ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ ТА АЛГЕБРИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
38
1993

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 38

ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ ТА АЛГЕБРИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО «СВІТ»
1993

УДК 513

Вісник містить статті з теорії функцій, алгебри, топології, крайових задач для диференціальних рівнянь.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей

Відповідальний за випуск доц. Є.М.П а р а с ю к

Адреса редколегії:
290000 Львів, вул. Університетська, 1.
Університет, кафедра диференціальних рівнянь.
Тел.: 79-45-93.

В $\frac{1602110000-020}{225-93}$ Замовне

УДК 517.95

С.П.Лавренюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ОДНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

В області $Q_T = \mathcal{D} \times \mathcal{J}$, де $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена з межею $\partial\mathcal{D}$, а $\mathcal{J} = (-\infty; T)$, розглянемо рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \qquad /1/$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) = f(x,t)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} \right|_{S_T} = 0, \ i = 0, \dots, m-1. \qquad /2/$$

Тут $S_T = \partial\mathcal{D} \times \mathcal{J}$, ν – зовнішня нормаль до S_T,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \ l \le m, \ m \ge 1.$$

Метою цієї праці є дослідження умов єдиності розв"язку задачі /1/, /2/ у деякому просторі. Позначимо через V простір функцій $u(x,t)$, для яких справедливі включення

$$u \in L^\infty_{loc}(\mathcal{J}; W_0^{m,2}(\mathcal{D})), u_t \in L^\infty_{loc}(\mathcal{J}; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2_{loc}(\mathcal{J}; W_0^{l,2}(\mathcal{D})).$$

Тут під $L^p_{loc}(\mathcal{J}; B)$ розуміється простір тих функцій, які належать $L^p((t_0,T); B)$ для довільного $t_0 \in \mathcal{J}$. Визначення простору $W_0^{k,p}(\mathcal{D})$ наведене у праці [2].

Припустимо, що коефіцієнти рівняння /1/ задовольняють у Q_T такі умови:

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} \frac{\partial^i a_{\alpha\beta}(x,t)}{\partial t^i} D^\alpha w D^\beta w dx \ge \mu_i \int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=m_i} (D^\alpha w)^2 dx, \ i = 0,1; \qquad /3/$$

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \frac{\partial^i b_{\alpha\beta}(x,t)}{\partial t^i} D^\alpha w D^\beta w dx \le \bar{w}_i \int_{\mathcal{D}} \sum_{|\alpha|=\bar{l}_i} (D^\alpha w)^2 dx; \qquad /4/$$

$$\int\limits_{D}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}wD^{\beta}w\,dx \geq w_0\int\limits_{D}\sum_{|\alpha|=l_0}(D^{\alpha}w)^2dx \qquad /5/$$

для довільної функції $w\in W_0^{m,2}(D)$. Тут $m_0, m_1\leq m$; $l_0, \bar{l}_0, \bar{l}_1, \bar{l}_2\leq l$.

Позначимо через V_μ підмножину тих функцій з V, для яких

$$\int\limits_{Q_T} e^{2\mu\cdot}\sum_{|\alpha|=m}(D^{\alpha}w)^2dx<\infty.$$

Надалі нам буде потрібна відома нерівність Фрідріхса [2]:

$$\int\limits_{D}\sum_{|\alpha|=j}(D^{\alpha}w)^2dx\leq A_{K,j}\int\limits_{D}\sum_{|\alpha|=K}(D^{\alpha}w)^2dx, \qquad /6/$$

$j=0,\dots,K\leq m$, яка справедлива для всіх функцій з $W_0^{m,2}(D)$. Причому сталі $A_{K,j}$ залежать лише від n, K і області D.

<u>Теорема.</u> Нехай виконуються нерівності /3/-/5/;

$a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta t}(|\alpha|=|\beta|\leq m), {}^{o}_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta t}, b_{\alpha\beta tt}(|\alpha|=|\beta|\leq l)\in L^{\infty}(Q_T)$;

$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}(|\alpha|=|\beta|\leq m)$, $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}(|\alpha|=|\beta|\leq l)$, $(x,t)\in\bar{Q}_T$;

$\bar{l}_2\leq m_1$; $\bar{l}_1\leq m_1$; $\bar{l}_1\leq m_0$; $\bar{l}_0\leq m_0$; $m_1\leq m$; $m_0\leq m$; $l_0\leq l$.

Крім цього, нехай $\mu>0$ найбільше з чисел, що задовольняє нерівності:

$$\mu_0-\bar{w}_1A_{m_0,\bar{l}_1}-\bar{w}_0\mu A_{m_0,\bar{l}_0}\geq 0;$$
$$\mu_1-\bar{w}_2A_{m_1,\bar{l}_2}-\mu\bar{w}_1A_{m_1,\bar{l}_1}\geq 0;$$
$$w-\mu A_{l_0,0}\geq 0.$$

Тоді задача /1/, /2/ не може мати більше як один розв"язок на множині V_μ.

Для доведення розглянемо функцію

$$v(x,t)=\begin{cases} e^{\mu t}\int_t^{\tau}u(x,\theta)e^{\mu\theta}d\theta, & t\leq\tau\leq T,\\ 0, & t>\tau,\end{cases}$$

де $u(x,t)\in V_\mu$ - розв"язок задачі /1/, /2/, коли $f=0$. Помножимо рівняння /1/ на функцію v і проінтегруємо по області D. Отримаємо

$$\int\limits_{D}[u_{tt}v+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u)v+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(b_{\alpha\beta}D^{\beta}u_t)v]dx=$$
$$=\int\limits_{D}[u_{tt}v+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}a_{\alpha\beta}D^{\beta}u\,D^{\alpha}v+$$
$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l}b_{\alpha\beta}D^{\beta}u_t\,D^{\alpha}v]dx=0. \qquad /7/$$

Після певних перетворень та оцінки доданків у рівності /7/ з урахуванням умов теореми можна отримати нерівність

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} u^2 e^{2\mu\tau}dx - \int_{\mathcal{D}}[u_t e^{\mu t_0}\int_{t_0}^{\tau} u e^{\mu\theta}d\theta -$$

$$-\mu u e^{\mu t_0}\int_{t_0}^{\tau} u e^{\mu\theta}d\theta - \frac{1}{2}u^2 e^{\mu t_0} +$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta} D^{\beta} u e^{\mu t_0}\int_{t_0}^{\tau} D^{\alpha} u e^{\mu\theta}d\theta]dx \le 0. \qquad /8/$$

В останній нерівності перейдемо до межі, коли $t_0 \to -\infty$. Отримаємо

$$\int_{\mathcal{D}} u^2(x,t)\,dx \le 0.$$

Звідси $u \equiv 0$ в Q_T. Теорема доведена.

<u>Зауваження.</u> Наведена вище теорема дає деякі умови єдиності розв"язку задачі /1/, /2/, у класі функцій, які можуть рости при $t \to -\infty$ не швидше, ніж $e^{\mu t}$, причому величина додатного параметра μ залежить від коефіцієнтів рівняння. Виявляється, що це обмеження є природним. Дійсно, розглянемо задачу

$$u_{tt} - a u_{xxt} + u_{xxxx} = 0, \quad a > 2,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad /9/$$

в області $Q_T = \{(x,t): 0<x<1, -\infty<t<T\}$.
Легко встановити, що рівняння

$$(2+a)\cos\gamma(1-b) - (a-2)\cos\gamma(1+b) = 4$$

для деяких значень c має корінь γ_0. Тут

$$b = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}, \quad b_1 = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}, \quad b_2 = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Тоді функція

$$u(x,t) = [(b\sin\gamma_0 b - \sin\gamma_0)\cos\gamma_0 bx +$$

$$+(b\cos\gamma_0 - \cos\gamma_0 b)\sin\gamma_0 bx + (\sin\gamma_0 - b\sin\gamma_0 b)\cos\gamma_0 x +$$

$$+(\cos\gamma_0 b - \cos\gamma_0)\sin\gamma_0 x]\, e^{-\frac{\gamma_0^2}{b_2}t}$$

буде нетривіальним розв"язком задачі /9/.

Єдиність розв"язку задач без початкових умов для параболічних рівнянь досліджена у працях [1, 3], де наведена також значна бібліографія з цього питання.

1. Б о к а л о Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1989. Вып. 14. С.3-44. 2. Г а е в с к и й Х., Г р е г е р К., З а х а р и а с К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 3. И в а с и ш е н С.Д. О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. 1983. Т.34. № 5. С.547-552.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.91

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ ПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

В області $D=\{(x,t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)u = f(x,t) \qquad /1/$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \gamma u(0,t) - \alpha u(l,t), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= \alpha u(0,t) + \beta u(l,t) \end{aligned} \qquad /2/$$

або

$$\begin{aligned} u(l,t) &= \varrho u(0,t), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \tau u(0,t) \end{aligned} \qquad /3/$$

і початковою

$$u(x,0) = 0, \qquad /4/$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр; $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, \tau$ – задані числа; не виключаються такі випадки, коли деякі /або усі/ ці числа перетворюються у нескінченність /або ϱ перетворюється у нуль/.

Зауважимо, що граничні умови /2/, /3/ досить загальні, вони включають в себе усі найбільш уживані граничні умови.

Нехай виконуються умови:

I/ Існує єдиний розв"язок задачі /I/, /2/ або /3/, /4/;

2/ функції $a(x,t)$, $f(x,t)$ достатньо гладкі для проведення подальших викладок;

3/ $a(x,t)>0$; $\beta \le 0$, $\gamma \ge 0$, $\alpha^2+\beta\gamma \le 0$ знак рівності в одному з цих перших двох опіввідношень повинен відповідати знакові рівності у третьому.

Побудуємо асимптотику розв"язку задачі /I/, /2/, або /3/, /4/ у припущенні існування єдиного розв"язку цієї задачі /для деяких часткових випадків граничних умов цей факт добре відомий/ за ступенями малого параметра ε, при цьому використаємо метод примежового шару [3]. Зауважимо, що граничний перехід при $\varepsilon \to 0$ досліджений для досить загальних систем у праці [2]. Асимптотика розв"язку першої граничної задачі одержана у працях [1, 9] методом примежового шару і у [5] - методом регуляризації.

Асимптотику розв"язку задачі /I/, /2/ або /3/, /4/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \quad /5/$$

де $\tau = t/\varepsilon$; N - натуральне число - точність асимптотики.

Випишемо задачі, з яких можна визначити функції, що входять у /5/. Їх одержують стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики одержуємо як розв"язки граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь / t входить як параметр/:

$$-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}+a(x,t)v_i=f_i(x,t), \quad /6/$$

$$\frac{\partial v_i(0,t)}{\partial x}=\gamma v_i(0,t)-\alpha v_i(l,t),$$

$$\frac{\partial v_i(l,t)}{\partial x}=\alpha v_i(0,t)+\beta v_i(l,t), \quad /7/$$

або

$$v_i(l,t)=\varrho v_i(0,t),$$

$$\frac{\partial v_i(l,t)}{\partial x}=\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial v_i(0,t)}{\partial x}+\tau v_i(0,t), \quad /8/$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t)$, $f_i(x,t)=-\frac{\partial v_{i-1}}{\partial t}$ $(i=1,\dots,N)$.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\ldots,N)$ в околі $t=0$ визначаємо як розв"язки змішаних задач для параболічних рівнянь:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2}+a(x,0)\Pi_i=g_i(x,\tau), \qquad /9/$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x}=\gamma\Pi_i(0,\tau)-\alpha\Pi_i(l,\tau),$$

$$\frac{\partial \Pi_i(l,\tau)}{\partial x}=\alpha\Pi_i(0,\tau)+\beta\Pi_i(l,\tau), \qquad /10/$$

або

$$\Pi_i(l,\tau)=\rho\Pi_i(0,\tau), \qquad /11/$$

$$\frac{\partial \Pi_i(l,\tau)}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x}+\tau\Pi_i(0,\tau),$$

$$\Pi_i(x,0)=-v_i(x,0), \qquad /12/$$

де $g_0(x,\tau)\equiv 0$, $g_i(x,\tau)$ $(i=1,\ldots,N)$ лінійно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$.

Таким чином, з одержаних формул бачимо, що всі $v_i(x,t)(i=0,\ldots,N)$ визначаються незалежно від $\Pi_i(x,\tau)$ рекурентно як розв"язки граничних задач /6/,//7/ або /8//, а потім – рекурентно усі $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\ldots,N)$ як розв"язки змішаних задач для параболічних рівнянь /9/,//10/, або /11//, /12/.

Як випливає з [8] /задачі легко переписати у вигляді задач для систем першого порядку/, неоднорідні задачі /6/,//7/, або /8// мають єдиний розв"язок, якщо для однорідних задач $f_i(x,t)\equiv 0$ $(i=0,\ldots,N)$ існує єдиність. Єдиність розв"язку однорідних задач /6/,//7/, або /8// легко одержати методом інтегралів енергії шляхом домноження однорідного рівняння /6_i/ на $v_i(x,t)$ та інтегруванням по x у межах від 0 до l з урахуванням граничних умов //7_i/ або /8_i//. Отже, задачі /6/, //7/ або /8// однозначно розв"язальні.

