УДК 517.956

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ АСИМЕТРИЧНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛОСКІЙ ОБЛАСТІ

У практиці при розв"язуванні задач математичної фізики узагальнені функції застосовують у двох випадках: для моделювання джерел зосереджених фізичних впливів і моделювання неоднорідних фізичних параметрів композитних тіл. У першому випадку використовують симетричні узагальнені функції [1]. У другому випадку, з теоретико-множинного погляду, найприродніше користуватися асиметричними узагальненими функціями. Одновимірні асиметричні функції з численними прикладами докладно описані у праці / 3/. Зроблені кроки до побудови теорії двовимірних асиметричних узагальнених функцій [2]. Розглянемо практичний приклад, що ілюструє можливості теорії.

Нехай прямокутне у плані призматичне тіло армоване M прямокутними призматичними тепловипромінювальними включеннями. Через бічну поверхню тіла здійснюється конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Для визначення стаціонарного поля $t(x_1, x_2)$ температур у тілі маємо таку математичну задачу

$$\begin{cases} -div\left[\lambda(x_1,x_2)\,grad\,t\right]=\sum\limits_{m=1}^{M} Q_m S_m(x_1,x_2), & \begin{matrix} 0<x_1<D_1, \\ 0<x_2<D_2, \end{matrix} \\ \left(\lambda_0 \dfrac{\partial t}{\partial n}+\alpha t\right)\Big|_{\Gamma}=0, & \end{cases} \qquad /1/$$

де $\lambda(x_1,x_2)=\lambda_0+\sum\limits_{m=1}^{M}(\lambda_m-\lambda_0)\,S_m(x_1,x_2)$,

$$S_m(x_1,x_2)=\left[S_-(x_1-d_{11}^m)-S_+(x_1-d_{12}^m)\right]\left[S_-(x_2-d_{21}^m)-S_+(x_2-d_{22}^m)\right],$$

$(d_{1i}^m,\ d_{2j}^m)$ – координати кутових точок m -го включення $i,j=1,2$;

$$S_-(\xi)=\begin{cases}0, \xi<0\\ 1, \xi\geq 0,\end{cases} \quad S_+(\xi)=\begin{cases}0, \xi\leq 0\\ 1, \xi>0,\end{cases}$$

Q_m – потужність m -го нагрівача, λ_0, λ_m – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу і m -го включення відповідно.

Застосувавши теореми диференціювання двовимірних узагальнених асиметричних функцій / 2 /, перетворимо задачу /I/ до вигляду

$$\begin{cases} -\Delta t = \sum_{m=1}^{M} \left[\frac{Q_m}{\lambda_m} S_m(x_1, x_2) + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{\partial t}{\partial n_m} \Big|_{\Gamma_m} \delta_m^- \right], \\ \left(\frac{\partial t}{\partial n} + \beta t \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \qquad /2/$$

де δ_m^- – двовимірна асиметрична дельта-функція, $\beta = \frac{\alpha}{\lambda_0}$.

Шукане температурне поле знаходимо з /2/ у вигляді розкладу за системою ортонормованих функцій:

$$t = \sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij} \varphi_{1i}(x_1) \varphi_{2j}(x_2), \quad \varphi_{sz}(x_s) = \frac{\nu_{sz} \cos \nu_{sz} x_s + \beta \sin \nu_{sz} x_s}{\sqrt{\frac{1}{2}(\nu_{sz}^2 + \beta^2) D_s + \beta}},$$

де ν_{sz} z -й корінь трансцендентного рівняння

$$tg\, D_s \nu_{sz} = \frac{2\beta \nu_{sz}}{\nu_{sz}^2 - \beta^2}, \quad s = 1,2; \quad z = 1,2,3,\ldots .$$

Коефіцієнти t_{ij} визначаємо з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$t_{ij} = \sum_{k,l=1}^{\infty} A_{ij}^{kl} t_{kl} + B_{ij}; \quad i,j = 1,2,3,\ldots .$$

де

$$A_{ij}^{kl} = \frac{1}{\mu_{ij}} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_0} - 1 \right) \left(f_{11}^{ik} f_{22}^{jl} - f_{12}^{jl} f_{21}^{ik} \right),$$

$$f_{ps}^{ij} = F_p(\nu_{si}, \nu_{sj}, d_{s2}) - F_p(\nu_{si}, \nu_{sj}, d_{s1}), \quad p = 1,2; \ s = 1,2;$$

$$F_1(\nu_{si}, \nu_{sj}, x_s) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta^2}{\nu_{si}\nu_{sj}}\right) \frac{\sin(\nu_{si} - \nu_{sj}) x_s}{\nu_{si} - \nu_{sj}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta^2}{\nu_{si}\nu_{sj}}\right) \frac{\sin(\nu_{si} + \nu_{sj}) x_s}{\nu_{si} + \nu_{sj}} +$$

$$+ \frac{\beta}{\nu_{si}\nu_{sj}} \sin \nu_{si} x_s \sin \nu_{sj} x_s,$$

$$F_2(\nu_{si}, \nu_{sj}, x_s) = \varphi_{si}(x_s)\varphi'_{sj}(x_s),$$

$$B_{ij} = \frac{1}{\mu_{ij}} \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{\lambda_m} \left[\varphi'_{1i}(d^m_{12}) - \varphi'_{1i}(d^m_{11})\right]\left[\varphi'_{2j}(d^m_{22}) - \varphi'_{2j}(d^m_{21})\right],$$

$$\mu_{ij} = \nu^2_{1i} + \nu^2_{2j} .$$

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: 4-е изд. М., 1981. 2. Грицевич В.С. Асимметричные слои и дифференциальные операторы теории поля от разрывных функций в плоской области // Изв. вузов. Математика. 1989. № 8. С.79-82. 3. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.91

УДК 517.535.4

Ш.Абуарабі

ПРО ТЕЙЛОРІВСЬКІ КОЕФІЦІЄНТИ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО l-M-ІНДЕКСУ

Нехай l - додатна неперервна на $[0,\infty)$ функція. Ціла функція $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ називається функцією обмеженого l-M -індексу, якщо існує $N \in Z_+$ таке, що для всіх $n \in Z_+$ і $z \in [0,\infty)$

$$\frac{M(z, f^{(n)})}{n!\, l^n(z)} \leqslant \max\left\{ \frac{M(z, f^{(k)})}{k!\, l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant N \right\},$$

де $M(z,f) = \max\{|f(Z)| : |Z| = z\}$. Використовуючи критерії обмеженості l-M -індексу цілої функції, наведені у праці [1], можна довести такі теореми.

Теорема 1. Нехай l - неперервно диференційована, RO - змінна [ ] і задовольняє умову

$$-1 < \lambda \leqslant \underline{\lim}_{z\to+\infty} \frac{z\,l'(z)}{l(z)} \leqslant \overline{\lim}_{z\to+\infty} \frac{z\,l'(z)}{l(z)} \leqslant S < +\infty .$$

Для того щоб ціла функція f була функцією обмеженого l-M індексу, необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\; n\sqrt[n]{|a_n|} \Big/ l\left(1/\sqrt[n]{|a_n|}\right) < +\infty .$$