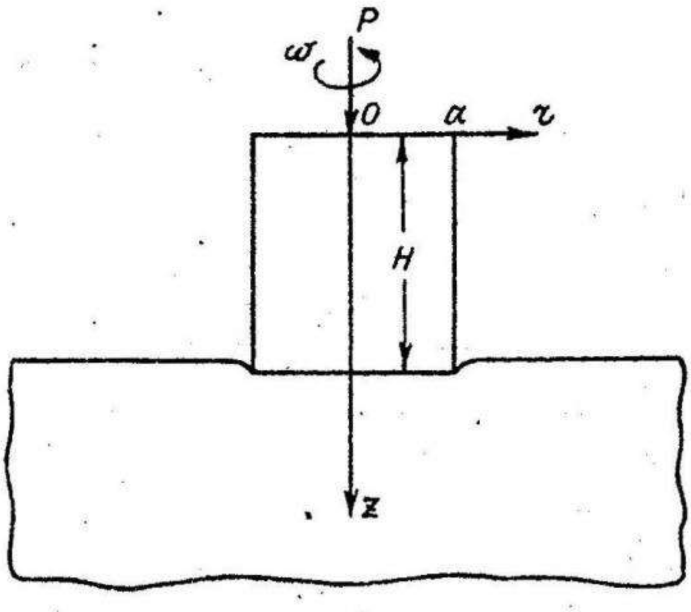

Рис. 1. Геометрія задачі

Розглянемо циліндричний штамп радіусом a і висотою H, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω. До моменту часу $\tau=0$ штамп був втиснутий силою P у пружний півпростір /рис. 1/. Під штампом спостерігається стаціонарний розподіл тиску. На ділянці контакту враховується зношування півпростору [4].

Для розв"язування задачі необхідно проінтегрувати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + k\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \qquad /1/$$

де $\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$, $k = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$,

при таких крайових силових умовах:

$$z = H:\ u_z = f(r) + \left(\frac{k_1 \omega \tau r}{H_B} + k_2\right)\sigma_z^{\alpha};\ 0 \leq r \leq a, \qquad /2/$$

$$\sigma_z = 0,\ r \geq a;\ \tau_{rz} = 0,\ r < \infty,$$

де λ, μ – коефіцієнти Ламе; $f(r)$ – задана величина осадки штампа; H_B – твердість матеріалу півпростору за Брінелем; τ – час. Процес зношування характеризується параметрами k_1, k_2 і α.

Увівши безрозмірні координати $\rho = r/a$ і $\zeta = z/H$ та застосувавши інтегральне перетворення Ханкеля по радіальній координаті до рівнянь /1/ і крайових умов /2/, розв"язок осесиметричних рівнянь термопружності для пружного півпростору в зображеннях за Ханкелем можна подати у вигляді

$$\bar{u}_z(\xi,\zeta) = \xi^2[kC_1(\xi) + 2C_2(\xi) + k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)]e^{-\xi(\zeta-1)},$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi,\zeta) = -2\mu\xi^3[kC_1(\xi) + C_2(\xi) + k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)]e^{-\xi(\zeta-1)},$$

$$\bar{\tau}_{rz}(\xi,\zeta) = 2\mu\xi^3[(k-1)C_2(\xi) - kC_1(\xi) - k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)]e^{-\xi(\zeta-1)},$$

де $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ – невідомі функції.

Задовольнивши останню умову /2/ і використавши отримане співвідношення

$$C_2(\xi) = \frac{k}{k-1}C_1(\xi),$$

шукані функції на ділянці контакту можна подати як

$$\bar{u}_z\Big|_{\zeta=1} = \theta_1 \xi^2 C_1(\xi) \quad , \quad \bar{\sigma}_z\Big|_{\zeta=1} = \sigma_1 \xi^3 C_1(\xi) ,$$

де

$$\theta_1 = k\,\frac{k+1}{k-1} \quad , \quad \sigma_1 = -\frac{2\mu k^2}{k-1} .$$

Використавши формули обернення інтегрального перетворення Ханкеля, виконавши перші дві крайові умови /2/ та зобразивши контактні напруження σ_z у вигляді ряду

$$\sigma_z(\rho) = \sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\lambda_n \rho) , \qquad /3/$$

отримаємо вирази для невідомих функцій, підстановка яких у крайові умови дає співвідношення

$$\frac{\theta_1}{\sigma_1} a \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2 - \eta^2} d\eta -$$

$$-\left(\frac{k_1 \omega \tau a \rho}{H_в} + k_2\right)\left[\sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\lambda_n \rho)\right]^\alpha = f(\rho) , \quad \rho \le 1 , \qquad /4/$$