Функції $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\ldots,N)$ є функціями типу примежового шару в околі $t=0$, тобто вони експоненціально спадні при $\tau\to\infty$, що можна довести застосуванням методу Фур"є до граничних задач /9/, //10/ або /11//, /12/ [6].

Залишковий член є розв"язком задачі, аналогічної до задачі /1/, //2/ або /3//, /4/. Методом інтегралів енергії [4] одержана оцінка

$$\|R_N\|_{L_2(D)} \leq C\varepsilon^{N+1}, \qquad /13/$$

де константа C не залежить від ε. Зауважимо, що оцінка розв"язку подібної задачі з іншим варіантом входження малого параметра одержана у праці [6].

Сформулюємо результат роботи.

Теорема. Нехай виконуються умови /1/, 2/. Тоді розв"язок задачі /1/,//2/, або /3//, /4/ допускає асимптотичне зображення /5/, де $v_i(x,t)$, функції типу примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач /6/, //7/, або /8//; /9/, //10/, або /11//, /12/, залишковий член $R_N(x,t,\varepsilon)$ допускає оцінку /13/.

1. Богатырев С.В. Об асимптотике решений одного сингулярно возмущенного параболического уравнения // Приближ. методы исслед. дифференц. уравнений и их приложения. 1982. С.30-40. 2. Борисов В.Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t // Мат. сборник. 1986. Т.131. № 3. С.293-308. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 5. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981. 6. Сеньо П.С., Цимбал В.М. Оцінка розв"язку змішаної задачі для сингулярно збуреного параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 27. 1987. С.36-38. 7. Стеклов В.В. Основные задачи математической физики. М., 1983. 8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 9. Roos H.-G. Die asymptotische Lösung einer speziellen Randwertaufgabe // Z. angew. Math. und Mech. 1979. Bd.59. N1. P.61.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.91

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В області $D=\{(x,t):0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розглянемо змішану задачу для рівняння другого порядку:

$$\varepsilon L_2 u + L_1 u \equiv \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+ \qquad /1/$$

$$+c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+d(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+q(x,t)u=f(x,t),$$

де $\varepsilon>0$ – малий дійсний параметр.

Далі накладатимемо умови.

1. У розкладі $\lambda^2+2a(x,t)\lambda\xi+b(x,t)\xi^2=(\lambda-\lambda_1(x,t)\xi)(\lambda-\lambda_2(x,t)\xi)$ функції $\lambda_1(x,t)$, $\lambda_2(x,t)$ дійсні та різні при всіх $(x,t)\in D$, тобто рівняння /1/ є строго гіперболічне [4] і, крім цього, $\lambda_1(x,t)<\lambda_2(x,t)<0$ у D, зауважимо, що звідси, зокрема, автоматично випливає, що $b(x,t)>0$ в D.

Враховуючи цю умову, поставимо граничні та початкові умови [3]:

$$u(0,t)=0,\quad \varepsilon\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\psi(t), \qquad /2/$$

$$u(x,0)=0,\quad \varepsilon\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi(x). \qquad /3/$$

Крім цього, нехай:

2. Функції, що входять у рівняння /1/, граничні й початкові умови /2/, /3/ достатньо гладкі для проведення подальших викладок;

3. $c(x,t)>0$, $d(x,t)>0$ у D і оператор L_1 розщіпляє оператор L_2 [4];

4. Виконуються умови узгодженості, які необхідні для існування класичного розв"язку задачі /1/–/3/, умови узгодженості зв"язані з наявністю других похідних в правій частині рівняння /5/, а також $\Pi_i(0,\tau)=Q_i(\xi,0)=\dfrac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q_i(\xi,0)}{\partial t}=0$ $(i=0,\dots,N)$.

Зауважимо, що однозначна розв"язальність задачі /I/-/3/ випливає з [7].

Методом примежового шару [2] побудуємо асимптотику розв"язку задачі /I/-/3/. Зауважимо, що випадок виродження гіперболічного рівняння другого порядку у гіперболічне рівняння першого порядку /змішана задача/, але без малого параметра у початкових і граничних умовах розглянутий у працях [?, I0], а з малим параметром у початковій умові – у праці [8].

Асимптотику розв"язку задачі /I/-/3/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /4/$$

де $\tau=t/\varepsilon$, $\xi=x/\varepsilon$; N – натуральне число – точність асимптотики.

Випишемо задачі для визначення функцій, що входять у [4].

Функції регулярної частини асимптотики $v_i(x,t)\ (i=0,\dots,N)$ визначаються розв"язками змішаних задач для рівнянь у часткових похідних першого порядку:

$$c(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial t}+d(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x}+e(x,t)v_i=f_i(x,t), \qquad /5/$$

$$v_i(x,0)=-\Pi_i(x,0),\ v_i(0,t)=-Q_i(0,t), \qquad /6/$$

де $f_i(x,t)=\delta_{io}f(x,t)-\left(\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial t^2}+2a(x,t)\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x\partial t}+b(x,t)\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2}\right)(i=0,\dots,N)$

/тут і надалі функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулю/; δ_{ik} – символ Кронекера.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ в околі $t=0$ є розв"язками задач для звичайних диференціальних рівнянь /x – параметр/;

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\tau^2}+c(x,0)\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}=\pi_i(x,\tau), \qquad /7/$$

$$\frac{\partial\Pi_i(x,0)}{\partial\tau}=\delta_{io}\varphi(x)-\frac{\partial v_{i-1}(x,0)}{\partial t},\quad \Pi_i(x,\tau)\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0, \qquad /8/$$

де $\pi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\pi_i(x,\tau)\ (i=1,\dots,N)$ лінійно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)\ (j<i)$ та їх похідні.

Функції примежового шару $Q_i(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N)$ в околі $x=0$ є розв"язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / t - параметр/:

$$b(0,t)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial\xi^2}+d(0,t)\frac{\partial Q_i}{\partial\xi}=q_i(\xi,t), \qquad /9/$$

$$\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial\xi}=\psi(t)\delta_{i0}-\frac{\partial v_{i-1}(0,t)}{\partial x}, \quad Q_i(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0, \qquad /10/$$

де $q_0(\xi,t)\equiv 0$, $q_i(\xi,t)$ $(i=1,\dots,N)$ лінійно виражаються через $Q_j(\xi,t)$ $(j<i)$ та їх похідні.

Таким чином, з одержаних формул бачимо, що функції, які входять у /4/, визначаються рекурентно у такій послідовності $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(\xi,t)$, $v_0(x,t)$, $\Pi_1(x,\tau)$ і т.д. Стандартним чином [2] доводять, що функції $\Pi_i(x,\tau)$ і $Q_i(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N)$ експоненціально спадні. Однозначна розв"язальність задач /5/, /6/ випливає з праці [1].

Зауважимо, що виродженою задачею для /1/-/3/ є задача знаходження розв"язку виродженого рівняння /5_0/ з умовами

$$v_0(x,0)=\varphi(x)/c(x,0), \quad v_0(0,t)=\frac{b(0,t)\psi(t)}{d(0,t)},$$

а не з нульовими граничними умовами, як можна було б сподіватися з умов /2/ і /3/.

Для залишкового члена $R_N(x,t,\varepsilon)$ методом інтегралів енергії [6, 10] одержана оцінка

$$\|R_N(x,t,\varepsilon)\|_{L_2(D)}\le C\varepsilon^{N+1}, \qquad /11/$$

де константа C не залежить від ε.

Сформулюємо результат роботи.

<u>Теорема</u>. Якщо умови 1 - 4 виконуються, то розв"язок задачі /1/-/3/ допускає асимптотичне зображення /4/, де функції визначаються рекурентно у такій послідовності $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(\xi,t)$, $v_0(x,t)$, $\Pi_1(x,\tau)$ і т.д. Функції регулярної частини асимптотики визначаються розв"язками граничних задач для диференціальних рівнянь /5/, /6/; функції звичайних примежових шарів $\Pi_i(x,\tau)$ в околі $t=0$ і $Q_i(\xi,t)$ в околі $x=0$ - із задач /7/, /8/ і /9/, /10/ відповідно; залишковий член $R_N(x,t,\varepsilon)$ має оцінку /11/.

<u>Зауваження</u>. Результат роботи анонсовано у праці [9].

1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып.3. С.87-104. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.Л. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1967. № 5. С.3-122. 3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., 1979. 4. Горпинг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. 5. Джаваров М.Г. Смешанная задача для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных // Докл. АН СССР. 1963. Т.152. № 4. С.790-793. 6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 7. Мельник З.О. Змішана задача для загального гіперболічного рівняння другого порядку на площині // Доп. АН УРСР. 1965. № 4. С.13-15. 8. Флюд В.М., Цымбал В.Н. Асимптотика решения смешанной задачи для сингулярно возмущенной слабо связанной гиперболической системы // Укр. мат. журн. 1985. Т.37. С.481-487. 9. Цымбал В.Н. Задачи для сингулярно возмущенных уравнений математической физики с малым параметром в граничных условиях // Тез. докл. сов.-чехословац. совещ. Донецк, 1986. С.139. 10. Geel R. On initial and initial-boundary value problems of hyperbolic type in singular perturbation theory // Report of the Mathematical Istitute of the University of Amsterdam. 1975. P.16-75.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.91

УДК 517.956

І.І.Кміть

АНАЛОГ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Гіперболічні системи з двома незалежними змінними є предметом досліджень багатьох авторів. Розглянуті як класичні задачі, так і задачі з нерозділеними або інтегральними умовами /як по змінній x, так і по змінній t /. Некласичні задачі досліджені у працях [1-3]; ознайомитися з бібліографією, що стосується задач, можна, зокрема, у праці [4].

Дана стаття має за мету вивчення коректності постановки багатоточкової задачі по змінній x з нерозділеними умовами по змінній t для гіперболічної системи.

Нехай маємо область $\Omega=\{(x,t): 0<x<l, 0<t<T\}$. В Ω розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=f_i(x,t,u),\ i=\overline{1,n} \qquad /1/$$

з умовами

$$\alpha_i(x)u_i(x,0)+\beta_i(x)u_i(x,T)=\gamma_i(x),\ i=\overline{1,n}, \qquad /2/$$

$$\sum_{s=0}^{p+1}\sum_{j=1}^{n} b_{isj}(t)u_j(x_s,t)=H_i(t),\ i=\overline{1,n}. \qquad /3/$$

Щодо задачі /1/-/3/ зробимо припущення:

$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k<0<\lambda_{k+1}\leqslant\lambda_{k+2}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$, $0\leqslant k\leqslant n$, усюди в Ω ; функції $\lambda_i(x,t), f_i(x,t,u), \alpha_i(x), \beta_i(x)$, $\gamma_i(x), i,j=\overline{1,n}$ – неперервні по всіх своїх аргументах, а також неперервно диференційовані по x; $f_i(x,t,u)$, $i=\overline{1,n}$, мають неперервні перші похідні по u ; $b_{isj}(t), H_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $s=\overline{0,p+1}$, $j=\overline{1,n}$ – неперервно диференційовані; $|\lambda_i(x,t)|\leqslant\sigma_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, причому $\sigma_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ – неперервні на $[0,T]$; $x_0=0$, $x_{p+1}=l$, $p\neq 0$.

