УДК 511.364

Я.М.Холявка

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ЧИСЕЛ, ПОВ"ЯЗАНИХ З $\wp(z)$

Нехай $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса, $2\omega_1$, $2\omega_2$ – довільна фіксована пара основних періодів, g_2, g_3 – її інваріанти, ξ_1, ξ_2, ξ_3 – довільні алгебраїчні числа, $n_i = \deg \xi_i$, $n = \deg Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $L_i = L(\xi_i)$.

Теорема. Нехай ω_2 – алгебраїчне число,

$$M = n\left(\min(n_2, n_3)\left(\frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3} + 1\right) + \ln\left(n\left(\frac{\ln L_1}{n_1} + 1\right)\right)\right),$$

$$N = 1 + \frac{\ln L_1}{n_1} + \ln\left(n\left(\frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3} + 1\right)\right).$$

Тоді існує така ефективна постійна $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$, що

$$|\omega_1 - \xi_1| + |g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| > \exp(-\Lambda n N M).$$

Для доведення цієї теореми використаємо другий метод Гельфонда [1]. Позначимо через $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ лінійно незалежні із чисел $\xi_1^{u_1} \xi_2^{u_2} \xi_3^{u_3}$, $u_i = 0, \dots, n_i - 1$, $i = 1, 2, 3$,

$$c_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n} c_{k,l,\tau} \zeta_\tau, \quad c_{k,l,\tau} \in \mathbb{Z}.$$

Допоміжну функцію, параметри і точки інтерполяції визначимо як

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} c_{k,l} z^k \wp^l(z + \omega_2),$$

$$K = [4\lambda^2 \sqrt{M} - 1]^2 - 1, \quad L = [\lambda^2 n N],$$

$$S_0 = [\lambda^3 n N], \quad X_0 = [\lambda \sqrt{M}], \quad X_1 = 2\lambda X_0,$$

$$z_{ij} = 2x_i \omega_1 + 2x_j \omega_2,$$

де λ – деяке натуральне число, X_0 і X_1 – межі інтерполяції перед та після застосування "основної леми" Гельфонда; S_0 – межа порядку похідних; z_{ij} – точки інтерполяції. Основна лема застосовується до функції $F(z) = f(z)\sigma^{2L}(z + \omega_2)$, σ – пов"язана з $\wp(z)$, σ – функція Вейєрштрасса, межу інтерполяції на p-му кроці можна взяти $X_p = 2^p X_0 \leqslant X_1$ [2].

1. Ф е л ь д м а н Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М., 1982. 2. Х о л я в к а Я.М. Приближение чисел, связанных с эллиптическими функциями. 1987. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4886-В87.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.91