де λ_n – нулі функції Бесселя першого роду нульового порядку:

$$J_0(\lambda_n) = 0 , \quad n = 1, \dots, N .$$

Використавши метод поточкової коллокації при $\rho = \rho_k$, $\rho_k = (k-1)/(N-1)$, $k = 1, \dots, N$, отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів a_n , $n = 1, \dots, N$:

$$\| A \| \vec{a} + \| D \| \vec{d} = \vec{b} , \qquad /5/$$

де

$$a_{k,n} = \frac{\theta_1}{\sigma_1} a \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho_k)}{\lambda_n^2 - \eta^2} d\eta , \qquad /6/$$

$$d_{k,n} = -\left(\frac{k_1 \omega \tau a \rho_k}{H_в} + k_2\right)\left[J_0(\lambda_n \rho_k)\right]^\alpha ,$$

$$b_k = f(\rho_k) , \quad d_k = a_k^\alpha , \qquad /7/$$

$$k = 1, \dots, N ; \quad n = 1, \dots, N .$$

Тоді контактні напруження σ_z обчислюємо згідно із /3/, а вертикальні пружні переміщення поверхні півпростору визначаємо як

$$u_z(\rho,\zeta)=\frac{a}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{N}a_n\lambda_n J_1(\lambda_n)\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\left(\theta_1+\frac{k^2\eta(\zeta-1)}{k-1}\right)\frac{J_0(\eta)J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2-\eta^2}e^{-\eta(\zeta-1)}d\eta . \qquad /8/$$

Числові результати наведені для сили P, яка визначається з умови рівноваги штампа:

$$P=2\pi a^2\sum_{n=1}^{N}a_n\lambda_n J_1(\lambda_n) \qquad /9/$$

при таких значеннях вхідних параметрів /система СІ/: матеріал півпростору – алюміній /H_B = 113/, a = 1, H = 0,3, ω = 20, α = 1, $k_1 = 10^{-9}$, $k_2 = 10^{-12}$. Розподіл контактних напружень подано на рис.2. Крива 1 відповідає часу τ = 0; 2 – τ = 1; 3 – τ = 5; 4 – τ = 10.

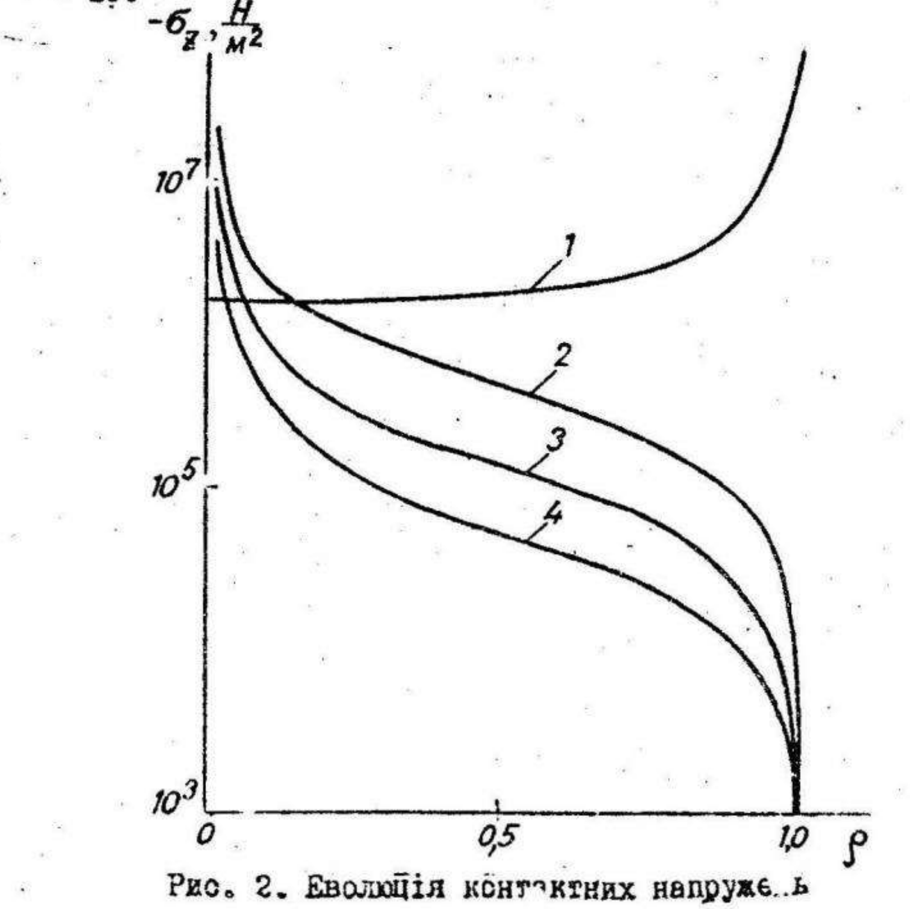

Рис. 2. Еволюція контактних напружень

1. Б а р а н В.П. Принцип максимума модулей для волновых уравнений линейной упругости // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. Вып. 24. 2. Г а в р и к о в М.В., М а з и н г Р.И. Применение наследственно-стареющей модели изнашивания к осесимметричной контактной задаче // Трение и износ. 1989. Т.10. № 6. 3. Г а л и н Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М., 1980. 4. Х р у щ о в М.М., Б а б и ч е в М.А. Абразивное изнашивание. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.92