Введемо позначення:

$$\tilde\beta_i(x)=\frac{\beta_i(x)}{\alpha_i(x)},\ \tilde\gamma_i(x)=\frac{\gamma_i(x)}{\alpha_i(x)};$$

$$\Gamma(t)=\begin{pmatrix} b_{101}\ldots b_{10k} & b_{1,p+1,k+1}\ldots b_{1,p+1,n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n01}\ldots b_{n0k} & b_{n,p+1,k+1}\ldots b_{n,p+1,n}\end{pmatrix};$$

$$d_1=\max_t\frac{1}{|\det\Gamma|}pn^2\max_{\substack{t\\ i=\overline{1,n}}}|\Gamma_{ji}|\times$$

$$\times\max_{\substack{t\\ i,j=\overline{1,n}\\ s=\overline{1,p}}}\left\{|b_{isj}|,\ \max_{\substack{t\\ i=\overline{1,n}\\ j=\overline{k+1,n}}}|b_{i0j}|,\ \max_{\substack{t\\ i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,k}}}|b_{i,p+1,j}|\right\};$$

$$d_2=\max_{\substack{x\\ i=\overline{1,n}}}|\tilde\beta_i|\max_{\substack{\tau,t\\ i=\overline{1,n}}}\exp\int_\tau^t\lambda_{i\xi}(\xi(s),s)\,ds;$$

$$d_3 = \max_{\substack{\tau, t \\ i=\overline{1,n}}} \exp \int_\tau^t \lambda_{i\xi}(\xi(s), s)\, ds,$$

$$q_1 = d_1 \max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} \left\{ 1, |\tilde{\beta}_i|^{\max\{n_i\}+1} \right\};$$

$$q_2^1 = \frac{Td_1Ln}{1-q_1} \sum_{p=0}^{\max\{n_i\}+1} \left(\max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} |\tilde{\beta}_i| \right)^p + TLn;$$

$$q_2^2 = TLn \sum_{p=1}^{\max\{n_i\}+1} \left(\max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} |\tilde{\beta}_i| \right)^p +$$

$$+ \max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} \left\{ |\tilde{\beta}_i|, |\tilde{\beta}_i|^{\max\{n_i\}+1} \right\} (q_2^1 - TLn) + TLn;$$

$$q_2 = \max \left\{ q_2^1, q_2^2 \right\};$$

$$q_3 = d_1 d_3 \max_{\substack{x,t \\ i=\overline{1,n}}} \frac{1}{|\lambda_i|} \max_{\substack{x \\ i=\overline{1,n}}} \left\{ |\tilde{\beta}_i|, |\tilde{\beta}_i|^{\max\{n_i\}+1} \right\};$$

$$q_4^1 = \frac{TnCd_1d_3^2}{1-q_3} \max_{\substack{x,t \\ i=\overline{1,n}}} \frac{1}{|\lambda_i|} \sum_{p=0}^{\max\{n_i\}+1} d_2^p + TnCd_3;$$

$$q_4^2 = d_3^2 \max_{\substack{x,t \\ i=\overline{1,n}}} \frac{1}{|\lambda_i|} \max \left\{ d_2, d_2^{\max\{n_i\}+1} \right\} \times$$

$$\times (q_4^1 - TnCd_3) + TnCd_3;$$

$$q_4 = \max \left\{ q_4^1, q_4^2 \right\};$$

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}; \quad \beta(x) = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix};$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{1s1} & b_{1s2} & \cdots & b_{1sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{ns1} & b_{ns2} & \cdots & b_{nsn} \end{pmatrix};$$

$$C_s(t)=\begin{pmatrix} b_{1s1}(t)\lambda_1(x_s,t) & b_{1s2}(t)\lambda_2(x_s,t) & \dots & b_{1sn}(t)\lambda_n(x_s,t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{ns1}(t)\lambda_1(x_s,t) & b_{ns2}(t)\lambda_2(x_s,t) & \dots & b_{nsn}(t)\lambda_n(x_s,t) \end{pmatrix};$$

$$R_1=\begin{pmatrix} \alpha(x_0) & \ddots & 0 & \beta(x_0) & \ddots & 0 \\ 0 & & \alpha(x_{p+1}) & 0 & & \beta(x_{p+1}) \\ B_0(0) & \dots & B_{p+1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_0(T) & \dots & \bar{B}_{p+1}(T) \end{pmatrix};$$

$$R_2=\begin{pmatrix} \alpha(x_0) & \ddots & 0 & \beta(x_0) & \ddots & 0 \\ 0 & & \alpha(x_{p+1}) & 0 & & \beta(x_{p+1}) \\ C_0(0) & \dots & C_{p+1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_0(T) & \dots & C_{p+1}(T) \end{pmatrix},$$

Ae

$$n_i \le \left[\frac{l}{\int_0^T G_i(t)dt} \right] + 1, \quad i=\overline{1,n} \; .$$

Теорема. Нехай крім зроблених вище припущень щодо задачі /I/-/3/ виконуються умови:

1/ $f_i \in Lip_u, L, i=\overline{1,n}$;

2/ $\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right| \leq C, \ i,j=\overline{1,n}, (x,t)\in\bar{\Omega}, |u|<\infty$;

3/ $\alpha_i(x)\neq 0, i=\overline{1,n}$;

4/ $\operatorname{rang} R_1 = \operatorname{rang} R_2 = 4n+np$;

5/ $q_i < 1, i=\overline{1,4}$;

6/ $\det \Gamma(t)\neq 0, \forall t\in[0,T]$.

Тоді в області Ω існує единий класичний розв"язок задачі /I/-/3/.

Доводимо цю теорему за допомогою методу характеристик і принципу стискуючих відображень. Зокрема, вводемо невідомі функції $\varphi_i(x)=u_i(x,0)$, $i=\overline{1,n}$; $\mu_j(t)=u_j(0,t)$, $j=\overline{1,k}$ і $\nu_s=u_s(l,t)$, $s=\overline{k+1,n}$. Для функцій $\varphi_i(x)$, $\mu_j(t)$, і $\nu_s(t)$ отримаємо деякі системи рівнянь, існування розв"язків яких гарантується умовами теореми. Після знаходження цих функцій, маємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра щодо невідомих $u_i(x,t), i=\overline{1,n}$.

1. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21 № 2. С.246-253. 2. Мельник З.О. Общие граничные задачи для линейных гиперболических систем на прямой. Львов, 1987. 47 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, 1987, № 1281 - Ук 87. 3. Мельник З.О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. 1981. Т.17. № 6. С.1096-1104. 4. Пташник Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.91

УДК 517.948

В.А.Козицький

РІВНЯННЯ ТИПУ ЗГОРТКИ ДЛЯ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Нехай $\sigma=\{t_n\}_{-\infty}^{\infty}$ строго зростаюча послідовність дійсних чисел, таких що $t_{-n}=-t_n$, $\sigma\subset[-\alpha,\alpha[$, $0<\alpha<\infty$. Разом із l_1 і $AP_w\{\sigma\}$-простором майже-періодичних за Бором функцій, що зображаються абсолютно збіжним рядом Фур"є із заданим спектром σ, розглянемо спряжені простори, відповідно l_∞ і $AP_w^*\{\sigma\}$. Кожному елементові $f\in l_\infty$ за допомогою оператора W_σ поставимо у взаємно однозначну відповідність слабо збіжний ряд Фур"є $(W_\sigma f)(x)=$ $=\sum_{t_n\in\sigma} f_n\, e^{it_nx}=F(x)$, $x\in R$ – елемент простору $AP_w^*\{\sigma\}$. При цьому приймемо $\|F\|_{AP_w^*\{\sigma\}}=\|f\|_{l_\infty}$.

Відзначимо, що просторові $AP_w^*\{\sigma\}$ належить функціонал $\delta(x)=\sum_{t_n\in\sigma} e^{it_nx}$, для якого

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(x)\,dx=1.$$

Легко бачити, що для функції $\Phi(x)\in AP_w\{\sigma\}$ маємо рівність

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(x-t)\,\Phi(t)\,dt=\Phi(x)\quad,\ x\in R.$$

Визначимо оператор V :

$$[V\Phi(x)]_m=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(m-t)\,\Phi(t)\,dt=\Phi_m\,,\ m\in M, \qquad /1/$$

де $\Phi(x)\in AP_w\{\sigma\}$, $M=\{m=\pi\alpha^{-1}n : n\in\mathbb{Z}\}$.

<u>Означення.</u> Послідовність Φ_m, $m\in M$, визначена рівністю /1/, називається майже-періодичною послідовністю.

Із /1/ випливає, що Φ_m зображається абсолютно збіжним рядом Фур"є $\Phi_m=\sum_{t_n\in\sigma}\varphi_n\, e^{it_nm}$, $m\in M$.

Простір таких майже-періодичних послідовностей позначимо через $S\{\sigma\}$, з нормою $\|\Phi\|_{S\{\sigma\}}=\|\varphi\|_{l_1}$.

Використавши рівність $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{K=-N}^{N}e^{i\tau K}=\begin{cases}1, & \tau=0\\ 0, & \tau\neq 0\end{cases}$,

одержимо

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\tilde{\delta}(x-m)\,\tilde{\delta}(m-t)=\tilde{\delta}(x-t),\ x,t\in\mathbb{R}. \qquad /2/$$

Використавши /2/, визначимо обернений оператор $V^{-1}: S\{\sigma\} \to AP_W\{\sigma\}$ за формулою

$$(V^{-1}\Phi_m)(x) = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m\,\tilde{\delta}(x-m) = \Phi(x),\ x\in\mathbb{R}. \quad /3/$$

Лема 1. Нехай $\Phi_m \in S\{\sigma\}$, $\Phi(x)\in AP_W\{\sigma\}$ і між собою зв"язані рівністю /3/. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m e^{-it_n m} = \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\Phi(x)e^{-it_n x}dx = \varphi_n,\ t_n\in\sigma.$$

Доведення.

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\Phi(x)e^{-it_n x}dx = \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\Big[\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m\tilde{\delta}(x-m)\Big]\times$$

$$\times e^{-it_n x}dx = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m\Big[\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\tilde{\delta}(x-m)e^{-it_n x}dx\Big] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m e^{-it_n m} = \varphi_n,\ t_n\in\sigma.$$

Теорема. Оператор $V: AP_W\{\sigma\} \to S\{\sigma\}$ - ізометричний ізоморфізм.

Доведення безпосередньо випливає з формули

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}|\Phi_m|^2 = \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|\Phi(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varphi_n|^2,$$

справедливість якої встановлюється простим прямим підрахунком.

Визначимо оператори Ω_σ, Ω_σ^{-1}:

$$(\Omega_\sigma\varphi)(m) = \sum_{t_n\in\sigma}\varphi_n e^{it_n m} = \Phi_m,\ m\in M,$$

$$(\Omega_\sigma^{-1}\Phi_m)(n) = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_m e^{-it_n m} = \varphi_n,\ t_n\in\sigma,$$

це $\varphi_n\in l_1$, $\Phi_m\in S\{\sigma\}$.

Оператор Ω_σ має такі с ми властивості, як і дискретний оператор Фур"є для періодичних функцій. Перелічимо деякі з них.

1. Згортка послідовностей. Нехай $\Phi, u\in S\{\sigma\}$, тоді

$$H_m = (\Phi * u)(m) = \lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}\Phi_{m-p}u_p,\ m\in M$$

і при цьому

$$(\Omega_\sigma^{-1}H)(n) = \varphi_n u_n\ \ (\in l_1),\ t_n\in\sigma.$$

Лема 2. Нехай $\Phi(x)$, $G(x)\in AP_W\{\sigma\}$; $\Phi, G\in S\{\sigma\}$ і зв"язані між собою рівністю /1/. Тоді

$$[V(\Phi(x) * G(x))](m) = (\Phi * G)(m),\ m\in M.$$

Доведення здійснюємо за схемою доведення леми 1 із використанням рівності /2/.

2. Зсув аргумента на число $p\in M$. Нехай $\Phi\in S\{\sigma\}$, тоді $(\Omega_{\sigma}^{-1}\Phi_{m-p})(\kappa)=\varphi_{\kappa}e^{-it_{\kappa}p}$ $(\in l_1)$, $t_{\kappa}\in\sigma$.

Для майже-періодичних послідовностей можна розглядати рівняння типу згортки

$$\lambda\Phi_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}K_{m-p}\Phi_p=G_m\ ,\quad m\in M, \qquad /4/$$

$$\lambda\Phi_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}[A_{m-p}+B_{m+p}]\Phi_p=C_m\ ,\ m\in M, \qquad /5/$$

де $\lambda\in\mathbb{C}$, $K_m, A_m, B_m, G_m\in S\{\sigma\}$ – відомі, а $\Phi_m\in S\{\sigma\}$ – розв"язок рівняння.

Розглянемо рівняння /4/. За допомогою оператора Ω_{σ}^{-1} рівняння /4/ зводиться до простого рівняння

$$(\lambda+K_n)\varphi_n=g_n\ ,\quad t_n\in\sigma,$$

де $\varphi_\kappa, K_n, g_n\in l_1$.

У випадку $\lambda\neq 0$ множник $\lambda+K_n$ може перетворюватись у нуль лише для скінченного числа елементів $t_n\in\sigma$. Якщо $\lambda+K_n\neq 0$, тоді рівняння /4/ має безумовний і єдиний у $S\{\sigma\}$ розв"язок

$$\Phi_m=\lambda^{-1}G_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}R_{m-p}G_p\ ,\quad m\in M,$$

де $R_m=\Omega_{\sigma}[-\lambda^{-1}K_n(\lambda+K_n)^{-1}](m)\in S\{\sigma\}$.

Якщо множник $\lambda+K_n$ перетворюється в нуль $\varkappa$ раз для $\{t_{n_j}\}_{j=1}^{\varkappa}=\Delta\subset\sigma$, тоді однорідне рівняння /4/ має $\varkappa$ лінійно незалежних розв"язків $e^{it_{n_j}m}$, $t_{n_j}\in\Delta$, $m\in M$, а неоднорідне рівняння має в $S\{\sigma\}$ розв"язок

$$\Phi_m=\lambda^{-1}G_m+\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{p=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}Q_{m-p}G_p+\sum_{t_{n_j}\in\Delta}c_j e^{it_{n_j}m}\ ,\ m\in M$$

при виконанні $\varkappa$ умов розв"язальності

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N}G_m e^{-it_{n_j}m}=0\ ,\quad t_{n_j}\in\Delta,$$

де $Q_m=\Omega_{\sigma\setminus\Delta}[-\lambda^{-1}(\lambda+K_n)](m)\in S\{\sigma\}$, c_j – довільні комплексні числа. У випадку $\lambda=0$ множник K_n може перетворюватись у нуль як на скінченній множині, так і на зчисленній множині Δ, $\Delta \subset \sigma$. У цьому випадку рівняння /4/ має розв"язок у $S\{\sigma\}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\{g_n K_n^{-1}\} \in l_1$$

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)^{-1}\sum_{m=-\pi\alpha^{-1}N}^{\pi\alpha^{-1}N} G_m e^{-it_{nj}m} = 0, \quad t_{nj} \in \Delta.$$

При виконанні цих умов розв"язок рівняння /4/ у $S\{\sigma\}$ має вигляд

$$\Phi_m = \sum_{t_{nj}\in\Delta} c_j e^{it_{nj}m} + \sum_{t_n\in\sigma\setminus\Delta} g_n K_n^{-1} e^{it_n m}, \quad m \in M,$$

де $\{c_j\}_{t_{nj}\in\Delta}$ - довільна комплекснозначна послідовність із l_1.

