УДК 517.946

П.В.Примак

ОБЕРНЕНІ КОЕФІЦІЄНТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Нехай у задачі без початкових умов:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku + f(x,t), \qquad /1/$$

$$(x,t) \in \{0 \le x \le l,\ t > -\infty\};$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h(t)u\right)\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad /2/$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu(t) \qquad /3/$$

крім функції $u(x,t)$ потрібно визначити коефіцієнт $h(t)$. Для цього додатково задамо умову

$$u\Big|_{x=l} = \psi(t). \qquad /4/$$

Для розв"язання цієї задачі застосуємо символічний метод Фантапьє*. Введемо інтегральний оператор

$$Ju = \int_l^x u(\alpha,t)\,d\alpha$$

і двічі подіємо ним на рівняння /1/, при цьому використаємо умови /2/ та /3/:

$$a^2 J^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u - \psi(t) - J\nu(t) + kJ^2 u + J^2 f.$$

Після введення інтегродиференціального оператора

$$Bu = J\frac{\partial u}{\partial t}$$

рівняння /1/ набирає вигляду

$$(1 - (B^2 a^2 - kJ^2))u = \psi(t) + J\nu(t) - J^2 f(x,t).$$

Виконаємо формальні заміни $B \to \lambda_1$, $J \to \lambda_2$, це λ_1 і λ_2 – комплексні параметри, при цьому $u(x,t)$ замінимо на $\bar{u}(x,t,\lambda_1,\lambda_2)$.

---

* Л е в и П. Конкретные проблемы функционального анализа. М., 1967.

Таким чином,

$$(1-(\lambda_1^2 a^2 - k\lambda_2^2))\bar{u} = \psi(t) + \lambda_2 \nu(t) - \lambda_2^2 f(x,t),$$

звідки $$\bar{u}(x,t,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\psi(t)}{\Delta} + \frac{\lambda_2 \nu(t)}{\Delta} - \frac{\lambda_2^2 f(x,t)}{\Delta},$$

де $\Delta = 1-(\lambda_1^2 a^2 - k\lambda_2^2)$.

Розв"язок задачі Коші /1/, /3/, /4/ відновлюється за $\bar{u}(x,t,\lambda_1,\lambda_2)$ формулою обернення:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_{C_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_l^x d\tau_1\int_l^{\tau_1}\bar{u}(\tau_0, t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1}, \lambda_1,\lambda_2)e^{\frac{\tau_1-\tau_0}{\lambda_2}}d\tau_0,$$

де C_1 і C_2 – кола достатньо малого радіуса з центром у нулі, розміщені у комплексних площинах λ_1 і λ_2 відповідно.

Припустимо, що функції $\psi(t)$ і $\nu(t)$ – цілі, а $f(x,t)$ – ціла по t та неперервна по x. Врахувавши це і скориставшись теорією лишків, після деяких перетворень отримаємо розв"язок задачі Коші /1/, /3/, /4/ у явному вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i k^i a^{2(n-i)}\Big(\psi^{(2(n-i))}(t)\frac{(x-l)^{2n}}{(2n)!} + \nu^{(2(n-i))}(t)\frac{(x-l)^{2n+1}}{(2n+1)!} -$$

$$-\frac{1}{(2n+1)!}\int_l^x f^{(0,2(n-i))}(\tau_0,t)(x-\tau_0)^{2n+1}d\tau_0\Big). \qquad /5/$$

Переконатись у тому, що /5/ дійсно є розв"язком задачі /1/, /3/, /4/, неважко через безпосередню підстановку. Маючи цей розв"язок, знаходимо коефіцієнт $h(t)$ з крайової умови /2/:

$$h(t) = \frac{u_x(0,t)-\mu(t)}{u(0,t)}, \text{ якщо } u(0,t)\neq 0 \text{ для всіх } t\in R.$$

Для рівняння /1/ цим самим методом досліджено задачу на визначення функцій $u(x,t), h_1(t), h_2(t)$ з крайових:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h_1(t)u\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_2(t)u\right)\Big|_{x=l} = \mu_2(t)$$

і додаткових умов:

$$u\big|_{x=x_0} = \psi(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \nu(t),$$

це $0<x_0<l$, $h_1(t)\geqslant 0$, $h_2(t)\geqslant 0$.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i k^i a^{2(n-i)}\Big(\psi^{(2(n-i))}_{(t)}\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}+\nu^{(2(n-i))}_{(t)}\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}-$$

$$-\frac{1}{(2n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(0,2(n-i))}_{(\tau_0,t)}(x-\tau_0)^{2n+1}d\tau_0\Big),$$

$$h_1(t)=\frac{u_x(0,t)-\mu_1(t)}{u(0,t)}\ ,\ h_2(t)=\frac{\mu_2(t)-u_x(l,t)}{u(l,t)}\ ,$$

якщо $u(0,t)\neq 0$, $u(l,t)\neq 0$ для всіх $t\in R$.