Рівняння /5/ досліджується аналогічним чином.

1. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М., 1953. 2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971. 3. Fan K. Les fonctions asymptotiquement presqueperiodiques d'une variable entiére et leurs applications á l'etnde de l'iteration des transformations continues// Math. Z. 1942/43. №48. S.685-711.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.91

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ОБЕРНЕНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА

Нехай G - півплощина при $t>0$, $G^s \subset G$ - область, обмежена деякою наперед невідомою кривою $\gamma: x=s(t)$ $(s(0)=0, s(t)\in C^1[0,T]$ та прямими $x=l$, $t=0$, $t=T$.

Задача полягає у знаходженні кривої γ разом із функціями $u(x,t)$, $f(t)$ з умов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F(x,t,u,u_t,u_x)f(t), \qquad /1/$$

$$u(s(t),t) = h_1(s(t),t), \; u(l,t) = h_2(t), \; 0<t\leq T, \qquad /2/$$

$$u(x,0) = g_0(x), \; u_t(x,0) = g_1(x), \; 0 < x \leq l, \qquad /3/$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = H(t), \qquad /4/$$

$$s(t) = \int_0^t \alpha(u_x(S(\tau),\tau))\,d\tau, \quad (0 \leq t \leq T). \qquad /5/$$

Припускаємо, що $\lambda_i(x,t) \in C^3[\bar{G}^s]$, $\lambda_i(x,t) \geq \lambda - const > 0$ для всіх $(x,t) \in \bar{G}^s$, $F(x,t,u,u_t,u_x)$ – неперервна по всіх змінних у $\bar{G}^s \times R^3$, неперервно диференційована по x, u, u_t, u_x, а похідні по u, u_t, u_x – рівномірно обмежені, $\alpha(u_x(S(t),t))$ – неперервна в R і має в ній обмежену похідну по u_x. Нехай також – $\lambda_1(S(t),t) < s'(t) < \lambda_2(S(t),t)$ при $t \in [0,T]$. Крім цього, вважаємо, що $g_0(x) \in C^2[0,l]$, $g_1(x) \in C^1[0,l]$, $h_1(y,t) \in C^2(R \times [0,T])$, $h_2(t), H(t) \in C^2[0,T]$; виконуються умови узгодження в кутових точках

$$F(0,l,h_2(0), g_1(l), H(0)) \neq 0. \qquad /6/$$

У близькій постановці "пряма" гіперболічна задача Стефана описана у праці [3]. Такі задачі виникають у багатьох фізичних процесах [2]. Обернені гіперболічні задачі розглянуті багатьма авторами, зокрема відзначимо працю [1]. Дослідження обернених гіперболічних задач з невідомими межами нам не відомі.

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x,t)$ розв"язки характеристичного рівняння $d\xi/d\tau = \lambda_i(\xi,\tau)$, $\xi(\tau) = x$ $(i=\overline{1,2})$.

Справедлива теорема.

Теорема. При виконанні наведених вище умов існує $\varepsilon > 0$ таке, що задача /1/–/5/ має єдиний класичний розв"язок $u(x,t) \in C^2(\bar{G}^s_\varepsilon)$, $s(t) \in C^1[0,\varepsilon]$, $f(t) \in C[0,\varepsilon]$.

Доведемо цю теорему згідно з методикою [2, 3] за такою схемою. Вибравши функцію $s(t)$ з відповідного класу /вибирати слід таким чином, щоб виконувалися всі припущення щодо функції $s(t)$ в околі початку координат/, зведемо задачу /1/–/5/ до еквівалентної системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду [3]:

$$\underset{(x,t)\in\Pi_0}{u(x,t)} = \gamma_0(x,t) + \int_0^t f(\tau)d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi,$$

$$u(x,t) = h_1(s(t^s(x,t)),\, t^s(x,t)) + \gamma_1(x,t) +$$
$(x,t)\in \Pi_1$

$$+ \int_{t^s(x,t)}^{t} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi + \qquad /7/$$

$$+ \int_{0}^{t^s(x,t)} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_2(\tau;s(t^s(x,t)),t^s(x,t))}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi$$

$$u(x,t) = h_2^l(t^l(x,t)) + \gamma_2(x,t) +$$
$(x,t)\in \Pi_2$

$$+ \int_{t^l(x,t)}^{t} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_2(\tau;x,t)} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi +$$

$$+ \int_{0}^{t^l(x,t)} f(\tau)d\tau \int_{\varphi_1(\tau;x,t)}^{\varphi_1(\tau;l,t^l(x,t))} G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau,u,u_t,u_x)d\xi$$

$$(0 \le t \le T)$$

та ще дванадцяти рівнянь щодо u_x, u_t, u_{tx}, u_{xx}, які одержують диференціюванням наведених співвідношень. Тут γ_i, $(i=\overline{0,2})$, G – відомі функції; $t^s(x,t)$ і $t^l(x,t)$ – ординати точок перетину відповідних характеристик з кривою γ та прямою $x=l$.

Для знаходження $f(t)$ підставимо значення $\frac{\partial u}{\partial x}$ $((x,t)\in\Pi_2)$ в умову /4/. У результаті одержимо інтегральне рівняння Вольтерра першого роду щодо функції $f(t)$

$$\beta(t) = \int_0^t G_1(l,t,\varphi_1(\tau;l,t),\tau)F(\varphi_1(\tau;l,t),\tau,u,u_t,u_x)f(\tau)d\tau,$$

або в результаті диференціювання маємо

$$f(t) = P(t) + \int_0^t R(t,\tau,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tx})f(\tau)d\tau \qquad /8/$$

/функції $\beta(t), G_1, P, R$ – відомі, які можна легко записати через вихідні дані задачі/.

Таким чином, для визначення функцій $u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, f(t), s(t)$ отримаємо нелінійну систему інтегродиференціальних рівнянь /5/, /7/–/ /, яку для малих t можна розв"язати методом стискуючих відображень [2].

1. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. М., 1988. 2. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. № 3. С.497-503. 3. Мельник З.О. Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 8. С. 13-15.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.92

УДК 517.95

Н.М.Задорожна

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Задачі без початкових умов для рівнянь параболічного типу у певних аспектах досліджені у працях [1, 2]. Такі задачі мають важливе як теоретичне, так і практичне значення, оскільки описують нестаціонарні процеси, які не залежать від початкових умов протягом достатньо великого проміжку часу.

У даній праці для лінійного параболічного рівняння другого порядку в необмежених по t паралелепіпедах розглянуті задача без початкових умов та змішана задача з періодичними по x крайовими умовами. Встановлені умови існування та єдиності розв"язків задач, а у випадку змішаної задачі досліджено також питання асимптотичної поведінки розв"язку при $t \to +\infty$.

1. Вкажемо на деякі допоміжні відомості та функціональні простори, використані у праці [4]:

$H^1(\Omega)$ – гільбертовий простір з нормою

$$\|u(x)\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x))dx, \nabla u = \operatorname{grad} u;$$

$L^\infty((0,T);X)$ – простір суттєво обмежених функцій $u(t) \in ((0,T) \to X)$

/ X - банахів простір/, вимірних за Бохнером з нормою

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty((0,T);X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(x,t)\|_X .$$

За теоремою Данфорда-Петтіса $L^\infty((0,T);X)=[L^1((0,T);X)]^*$.

У теорії нерефлексивних просторів важливу роль відіграє твердження [3]:

Теорема 1 [2]. Якщо E - сепарабельний лінійний нормований простір, то у будь-якій обмеженій послідовності неперервних лінійних функціоналів на E міститься слабо збіжна підпослідовність.

2. В області $\Pi=\{(x,t): x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,\ t\in(-\infty,T), T>0\}$, $\Omega=\{(x_1,\dots,x_n): 0<x_i<1,\ i=\overline{1,n}\}$ розглядаємо задачу

$$Lu \equiv u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}-\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}-c(x,t)u=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(x,t)\big|_{x_i=0}=u(x,t)\big|_{x_i=1},\ i=\overline{1,n}, \qquad /2/$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x_i=0}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x_i=1},\ i=\overline{1,n}, \qquad /3/$$

де коефіцієнти рівняння /1/ такі, що

$$\nu_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\mu_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ \nu_0>0,\ \xi\in\mathbb{R}^n, \qquad /4/$$

$$a_{ij}(x,t)\big|_{x_i=0}=a_{ij}(x,t)\big|_{x_i=1};\ a_{ij}=a_{ji},\ i,j=\overline{1,n}, \qquad /5/$$

$$\max|c(x,t);\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x,t)|\le M,\ M>0. \qquad /6/$$

Функцію $u(x,t)\in L^\infty_{loc}((-\infty,T);H^1(\Omega))$ або $u(x,t)\in H^1_{loc}(\Pi)$ називаємо узагальненим розв'язком задачі /1/-/3/, якщо вона задовольняє умову /2/ і рівність

$$\int_\Pi u_t v\psi\,dxdt+\int_\Pi\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\psi-\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}v\psi-$$
$$-cuv\psi\Big)dxdt=\int_\Pi fv\psi\,dxdt \qquad /7/$$

для довільних функцій $v(x)\in H^1(\Omega)$ і $\psi(t)\in C_0^\infty(\mathrm{int}(-\infty,T))$.

Теорема 2. Нехай справджуються умови /4/-/6/ і нехай існує $\mu\ge 0$ таке, що для всіх $(x,t)\in\Pi$ виконуються умови

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\mu+\frac{d}{dt}a_{ij}\right)\xi_i\xi_j\leq\tilde{\mu}_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ \tilde{\mu}_0>0,\ \xi\in\mathbb{R}^n; \qquad /8/$$

$$\int_{\Pi}e^{\mu t}f^2\,dxdt<\infty;$$

$$\mu\leq 4\pi^2\left(\nu_0-\tilde{\mu}_0-M\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi^2}\right)\right)-1-\delta,\ (0<\delta<1). \qquad /9/$$

Тоді існує узагальнений розв"язок $u(x,t)$ задачі /I/-/3/, такий що $u_t\in L^2_{loc}(\Pi)$.

Доведення. Побудуємо послідовність наближених розв"язків задачі /I/-/3/

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}c_k^N(t)\varphi_k(x),\quad N\in\mathbb{N}, \qquad /10/$$

де $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – повна ортогональна система функцій у $H^1(\Omega)$, які задовольняють умови /2/ [3]. В одновимірному випадку $(n=1)$ такою системою є функції $\{1;\cos 2\pi mx,\ \sin 2\pi mx,\ m=1,2,\dots\}$. Використавши метод Гальоркіна для визначення коефіцієнтів $c_k^N(t)$, отримаємо систему рівнянь

$$\int_{\Omega}(u_t^N\varphi_k+a_{ij}u_{x_i}^N\varphi_{kx_j}-b_iu_{x_i}^N\varphi_k-cu^N\varphi_k)dx=\int_{\Omega}f\varphi_k dx,\ k=\overline{1,N}. \qquad /11/$$

Із /10/ і /11/ випливає, що функції $c_k^N(t)(k=\overline{1,N})$ є розв"язком системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, який, як відомо, однозначно визначається умовами Коші $c_k^N(t_0)=0\ (k=\overline{1,N})$ /ці умови задаємо додатково/.

Для того, щоб показати обмеженість побудованих таким чином наближених розв"язків $u^N(x,t)\ (N\in\mathbb{N})$ у скінченних областях, виведемо дві апріорні оцінки. З цією метою помножимо кожне рівняння системи /11/ на $e^{\mu t}c_k^N(t)$, додамо їх та оцінимо члени отриманого рівняння, використовуючи нерівності Гельдера і Пуанкаре. Тоді одержимо нерівність

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}e^{\mu t}(u^N)^2dx+\left(\nu_0-\frac{M}{2}-\frac{1+\mu+\delta+2M}{4\pi^2}\right)\int_{\Pi_\tau}e^{\mu t}|\nabla u^N|^2dxdt\leq \qquad /12/$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_{\Pi_\tau}e^{\mu t}f^2dxdt,$$

де $\Pi_\tau=\Omega\times[t_0,\tau]$, Ω_τ – верхня основа Π_τ.

При виведенні другої апріорної оцінки домножимо кожне рівняння системи /II/ на $e^{\mu t}\frac{d}{dt}c_k^N(t)$ та застосуємо аналогічні до попереднього випадку міркування. Тоді отримаємо оцінку

$$-(\tilde{\mu}_0+M+\frac{M}{2\pi^2})\int\limits_{\Pi_\tau} e^{\mu t}|\nabla u^N|^2\,dxdt+\nu_0\int\limits_{\Omega_\tau} e^{\mu t}|\nabla u^N|^2 dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{\Pi_\tau} e^{\mu t}(u_t^N)^2 dxdt\leq \int\limits_{\Pi_\tau} f^2 e^{\mu t}\,dxdt. \qquad /13/$$

Із нерівностей /12/ і /13/, враховуючи невід"ємність коефіцієнта при $\int\limits_{\Pi_\tau} e^{\mu t}|\nabla u^N|^2 dxdt$ /за умови теореми/, одержимо нерівність

$$\|u^N\|^2_{L^\infty((-\kappa,T);H^1(\Omega))}+\|u^N\|^2_{H^1(\Pi_\kappa)}\leq C(\kappa)\ , \qquad /14/$$

де $\Pi_\kappa=\Omega\times(-\kappa,T)$; $C(\kappa)=const\, e^{\mu\kappa}$.

На основі теореми і в кожному скінченному паралелепіпеді Π_κ з послідовності $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ можна вибрати підпослідовність $\{u^{i,\kappa}\}_{i=1}^\infty$, яка, в свою чергу, є підпослідовністю $\{u^{i,\kappa-1}\}_{i=1}^\infty$. Ці підпослідовності такі, що для кожного $\kappa=\overline{1,\infty}$

$$u^{i,\kappa}\xrightarrow[i\to\infty]{}u^\kappa \quad -\ *\ -\text{ слабо в } L^\infty((-\kappa,T);H^1(\Omega));$$

$$u^{i,\kappa}\xrightarrow[i\to\infty]{}u^\kappa \quad -\text{ слабо в } H^1(\Pi_\kappa). \qquad /15/$$

Легко показати, що в Π_1 $u^\kappa=u^{\kappa-1}=\ldots=u^1$.

Далі, вибравши з послідовності $\{u^{i,\kappa}\}_{i,\kappa=1}^\infty$ діагональну підпослідовність $\{u^{i,i}\}_{i=1}^\infty$, показуємо

$$u^{i,i}\xrightarrow[i\to\infty]{}u \quad -\ *\ -\text{ слабо в } L^\infty_{loc}((-\infty,T);H^1(\Omega));$$

$$u^{i,i}\xrightarrow[i\to\infty]{}u \quad -\text{ слабо в } H^1_{loc}(\Pi), \qquad /16/$$

де $u(x,t)=\{u^\kappa(x,t):(x,t)\in\Pi_\kappa\}$ – узагальнений розв"язок задачі /1/–/3/.

<u>Теорема 3.</u> Нехай виконуються умови /4/–/6/ і нехай існує $\mu\in\mathbb{R}$ таке, що справедлива нерівність

$$\mu\leq 4\pi^2(2\nu_0-M(1+\frac{1}{2\pi^2}))-1\ . \qquad /17/$$

Тоді в класі функцій $u(x,t)$, таких, що $\int\limits_{\Pi} e^{\mu t}u^2dxdt<\infty$, задача /I/-/3/ не може мати більш як один узагальнений розв"язок.

Доведення. Нехай існують два узагальнених розв"язки $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$ задачі /I/-/3/. Тоді функція $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ задовольняє умови /2/, /3/ та рівняння $Lu=0$. Домноживши це рівняння на $ue^{\mu t}$, проінтегрувавши по області Ω та оцінивши члени отриманого рівняння, одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\left(ue^{\frac{\mu t}{2}}\right)^2_t dx\leqslant\left(M-2\nu_0+\frac{1+2M+\mu}{\pi^2}\right)\int\limits_{\Omega}e^{\mu t}|\nabla u|^2dx. \qquad /18/$$

Проінтегрувавши нерівність /18/ по t у межах від $-\infty$ до T, матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_T}u^2e^{\mu t}dx\leqslant\left(M-2\nu_0+\frac{1+2M+\mu}{4\pi^2}\right)\int\limits_{\Pi}e^{\mu t}|\nabla u|^2dxdt, \qquad /19/$$

де Ω_T – верхня основа П. На основі /19/, враховуючи /17/, робимо висновок про неможливість існування двох різних розв"язків задачі /I/-/3/.

3. Розглянемо тепер в області $\Pi'=\{(x,t): x\in\Omega, t\in(0;+\infty)\}$ для рівняння /I/ задачу з умовами /2/, /3/ та умовою

$$u(x,0)=u_0(x). \qquad /20/$$

Теорема 4. Нехай в області Π' виконуються умови /4/-/6/ і нехай існує таке $\mu\in\mathbb{R}$, що задовольняються нерівності /8/, /9/ і нерівність $\int\limits_{\Pi'}e^{\mu t}f^2dxdt<\infty$. Тоді в області Π' існує узагальнений розв"язок $u(x,t)$ задачі /I/-/3/, /20/, такий що $u_t\in L^2_{loc}(\Pi')$.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 2, але в апріорних оцінках /12/, /13/ інтегрування виконуємо по областях Π'_τ і Ω'_τ, де $\Pi'_\tau=\Omega\times[0,\tau]$, Ω'_τ – верхня основа Π'_τ. Додатково з"являються нові члени $\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(u_0^N)^2dx$ і $\mu_0\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0^N|^2dx$. Із цих нових апріорних оцінок, враховуючи /9/, одержуємо нерівність

$$c_1\int\limits_{\Omega'_\tau}((u^N)^2+|\nabla u^N|^2)e^{\mu t}dx+c_2\int\limits_{\Pi'_\tau}(|\nabla u^N|^2+(u^N_t)^2)e^{\mu t}dxdt\leqslant$$
$$\leqslant c_3\int\limits_{\Omega}((u_0^N)^2+|\nabla u_0^N|^2)dx, \qquad /21/$$

де c_1, c_2, c_3 – константи.

Із нерівності /21/ бачимо, що залежно від μ ($\mu<0$, $\mu=0$, $\mu>0$) маємо обмеженість послідовності наближених розв"язків $\{u^N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ задачі /I/-/3/, /20/ або в області Π', або лише в скінченних областях.

При $\mu > 0$ і $\mu = 0$ із нерівності /21/ випливає нерівність

$$\|u^N\|^2_{L^\infty((0,T);H^1(\Omega))} + \|u^N\|^2_{H^1(\Pi'_T)} \leq const\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}, \text{ де } \Pi'_T = \Omega \times [0,T], \qquad /22/$$

При $\mu < 0$ маємо

$$\|u^N\|^2_{L^\infty((0,T);H^1(\Omega))} + \|u^N\|^2_{H^1(\Pi'_T)} \leq C(T), \text{ де } C(T) = const \cdot e^{\mu t}, \mu > 0, \qquad /23/$$

Із нерівності /22/ бачимо, що послідовність $\{u^N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ обмежена в області Π'. На основі теореми і з цієї послідовності можна вибрати таку підпослідовність $\{u^K(x,t)\}_{K=1}^{\infty}$, що

$$\begin{cases} u^K \xrightarrow[K\to\infty]{} u & - * - \text{слабо в } L^\infty_{loc}((0;+\infty);H^1(\Omega)); \\ u^K \xrightarrow[K\to\infty]{} u & - \text{слабо в } H^1_{loc}(\Pi'). \end{cases}$$

Показуємо, що $u(x,t)$ є узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/, /20/. З нерівності /23/ випливає, що узагальнений розв"язок даної задачі при $t \to +\infty$ зростатиме не швидше, ніж експонента, і слабка збіжність буде лише в скінченних областях Π'_T. Вибір діагональної підпослідовності і доведення того, що вона збігається до узагальненого розв"язку задачі /1/-/3/, /20/, здійснюємо так само, як і у випадку задачі /1/-/3/.

Теорема 5. Якщо в області Π' виконуються умови /4/-/6/ та існує $\mu \in \mathbb{R}$, для якого справедлива оцінка /17/, то в класі функцій $u(x,t)$, для яких $\int e^{\mu t} u^2 dx dt < \infty$, задача /1/-/3/, /20/ не може мати більш як один узагальнений розв"язок.

Доведення теореми виконуємо аналогічно доведенню теореми 3, але нерівність /18/ інтегруємо по t в межах від 0 до $j \, (j = 1, 2, \ldots)$.

Результати роботи переносяться на системи параболічних рівнянь вигляду /1/.

1. Ивасишен С.Д. О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий //Дифф. уравнения. 1978. Т.14. № 2. С.201-205. 2. Ивасишен С.Д. О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. 1982. Т.34. № 5. С.168-169. 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1989. 4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.92

УДК 517.956

П.Я.Пукач

ПРО ЗАДАЧУ З ВИДОЗМІНЕНОЮ ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ

Параболічні рівняння та системи, що вироджуються за часовою змінною, досліджені у багатьох працях [2-5].

Мета даної праці - вивчення змішаної задачі для лінійної та нелінійної параболічних систем, що вироджуються у початковий момент часу. Застосовано таку видозмінену початкову умову, що завжди гарантує єдиність розв"язку вищезгаданої задачі.

У циліндричній області $Q=\Omega\times S$, $S=(0,T)$ розглянемо змішану задачу

$$\Phi(t)u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x,t)u_{x_i}+ \qquad /1/$$
$$+C(x,t)u=F(x,t),$$

$$u|_{\Gamma}=0, \qquad /2/$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-c_1}u=0. \qquad /3/$$

Щодо Q припустимо: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ - обмежена область, $\partial\Omega\in C^2$, $\Gamma=\partial\Omega\times S$ - бічна поверхня Q.

Припустимо також, що Φ, A_{ij}, B_i, C $(i=\overline{1,n})$ - квадратні матриці розмірності m, $F=(F_1,\dots,F_m)$.

Крім цього:

1°. $\Phi(t)=diag[\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)]$,

$\varphi_i(t):\bar{S}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,m}$; $\varphi_i(t)>0$, $t\in\bar{S}\setminus\{0\}$,

$\varphi_i(0)=0$, $\varphi_i(t)$ - нескінченно диференційовані на S функції;

$$(\Phi(t)\xi,\xi)\geq t^{\alpha}|\xi|^2,\ \alpha>0,$$
$$(\Phi'(t)\xi,\xi)\leq\alpha t^{\alpha-1}|\xi|^2.$$

$\forall t\in S$ - та довільного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n_m$.

2°. Елементи матриць A_{ij}, $A_{ij_{x_k}}$ $(i,j,k=\overline{1,n})$ - обмежені в Q функції, причому

$$\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)\xi_i,\xi_j)\geq\nu\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$$

для майже всіх $(x,t)\in Q$ та довільного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n_m$.

3^0. Елементи матриць $B_i(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$ – обмежені в Q функції, такі що $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{x\in\Omega} \|B_i(x,t)\| = b(t)$, причому $\max\limits_{t\in\bar{S}} b(t) \leq \frac{\nu}{A_0+1}$, де A_0 – константа відомої нерівності Фрідріхса для функцій з $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$.

4^0. $\left(\frac{C(x,t)}{t^{\alpha-1}}\xi,\xi\right) \leq c_1|\xi|^2$, $c_1 \geq 0$

для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n_m$.

Таким чином, якщо $c_1 = 0$, то умова /3/ є звичайною початковою умовою. Якщо ж $c_1 > 0$, то розглядаємо розв"язки задачі /I/, /2/, що з певною швидкістю спадають при $t\to 0$.

Теорема I.

Нехай виконуються умови I^0–4^0. Тоді задача /I/–/3/ має не більш як один розв"язок $u(x,t)$, такий що

$$t^{\alpha/2}u \in L^\infty_m(S;L^2(\Omega)).$$

Приклад.

Розглянемо змішану задачу для скалярного рівняння:

$$tu_t - \varepsilon u_{xx} + cu = 0, \quad c<0, \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-|c|}u(x,t) = 0. \tag{6}$$

Задача /4/, /5/ з початковою умовою $\lim\limits_{t\to 0} t^{-|c|+2\varepsilon}u(x,t) = 0$ має нетривіальні розв"язки вигляду $u = const\cdot t^{-c-\varepsilon}\sin x$. Таким чином, умова /6/, а отже, і /3/, визначає точний клас єдиності розв"язку змішаної задачі для системи /I/.

Нехай далі

5^0. $F(x,t)\,t^{-\frac{1}{2}(\alpha+\varkappa+[\varkappa])} \in L^2(Q)$, $\alpha+2c_1 = \varkappa$, $[\varkappa]$ – ціла частина $\varkappa$.

Теорема 2.