Розв"язок задачі Коші /I/, /3/, /4/ можна використати також для знаходження одного з невідомих сталих коефіцієнтів a або k рівняння /I/. Для цього досить додатково мати

$$u\Big|_{\substack{x=0\\ t=t_0}}=\mu(t_0)\ . \qquad /6/$$

Крім уже зроблених припущень щодо функцій $\psi(t),\nu(t)$ і $f(x,t)$ додатково вимагаємо, щоб

$$m_\psi\leqslant\psi^{(n)}_{(t_0)}\leqslant M_\psi,$$

$$m_\nu\leqslant\nu^{(n)}_{(t_0)}\leqslant M_\nu,$$

$$m_f\leqslant f^{(0,n)}_{(x,t_0)}\leqslant M_f,$$

де $m_\psi,m_\nu,m_f,\ M_\psi,M_\nu,M_f$ – деякі сталі, для всіх $0\leqslant x\leqslant l$ та $n=0,\dots$.

Підставивши /5/ у /6/, отримаємо для знаходження одного з невідомих сталих коефіцієнтів a або k трансцендентне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i k^i a^{2(n-i)}\Big(\psi^{(2(n-i))}_{(t_0)}\frac{l^{2n}}{(2n)!}-\nu^{(2(n-i))}_{(t_0)}\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!}-$$

$$-\frac{1}{(2n+1)!}\int_{0}^{l} f^{(0,2(n-i))}_{(\tau_0,t_0)}\tau_0^{2n+1}d\tau_0\Big)-\mu(t_0)=0\ . \qquad /7/$$

Неважко переконатися, що при $k < 0$ у випадку невідомого коефіцієнта a, при $a \to 0$ умова $u(0,t_0)-\mu(t_0) \le 0$ випливає з нерівності

$$\psi(t_0)ch(l\sqrt{-k})-\nu(t_0)\frac{sh(l\sqrt{-k})}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{-k}}\int_0^l f(\tau_0,t_0)sh(\tau_0\sqrt{-k})d\tau_0-\mu(t_0)<0, \quad /8/$$

а умова $u(0,t_0)-\mu(t_0) \ge 0$ – з нерівності

$$\psi(t_0)ch(l\sqrt{-k})-\nu(t_0)\frac{sh(l\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}-\frac{1}{\sqrt{-k}}\int_0^l f(\tau_0,t_0)sh(\tau_0\sqrt{-k})d\tau_0-\mu(t_0)>0. \quad /9/$$

Крім цього, при $a = a_0$, де $a_0 > 0$, умова $u(0,t_0)-\mu(t_0) \le 0$ випливає з нерівності

$$M_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a_0^2-k})-m_\nu\frac{sh(l\sqrt{a_0^2-k})}{\sqrt{a_0^2-k}}-m_f\frac{ch(l\sqrt{a_0^2-k})-1}{\sqrt{a_0^2-k}}-\mu(t_0)\le 0, \quad /10/$$

а умова $u(0,t_0)-\mu(t_0) \ge 0$ – з нерівності

$$m_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a_0^2-k})-M_\nu\frac{sh(l\sqrt{a_0^2-k})}{\sqrt{a_0^2-k}}-M_f\frac{ch(l\sqrt{a_0^2-k})-1}{\sqrt{a_0^2-k}}-\mu(t_0)\ge 0. \quad /11/$$

Пари нерівностей /8/ і /11/, або /9/ і /10/ забезпечують на підставі відомої теореми Коші існування розв"язку рівняння /7/ з проміжку $(0, a_0]$.

Якщо в рівнянні /7/ невідомим є k, то аналогічні міркування приводять до висновку:
Якщо існують такі k_0 і k_1, $k_0 < k_1 \le 0$, щоб одночасно виконувались нерівності:

$$M_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_1})-m_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_1})}{\sqrt{a^2-k_1}}-m_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_1})-1}{\sqrt{a^2-k_1}}-\mu(t_0)\le 0,$$

$$m_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_0})-M_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_0})}{\sqrt{a^2-k_0}}-M_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_0})-1}{\sqrt{a^2-k_0}}-\mu(t_0)\ge 0,$$

або

$$m_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_1})-M_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_1})}{\sqrt{a^2-k_1}}-M_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_1})-1}{\sqrt{a^2-k_1}}-\mu(t_0)\geqslant 0,$$

$$M_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_0})-m_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_0})}{\sqrt{a^2-k_0}}-m_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_0})-1}{\sqrt{a^2-k_0}}-\mu(t_0)\leqslant 0,$$

тоді існує розв"язок рівняння /7/, який належить відрізку $[k_0,k_1]$.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.90

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук, М.П.Ленюк

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У БЕЗМЕЖНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПРИ ЗАЛЕЖНОМУ ВІД КООРДИНАТИ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Нехай безмежна кругова циліндрична оболонка нагрівається зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$ по кільцевій області $|\alpha| \leqslant \delta$, $\gamma = \pm\delta$. Через бічні поверхні $\gamma = \pm\delta$ оболонки здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температури $t_c = t_0 N(\alpha)$.

Для знаходження нестаціонарного температурного поля в оболонці маємо рівняння теплопровідності [1]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \left[\varkappa_1^2 + \varkappa N(\alpha)\right] T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} - \varkappa_0^2 t_0 N(\alpha) S_+(\tau) \qquad /1/$$

з початковою та крайовими умовами

$$T\big|_{\tau=0} = 0; \qquad T\big|_{|\alpha|\to\infty} = 0, \qquad /2/$$

де

$$\varkappa = \varkappa_0^2 - \varkappa_1^2, \quad \varkappa_i^2 = \alpha_i/\lambda\delta, \quad i = 0,1;$$

$$N(\alpha) = S_-(\alpha+b) - S_+(\alpha-b);$$