Нехай виконуються умови теореми I, а також умова 5^0. Тоді задача /I/–/3/ має розв"язок $u(x,t)$, такий що

$$t^{-c}u \in L^\infty_m(S;L^2(\Omega)),$$
$$u \in L^2_m(S;\overset{0}{H}{}^1(\Omega)).$$

В області Q, описаній вище, розглянемо систему

$$\Phi(t)u_t + A(u) + C(x,t)u = F(x,t). \qquad /7/$$

Залишимо в силі припущення 1^0 та 4^0 щодо матриць $\Phi(t)$ і $C(x,t)$. Вважатимемо, що оператор $A: V^m \to (V^*)^m$, $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $p>2$, який фігурує в системі /7/, має вигляд

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_0(x,|\nabla u|^{p-1})|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \omega_1(x)|u|^{p-2}u.$$

Щодо функцій ω_0 та ω_1 припускатимемо виконання певних умов, що гарантують хемінеперервність, монотонність та коерцитивність оператора A, як, наприклад, у праці [1].

Теорема 3.

Нехай A - оператор описаного вище вигляду, виконуються умови 1^0, 4^0. Тоді задача /7/, /2/, /3/ має не більш як один розв"язок $u(x,t)$, такий що

$$t^{\alpha/2} u \in L_m^\infty(S; L^2(\Omega)).$$

Припускаємо далі:

5^0а. $\int_0^T \frac{\|F\|^q_{(V^*)^m}}{t^{1+2[\varkappa]}}\, dt < +\infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Теорема 4.

Нехай виконуються умови 1^0, 4^0, 5^0а. Тоді існує розв"язок $u(x,t)$ задачі /7/, /2/, /3/, такий що

$$t^{-c_1} u \in L_m^\infty(S; L^2(\Omega)), \ u \in L_m^p(S; V),$$
$$t^\alpha u_t \in L_m^q(S; V^*).$$

1. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 2. Глушак А.В., Шмулевич С.Д. О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. № 6. С.1065-1068. 3. Калашников А.С Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. 1971. № 2. С.29-35. 4. Мысовских П.И. Об обобщенных решениях некоторых вырождающихся уравнений параболического типа // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. № 3. С.468-478. 5. Friedman Avner, Schuss Zeev. Degenerate evolution equations in Hilbert space// Trans. Amer. Math. Soc. 1971 Vol. 161. P.401-427.

Стаття надійшла до редколегії 24.06.92

УДК 512.55

О.Д.Артемович

ПРО ПРАВІ ГАМІЛЬТОНОВІ КІЛЬЦЯ. III

Кільце R називається правим гамільтоновим /скорочено rh -кільцем/, якщо всі його власні підкільця є правими ідеалами. У цій статті продовжимо дослідження rh -кілець. Скористаємося тією ж термінологією, що й раніше [1-3]. Через $\mathbb{Z}^*$ позначимо множину $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Спочатку сформулюємо два твердження, необхідні нам надалі.

<u>Твердження А [1]</u>. Нехай R - кільце без кручення. Тоді R - rh - кільце, якщо і тільки якщо або 1/ $R^2=0$, або 2/ R ізоморфне кільцю, породженому ненульовим цілим числом k , тобто $R\simeq\langle k\rangle$, $k^2=\alpha k$, α - ненульове ціле число, або 3/ $R=J+\langle t\rangle$, $J^2=0$, $J\cap\langle t\rangle=0$, $tJ=0$, $t^2=\beta t$, $it=\beta i$ для будь-якого елемента $i\in J$.

<u>Твердження Б [2, 3]</u>. Нехай R - періодичне кільце, причому $0\neq\mathcal{L}(R)\neq R$, де $\mathcal{L}(R)$ - радикал Левицького. Тоді R - rh - кільце, якщо і тільки якщо $R=T+\Phi$, $\Phi\cdot T=0$, $T\cap\Phi=0$, $T=\sum_{p\in I_1}\oplus\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_p$ - rh-p-ніль-кільце, $\langle e_p\rangle\simeq\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $\Phi=\sum_{p\in I_2}\oplus\langle e_p\rangle$, множина I_1 /відповідно I_2 / непорожня і складається з різних простих чисел, причому якщо $q\in I_1\cap I_2$, то або $e_q\mathcal{L}_q=\mathcal{L}_q e_q=0$, або $\mathcal{L}_q^2=0$, $le_q=e_q$ для кожного ненульового $l\in\mathcal{L}_q$.

Одержимо результати.

<u>Теорема 1.</u> Нехай R - кільце зі змішаним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$. Тоді R - rh - кільце, якщо і тільки якщо $R=R_1\oplus R_2$, $R_1=\mathcal{L}(R_1)+\langle a\rangle$ - rh-кільце фактор-кільцем $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ без кручення, $R_2\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $o(a)=\infty$, $a^3=\nu a^2$, $o(a^2-\nu a)=\pi$, де π та m - вільні від квадратів ненульові цілі числа, а ν - ненульове ціле число, яке ділиться на π .

<u>Теорема 2.</u> Нехай R - змішане кільце з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$. Тоді R - rh -кільце, якщо і тільки якщо $R=T\oplus\Phi$, де підкільце T - неперіодичне rh -ніль-кільце, підкільце R^2 періодичне, $\Phi=\sum_p\oplus\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ - пряма сума по різних простих p .

Достатність у теоремах 1 і 2 перевіряється безпосередньо. Тому доведемо лише необхідність умов цих теорем.

Доведення теореми 1. Необхідність. Унаслідок леми 3 [1] фактор-кільце $R/\mathcal{L}(R)$ комутативне, а тому також гамільтонове. Звідси внаслідок [4] випливає $R/\mathcal{L}(R)=\langle\bar{a}\rangle$, де $O(\bar{a})=\infty$, $\bar{a}^2\neq\bar{0}$. Отже, $R=\mathcal{L}(R)+\langle a\rangle$, де a – прообраз елемента $\bar{a}$ в кільці R, причому, як випливає з описання гамільтонових кілець з однією твірною, підкільце $\langle a\rangle=\langle a_1\rangle\oplus R_2$, $O(a_1)=\infty$, $\nu\in\mathbb{Z}^*$, $R_2\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$, $m>1$, $m\mid\nu$, m – вільне від квадратів простих чисел і або $a_1^2=\nu a_1$, або $a_1^3=\nu a_1^2$, $O(a_1^2-\nu a_1)=\pi$, π – ненульове ціле число, вільне від квадратів, та $\pi\mid\nu$.

Через R_1 позначимо підкільце $\langle\mathcal{L}(R),a\rangle$ кільця R. Зрозуміло, що $R=R_1+R_2$ та фактор-кільце $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ – zh-кільце без кручення. Крім цього, очевидно, $R_2R_1=0$.

Нехай t – довільний елемент із $\mathcal{L}(R)$ індексу нільпотентності n, причому $O(t)=p^k$. Тоді для одиничного елемента e кільця R_2 маємо $te=\alpha t+\beta t^2$, де $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, $te=te^2=\alpha te+\beta t^2e=\alpha te$. Крім цього, $0=tet^{n-2}=\alpha t^{n-1}$, а тому $(\alpha,p)\neq 1$. На основі цього $te=\alpha te=\ldots=\alpha^k te=0$, а отже, $\mathcal{L}(R)e=0$. Звідси, врахувавши, що $eR_2=R_2$, отримаємо $\mathcal{L}(R)R_2=0$ і, як наслідок, $R_1R_2=0$. Таким чином, $R=R_1\oplus R_2$. Теорема доведена.

Доведення теореми 2. Необхідність. Нехай z – довільний елемент із R. За теоремою 3 [5] $\langle z\rangle=S\oplus P$, де S – нільпотентне кільце, породжене одним елементом, $P\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m\neq 0$. На основі цього $R=\mathcal{F}(R)+\mathcal{L}(R)$, де $\mathcal{F}(R)$ – періодична частина кільця R. Оскільки $R/\mathcal{F}(R)$ – ніль-кільце без кручення, то згідно з твердженням А, $R^2\subseteq\mathcal{F}(R)$.

Якщо $\mathcal{F}(R)\cap\mathcal{L}(R)=0$, то $\mathcal{F}(R)\mathcal{L}(R)=\mathcal{L}(R)\mathcal{F}(R)=0$ тому $R=\mathcal{F}(R)\oplus\mathcal{L}(R)$ та $\mathcal{L}(R)^2=0$. За твердженням 2 [1], $\mathcal{F}(R)=\sum_p{}'\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – пряма сума по різних простих p. Однак тоді $\mathcal{F}(R)$ та $\mathcal{L}(R)$ – гамільтонові кільця, а тому і R також гамільтонове кільце.

Тепер припустимо, що $\mathcal{L}(R)\cap\mathcal{F}(R)\neq 0$. Тоді $\mathcal{F}(R)\neq\mathcal{L}(\mathcal{F}(R))\neq 0$ і будова кільця $\mathcal{F}(R)$ описана в твердженні Б. На основі цього отримаємо, що $R=\mathcal{F}(R)+\mathcal{L}(R)=T+\Phi$, $T\cap\Phi=0$, $\Phi T=0$, T – змішане zh-ніль-кільце, підкільце R^2 періодичне, $\Phi=\sum_p\oplus\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $(n\in\mathbb{N})$ – пряма сума по різних простих p. Якщо $a\in T$ та $O(a)=\infty$, то $ae=\gamma a+\delta a^2$, де $\gamma,\delta\in\mathbb{Z}$, а отже, $\gamma a=ae-\delta a^2\in\mathcal{F}(R)$. Звідси $\gamma=0$, $ae=\delta a^2$ та $ae=ae^2=\delta a^2e=\delta ea=0$. Нехай b – довільний елемент скінченного порядку із T. Тоді $O(a+b)=\infty$ і $(a+b)e=0$, звідки також $be=0$. Таким чином, $R=T\oplus\Phi$. Теорема доведена.

1. Артемович О.Д. Про праві гамільтонові кільця.I // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С.70-73. 2. Артемович О.Д. О правых гамильтоновых кольцах // VI Симпоз. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. совещ. Львов. 11-13 сент. 1990. Львов, 1990. 3. Артемович О.Д. Про праві гамільтонові кільця.II // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.43-45. 4. Фрейдман П.А. Письмо в редакцию /по поводу статьи М.Шперлинга/ // Матем. сб. 1960. 52/94/. № 3. С.915-916. 5. Фрейдман П.А. Кольца с идеализаторным условием.II // Ученые зап. Урал. ун-та. 1959. Вып. 23. Тетрадь 1. С.35-38.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.91

УДК 515.12

О.Й.Ткач

ПРО ТОПОЛОГІЮ ПОПОВНЕНОГО ПРОСТОРУ ЧАСТКОВИХ ФУНКЦІЙ З ОПУКЛИМИ ОБЛАСТЯМИ ВИЗНАЧЕННЯ

Топологізація простору часткових відображень за допомогою топології В"єторіса розглянута у праці [2]. У даній статті досліджується простір часткових функцій з областями визначення, що є компактними опуклими підмножинами в R^n. Доводиться, що поповнення такого простору є абсолютним ретрактом у класі метричних просторів.

Нехай $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ - множина неперервних функцій, визначених на компактних опуклих підмножинах простору R^n. Для кожної функції $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ через $gr f$ позначимо графік f, $gr f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$.

Відображення $gr: C_{vcc}(\mathbb{R}^n)\to \exp(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ є вкладенням та індукує на $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ топологію В"єторіса [2]. Надалі ототожнюватимемо множину $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ з її образом при відображенні gr. Позначимо через $\bar{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ замикання множини $C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ в $\exp(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$. Для кожного $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ через $\operatorname{dom} f$ позначимо область визначення f, через $[x,y]$ замкнений відрізок з кінцями $x,y\in R^n$.

Лема 1. $\tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)=\{A\in \exp^c(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\mid pr_1 A$ - опукла множина, і для кожного $x\in pr_1 A$ множина $(\{x\}\times\mathbb{R})\cap A$ опукла.

Доведення. Нехай $A\in\tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$. Безпосередньо з означення випливає, що $pr_1 A$ – опукла множина. Припустимо, що для деякого $x\in pr_1 A$ існують точки $a_1, a_2, b\in\mathbb{R}$, $a_1<b<a_2$, такі що $(x,a_i)\in A$, $(x,b)\notin A$. Існує $\delta>0$, таке що $O_\delta(x,b)\cap A=\emptyset$. Можна вважати, що $\delta<\min\{b-a_1, a_2-b\}/2$.

За означенням A, існує така функція $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$, що $d_H(grf, A)<\delta/2$. Тоді існують $z_1, z_2\in \mathrm{dom}\, f$, такі що $d((z_i, f(z_i)), (x,a_i))<\delta/2$. Звідси маємо, що $d(x,z_i)<\delta/2$.

Оскільки за вибором δ маємо $f(z_1)<b<f(z_2)$, то існує $z\in[z_1,z_2]$, таке що $f(z)=b$. Тоді $d((x',y'),(z,f(z)))<\delta/2$. Нехай $(x',y')\in A$ – така точка, що $d((x',y'),(z,f(z)))<\delta/2$ /така точка існує, оскільки $d_H(grf,A)<\delta/2$ /. Тоді $d((x,b),(x',y'))\leq$ $\leq d((x,b),(z,f(z)))+d((z,f(z)),(x',y'))<\delta/2+\delta/2=\delta$, і ми одержуємо суперечність.

Навпаки, нехай $A\in\exp^c(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ задовольняє умову твердження і задане $\varepsilon>0$.

Нехай B – поліедральний опуклий компакт в R^n, такий що $B\subset pr_1 A$ і $d_H(B, pr_1 A)<\varepsilon/2$. Виберемо тріангуляцію $\mathcal{T}$ компакта B, використовуючи, якщо треба, операцію барицентричного підрозбиття, таку що для множини всіх вершин $x_1,\dots,x_k$ тріангуляції $\mathcal{T}$ існують такі числа $y_1,\dots,y_k$, що множина $\{(x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)\}$ утворює $\varepsilon/2$ - сітку компакта A в $R^n\times R$.

Визначимо функцію $f:B\to\mathbb{R}$ таким чином. Нехай $x\in B$ і $x=\sum_{j=1}^m \alpha_j x_{i_j}$, і $\alpha_j\in[0,1], x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ – вершини симплекса тріангуляції $\mathcal{T}$, що містить x. Тоді, за означенням, $f(x)=\sum_{j=1}^m \alpha_j y_{i_j}$.

Очевидно, що $f\in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$. Покажемо, що $d_H(grf, A)<\varepsilon$. Нехай $y\in grf$, тоді існує $x\in K\subset pr_1 A$, де K – деякий симплекс тріангуляції $\mathcal{T}$, що містить точку x і $y=f(x)$. Позначимо через $K_1\ni y$ образ симплекса K при відображенні f. Оскільки $pr_1: A\to pr_1 A$ –монотонне відображення, то $pr_1^{-1}(K)\cap A$ зв"язна множина. Тоді симплекс K_2, утворений паралельним перенесенням симплекса K відносно вертикальної осі в точку (x,y), не містить жодної точки з A, оскільки його діаметр менший, ніж $\varepsilon/2$. Однак $K_1\cap K_2\neq\emptyset$, тому K_2 розбиває множину $pr_1^{-1}(K)\cap A$, що суперечить її зв"язності. Отже, існує точка $a\in A$, така що $d(y,a)<\varepsilon$. З іншого боку, для кожної $a\in A$ знайдеться $p=(x_{i_j}, y_{i_j})\in grf$, така що $d(a,p)<\varepsilon$.

Лема доведена.

Позначимо через $\mathfrak{A} = \{A \in exp^c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \mid pr_1 A$ – опукла множина і визначимо відображення $\tau : \mathfrak{A} \to \tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$,
$\tau(A) = \cap \{ B \in \tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n) \mid B \supset A \}$ для кожної $A \in \mathfrak{A}$.

<u>Лема 2.</u> Відображення τ є неперервним.

<u>Доведення.</u> Нехай $A \in \mathfrak{A}, \varepsilon > 0$. Покажемо, що $\tau(O_{\varepsilon/4}(A)) \subset O_\varepsilon(\tau(A))$. Справді, нехай $B \in \mathfrak{A}$, $d_H(A,B) < \varepsilon/4$, $p = (x,y) \in \tau(A)$. Очевидно, якщо $p \in A \subset \tau(A)$, то знайдеться $b \in B \subset \tau(B)$, таке що $d(p,b) < \varepsilon/4 < \varepsilon$.

Якщо $p \in \tau(A) \setminus A$, то розглянемо вертикальний відрізок $[a_1, a_2]$, де $a_1 = (p_1, \alpha_1)$, $a_2 = (p_1, \alpha_2)$ і $a_1, a_2 \in A$. Нехай $b_1, b_2 \in B$, такі що $d(a_i, b_i) < \varepsilon/4$. Існує $f \in C_{vcc}(\mathbb{R}^n)$, для якого $d_H(grf, \tau(B)) < \varepsilon/4$, зокрема, знайдуться точки $c_1, c_2 \in gr\, f$, такі що $d(b_i, c_i) < \varepsilon/4$. За теоремою про середнє значення для функції $f|O_{\varepsilon/2}(p_1)$ існує $t_1 \in O_{\varepsilon/2}(p_1)$, така що $f(t_1) = p_2$. Звідси $d((p_1,p_2),(t_1,p_2)) < \varepsilon/2$. Існує $z \in \tau(B)$, таке що $d(t,z) < \varepsilon/4$, де $t = (t_1, p_2) \in gr\, f$. Тоді $d(p,z) \leq d(p,t) + d(t,z) \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon$.

Аналогічно доводять, що $\tau(B) \subset O_\varepsilon(\tau(A))$. Лема доведена.

Оскільки $\tau|\tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n) = id$, то відображення τ є ретракцією множини $\mathfrak{A}$ на $\tilde{C}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$.

Надалі будемо використовувати теорему.

<u>Теорема /друга теорема Ханнера/ [1].</u> Якщо метризовний простір X є зчисленним об"єднанням своїх відкритих підмножин G_i, $i = 1,2,\ldots$, які є $ANR(\mathfrak{M})$ – просторами, то X є $ANR(\mathfrak{M})$ – простором.

Легко бачити, що $exp^c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} exp^c(]-m,m[^{n+1})$, причому $exp^c(]-m,m[^{n+1})$ – відкриті множини в $exp^c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ і $\mathfrak{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathfrak{A}_m$, де $\mathfrak{A}_m = \{A \in exp^c(]-m,m[^{n+1}) \mid pr_1 A$ – опукла множина, причому кожна $\mathfrak{A}_m$ відкрита в $\mathfrak{A}$.

Опираючись на сформульовану теорему Ханнера, обмежимося розглядом простору $exp^c(]-m,m[^{n+1})$ і його підмножини $\mathfrak{A}_m$.

Задамо відображення $\alpha : exp^c(]-m,m[^{n+1}) \to \mathbb{R}_+$,

$$\alpha(A) = d_H(pr_1 A, C(pr_1 A));$$

$$\beta : exp^c(]-m,m[^{n+1}) \to exp^c(]-m,m[^{n+1}),$$

$$\beta(A) = pr_1^{-1}(C(pr_1 A)),$$

де pr_1 – відображення проектування в R^n; $C(A)$ – опукла оболонка множини A, тобто перетин всіх опуклих множин, що містять A.

Легко бачити, що відображення α і β неперервні, оскільки відображення pr_1, взяття опуклої оболонки і p_1^{-1} не збільшують відстані між множинами.

Позначимо через $exp_c^c(]-m,m[^{n+1})$ підмножину $exp^c(]-n,m[^{n+1})$, яка містить опуклі множини. Визначимо відображення

$\Phi: exp^c(]-m,m[^{n+1})\times \mathbb{R}_+ \times exp_c^c(]-m,m[^{n+1}) \to exp^c(]-m,m[^{n+1})$,

$\Phi(A,\varepsilon,B)=\overline{O_\varepsilon(A)}\cap B$, якщо $A\subset B$.

Лема 3. Відображення Φ є неперервним.

Доведення. Нехай $(A,\varepsilon,B)\subset exp^c(]-m,m[^{n+1})\times\mathbb{R}_+\times exp_c^c(]-m,m[^{n+1})$, такі що $A\subset B$ і $\eta>0$. Покажемо, що $\Phi(O_\delta(A),O_\delta(\varepsilon),O_\delta(B))\subset$ $\subset O_\eta(\Phi(A,\varepsilon,B))$, $0<\delta<\eta/4$. Візьмемо довільну точку (A_1,ε_1,B_1) добутку $exp^c(]-m,m[^{n+1})\times\mathbb{R}_+\times exp_c^c(]-m,m[^{n+1})$, для якої виконуються умови $A_1\subset B_1$, $d_H(A_1,A)<\delta$, $|\varepsilon-\varepsilon_1|<\delta$, $d_H(B,B_1)<\delta$. Тоді $d_H(\Phi(A,\varepsilon,B),\Phi(A_1,\varepsilon_1,B_1))<\eta$. Справді, нехай $c\in\Phi(A,\varepsilon,B)$, тобто $c\in\overline{O_\varepsilon(A)}$ і $c\in B$. Тоді знайдуться точки $a\in A$ і $a_1\in A$, такі що $d(a,c)\leq\varepsilon$, $d(a,a_1)<\delta$. Легко бачити, що на прямій, яка приходить через точку a паралельно відрізку $[c,a]$, існує точка $c_1\in O_{\varepsilon_1}(A_1)$, розміщена від точки c на відстані меншій, ні 2δ, тобто $d(c,c_1)<2\delta$. Позначимо через $\lambda=d(c_1,a)$. Знайдеться точка $b_1\in B$, така що $d(c,b_1)<\delta$. З опуклості множини B_1 випливає, що $[a_1,b_1]\subset B_1$.

Знайдемо на відрізку $[a_1,b_1]$ або на його продовженні точку c_2, таку що $d(c_2,a_1)=\lambda$. Оскільки $d(a_1,b_1)\leq$ $\leq d(a_1,c_1)+d(c_1,b_1)\leq d(a_1,c_1)+d(c_1,c)+d(c,b_1)<\lambda+2\delta+\delta=\lambda+3\delta$, то $d(c_2,b_1)<3\delta$ і $d(c,c_2)\leq d(c,b_1)+d(b_1,c_2)<\delta+3\delta<\eta$.

Вкладення $\Phi(A_1,\varepsilon_1,B_1)\subset O_\eta(\Phi(A,\varepsilon,B))$ можна перевірити аналогічним чином.

Лема доведена.

Задамо відображення $R: exp^c(]-m,m[^{n+1})\to\mathcal{A}_m$, $R(A)=\Phi(A,\alpha(A),\beta(A))$. Із неперервності відображень α,β і Φ випливає неперервність відображення R. Очевидно, що R є ретракцією простору $exp^c(]-m,m[^{n+1})$ на $\tilde{c}_{vcc}(]-m,m[^{n+1})$.

Теорема. Простір $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ є абсолютним ретрактом у класі метричних просторів.

Доведення. Оскільки $exp^c(]-m,m[^{n+1})\in AR(\mathcal{M})$ [3], то $\tilde{c}_{vcc}(]-m,m[^{n+1})\in AR(\mathcal{M})$ і з другої теореми Ханнера випливає, що $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n)\in ANR(\mathcal{M})$. Однак простір $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n)$ очевидно, є стягуваним, тому $\tilde{c}_{vcc}(\mathbb{R}^n)\in AR(\mathcal{M})$.

Наслідок. Нехай U – відкрита множина в R^n. Тоді $\tilde{c}_{vcc}(U)$ є абсолютним околовим ретрактом у класі метричних просторів.

Доведення. Нехай $A\in\tilde{c}_{vcc}(U)$. Позначимо через V відкриту опуклу підмножину U, таку що $pr_1A\subset V\subset U$. Тоді $A\in\tilde{c}_{vcc}(V)$, де $\tilde{c}_{vcc}(V)$ – відкрита в $\tilde{c}_{vcc}(U)$ і $\tilde{c}_{vcc}(V)\in AR(\mathcal{M})$.

1. Б о р с у к К. Теория ретрактов. М., 1971. 2. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 3. Curtis D., Schori R.M. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fund. Math. 1978. Vol. 101. N1. P. 19-38.

Стаття надійшла до редколегії 30.04.91

УДК 515.12

Л.Є.Базилевич, М.М.Зарічний

ПРО ОДИН ПРИКЛАД У ТЕОРІЇ М"ЯКИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Відображення метричних просторів $f: X \longrightarrow Y$ називається n -м"яким / $n = 0,1,2,\dots,\infty$ / [4], якщо для кожного паракомпакта Z, $\dim Z < n$, кожної замкненої підмножини $A \subset Z$ і кожної комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \psi\ } & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow[\ \varphi\ ]{} & Y \end{array}$$

існує таке відображення $\Phi: Z \longrightarrow X$, що $f \circ \Phi = \varphi$ та $\Phi | A = \psi$. Відображення називається нескінченно м"яким, якщо воно n -м"яке для кожного $n < \infty$, і називається абсолютно м"яким, якщо воно n -м"яке при $n = \infty$ [3, 4].

Перший приклад нескінченно м"якого не абсолютно м"якого AR-відображення на гільбертів куб Q навів О.М.Дранішніков [2]. При цьому істотно використаний відомий приклад Тейлора CE - відображення, що не є шейповою еквівалентністю [5]. Оскільки умова скінченновимірності бази часто дає істотне поліпшення властивостей відображення, то природним є таке запитання: чи існує нескінченно м"яке не абсолютно м"яке AR - відображення $f: X \longrightarrow Y$, де $\dim Y < \infty$?

Наведемо елементарний приклад такого відображення.

<u>Приклад.</u> Через Q позначаємо гільбертовий куб, $Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$ $(I_i = [0,1])$, $I^n = \{(x_i) \in Q \mid x_i = 0,\ i \geq n+1\}$, $S^{n-1} = \partial I^n$. Нехай $B_k = \{(x_i) \in Q \mid$

$x_k = 0\}$, $B'_k = \{(x_i) \in Q \mid x_k = 1\}$ – k-ті гран' куба Q. Через $Con(X)$ позначаємо конус над X. Вважаємо, що X лежить у $Con(X)$ як основа, і що $Con(A)$ природно лежить у $Con(X)$, якщо $A \subset X$.

Нехай $Y = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – збіжна послідовність, $X = \{(q, y) \in Con(Q) \times Y \mid$, якщо $y = 1/n$, то $q \in Con(S^n)\} \subset Con(Q) \times Y$, $f = pr_2 \mid X : X \longrightarrow Y$ /$pr_2 : Con(Q) \times Y \longrightarrow Y$ – проектування/.

Покажемо, що сім'я $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ є рівностепенево локально стягуваною, тобто що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, для якого виконується умова: кожна підмножина діаметра $< \delta$ у $f^{-1}(y)$ стягується в точку по множині діаметра $< \varepsilon$.

Кожну точку з $Con(Q)$ запишемо у вигляді (q, t), де $q \in Q$, $t \in [0, 1]$; при цьому $(q_1, 0) \sim (q_2, 0)$, $q_1, q_2 \in Q$. Нехай d – стандартна метрика на Q, $d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$, тоді метрика $\bar{d}$ на $Con(Q)$ задається формулою

$$\bar{d}((q_1, t_1), (q_2, t_2)) = \sqrt{(t_1 - t_2)^2 + (\max\{t_1, t_2\}\, d(q_1, q_2))^2}.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Нехай $A \subset Con(S^n)$, $diam\, A < \delta = \frac{\varepsilon}{8}$ і $\tau_0 = \inf\{t \mid (x, t) \in A\}$, $\tau_1 = \sup\{t \mid (x, t) \in A\}$.

Розглянемо два випадки.

1. $\tau_0 < \delta$. Тоді $\tau_1 < 2\delta$ і множина A стягується до вершини конуса вздовж твірних по множині діаметра $< 4\delta < \varepsilon$.

2. $\tau_0 \geq \delta$. Тоді існує $k \geq 1$ таке, що $\frac{\tau_0}{2^{k+1}} \leq \delta < \frac{\tau_0}{2^k}$. При деформаційній ретракції вздовж твірних підмножини $S^n \times [\tau_0, \tau_1] \subset Con(S^n)$ в $S^n \times \{\tau_0\} \subset Con(S^n)$ множина A перейде у множину A' діаметра $< \delta$. Тоді множина A' не перетинає однієї з двох множин $B_k \times \{\tau_0\}, B'_k \times \{\tau_0\}$. Нехай для визначеності, $A' \cap (B'_k \times \{\tau_0\}) = \emptyset$, тоді відображення $H : A' \times I \longrightarrow Con(S^n)$, $H((x_i), s) =$

$$= ((x_1, \dots, x_{k-1}, s x_k, x_{k+1}, \dots), \tau_0), ((x_i), s) \in A',$$

задає деформацію множини A' на множину $A'' \subset (S^n \times B_k) \times \{\tau_0\}$. Тоді $diam(A'') < \delta$ і, оскільки множина $S^n \times B_k$ опукла, то множину A'' можна стягнути лінійною гомотопією в точку по множині діаметра $< \delta$. Розглядаючи для кожної точки множини A її шлях при послідовних гомотопіях, одержуємо, що множина A стягується в точку по множині діаметра $< 8\delta = \varepsilon$.

Оскільки з доведеного вище випливає, що сім"я $\{f^{-1}(y) \mid y\in Y\}$ є $equi\text{-}LC^n$ для кожного n, то з леми 1.1 праці [3] одержуємо, що відображення f є n-м"яким для кожного $n<\infty$.

Покажемо, що відображення f не є м"яким. Нехай $Z = \{(q,y)\in Q\times Y \mid q\in I^{n+1}$, якщо $y=1/n\} \subset Q\times Y$ і $A=\{(q,y)\in Q\times Y \mid q\in S^n$, якщо $y=1/n\}\subset Z$. Розглянемо відображення $\varphi: Z\to Y$, $\varphi(q,y)=y$, $(q,y)\in Z$ і нехай $\psi: A\to X$ – вкладення. Припустимо, що відображення f м"яке. Тоді існує відображення $\Phi: Z\to X$, таке що $f\circ\Phi=\varphi$ та $\Phi|A=\psi$. Очевидно, що $\Phi(S^n\times\{1/n\})\subset Con(S^n)\times\{1/n\}$ і тому в просторі $exp X$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(S^n\times\{1/n\})=Con(Q)\times\{0\}$. З іншого боку, $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(S^n\times\{1/n\})=\Phi(Q\times\{0\})=Q\times\{0\}\subset Con(Q)\times\{0\}$ і ми одержуємо суперечність.

Умову рівностепеневої локальної стягуваності К.Борсук [1] узяв за основу топологізації гіперпростору $anr(X)$ компактних ANR - підмножин метричного простору X. Як показує наведений приклад /а також приклад з праці [2]/, умова локальної м"якості відображення $f: X\to Y$ не еквівалентна неперервності оберненого відображення $f^{-1}: Y\to anr(X)$.

Цим мотивований розгляд наступної топологізації $anr_S(X)$ множини $anr(X)$. За означенням, простір $anr_S(X)$ є k-простором, у якому множина $\mathcal{A}\subset anr_S(X)$ є компактною тоді і лише тоді, коли а/ $\mathcal{A}$ замкнена підмножина в $exp X$ і б/ канонічне відображення $p_{\mathcal{A}}: \gamma(\mathcal{A})\to\mathcal{A}$ локально м"яке. Тут $\gamma(\mathcal{A})=\{(x,A)\mid x\in A\in\mathcal{A}\}\subset X\times\mathcal{A}$, $p_{\mathcal{A}}(x,A)=A$, $(x,A)\in\gamma(\mathcal{A})$. Перевага топологізації anr_S полягає ще й у тому, що вона означена також для неметризованих просторів X.

Залишається відкритим таке запитання: чи простір $anr_S(X)$ метризовний для метричного компакту X ?

1. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971. 2. Дранишников А.Н. Абсолютные F - значные ретракты и пространства функций в топологии поточечной сходимости // Сиб. мат. журн. 1986. Т.27. № 3. С.74-86. 3. Дранишников А.Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n - мягкие отображения, повышающие размерность // Успехи мат. наук. 1984. Т.39. Вып.5. С.55-95. 4. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып.3. С.3-62. 5. Taylor J.L. A counterexample in shape theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. Vol.81. P. 629-632.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.91

УДК 530.145

В.С.Барбуляк, Ю.Г.Кондратьєв

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ ГІББСІВСЬКИХ СТАНІВ КВАНТОВИХ ҐРАТКОВИХ СИСТЕМ

У праці [1] побудовані ймовірнісні міри

$$d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)) \qquad /1/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta(\Lambda), \mathcal{G}(\Lambda))$ при фіксованій граничній умові $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$ та

$$d\nu(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-E(\omega(\cdot))} d\nu_0(\omega(\cdot)) \qquad /2/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta, \mathcal{G})$. Існування міри /2/ еквівалентне існуванню гіббсівського стану системи, що відповідає гамільтоніану

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} p_k^2 + E(\omega(\cdot)) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(q_k). \qquad /3/$$

Наступна теорема, що узагальнює на квантовий випадок відому в класичному випадку теорему Добрушина [2], є критерієм існування гіббсівських станів у нескінченному об"ємі.

Теорема. Нехай для гамільтоніана /3/ маємо:

а/ компактну функцію h ;

б/ числа $c_{jl}, j, l \in \mathbb{Z}^d$ і сталу c, $0<c<1$, для яких

$$\forall j \ \sum_l |c_{jl}| \le c;$$

в/ число K >0,

такі що $\forall\Lambda, \Lambda\subset\mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty$ і граничної умови $\bar{\omega}\in\Omega_\beta$, для якої

$$\max_{j\in\Lambda} \sum_{l\in\Lambda^c} |c_{jl}| h(\bar{\omega}_l) < \infty,$$

міра $d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot))$ існує і

$$\int h(\omega_j)\, d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) \le K + \sum_{l\ne j} c_{jl}\, h(\omega_l). \qquad /4/$$

Тоді сім"я мір $\{\nu_\Lambda(\omega_\Lambda|\bar{\omega}_{\Lambda^c}), \Lambda\subset\mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty\}$ слабо компактна.

Нехай, крім цього, $\forall j \in \mathbb{Z}^d$ $\forall a$ – неперервної обмеженої функції на $\mathcal{S}$ [1] знайдуться:

а/ послідовність множин $M_n \subset \mathbb{Z}^d, |M_n| < \infty$, $\bigcup_n M_n = \mathbb{Z}^d \setminus \{j\}$;

б/ числа $d_{jl}^{(n)} \geq 0, j \neq l$, для яких

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} d_{jl}^{(n)} \leq D^{(n)}, \quad D^{(n)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

в/ послідовність неперервних обмежених функцій

$f_n(\omega_{M_n})$, таких що

для будь-якої граничної умови $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$, для якої

$$\sum_{l \neq j} |c_{jl}| h(\bar{\omega}_l) < \infty,$$

справедлива оцінка

$$\left| \int a(\omega_j) d\nu_j(\omega_j(\cdot) | \bar{\omega}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{j\}}(\cdot)) - f_n(\omega_{M_n}) \right| \leq D^{(n)} + \sum_{l \neq j} d_{jl}^{(n)} h(\omega_l). \quad /5/$$

Тоді існує хоча б одна міра $d\bar{\nu}(\omega(\cdot))$, що відповідає гамільтоніану /3/ в тому розумінні, що її умовні розподіли задаються /I/.

<u>Доведення.</u> Фіксуємо ростучу послідовність множин $\Lambda_n, \Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda_n| < \infty$ і граничних умов $\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}$, таких що $\forall l \in \Lambda_n^c$ $h(\bar{\omega}_l) \leq A$ для деякої сталої А. Послідовність ймовірнісних мір ν_n на Ω_β побудуємо таким чином:

$$\nu_n(\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}) = 1, \; d\nu_n = d\nu_{\Lambda_n}(\omega_{\Lambda_n}(\cdot) | \bar{\omega}_{\Lambda_n^c}(\cdot)) \qquad \text{/див. /7/ [1]}.$$

<u>Лема 1.</u> $\forall j$

$$\sup_n \int h(\omega_j) d\nu_n \leq \frac{K + cA}{1 - c} \equiv K_0.$$

<u>Доведення.</u> Оскільки $\forall n$ $\Omega_\beta(\Lambda_n)$ – сепарабельний метричний простір, то міра ν_n є щільною, тобто $\forall \varepsilon \exists K_\varepsilon^n \subset \Omega_\beta(\Lambda_n) \times \nu_n(K_\varepsilon^n) > 1 - \varepsilon$. Тоді

$$\int h(\omega_j) d\nu_n = \int_{K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n + \int_{\Omega_\beta(\Lambda_n) \setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n.$$

Із абсолютної неперервності інтеграла випливає, що $\forall \eta \exists K_\varepsilon^n$

$$\int_{\Omega_\beta(\Lambda_n) \setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n < \eta.$$

З теореми Лузіна випливає існування неперервної функції $h^c(\omega_j)$ на $K_\varepsilon^n(j) \equiv K_\varepsilon^n |_{\Omega_\beta(\{j\})}$ такої, що міра множини $\{\omega_j | h(\omega_j) \neq h^c(\omega_j)\}$

є меншою від довільного додатного числа. На $K_\varepsilon^n(\bar{j})$ функція $h^c(\omega_{\bar{j}})$ досягає своєї верхньої межі, тому $\forall \varepsilon \forall n$

$$\int_{K_\varepsilon^n} h(\omega_{\bar{j}})\,d\nu_n$$

скінченний. Зафіксуємо числа ε і n. Тоді

$$\max_{j\in\Lambda_n} \int h(\omega_j)\,d\nu_n \equiv A_\varepsilon^n < \infty .$$

Вибравши те $\bar{j}$, при якому досягається максимум, підставивши у /4/ $\Lambda = \{\bar{j}\}$ і проінтегрувавши це співвідношення по мірі ν_n, отримаємо

$$A_\varepsilon^n \leq K + A_\varepsilon^n c + cA .$$

Отже,

$$\sup_n \sup_\varepsilon A_\varepsilon^n \leq \frac{K+cA}{1-c} ,$$

звідки і випливає твердження леми.

З цієї леми та співвідношення /6/, наведеного у праці [1], випливає, що ν_n – слабо компактна послідовність. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що до деякої граничної міри $\bar{\nu}$ збігається сама послідовність ν_n.

<u>Лема 2.</u> Нехай f – невід"ємна, півнеперервна знизу функція на метричному просторі X і послідовність ймовірнісних мір μ_n на X слабо збігається до деякої міри μ. Крім цього, $\forall n$

$$\int f\,d\mu_n \leq C.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int f\,d\mu_n \geq \int f\,d\mu .$$

<u>Доведення.</u> Для довільної міри χ, такої що

$$\int f\,d\chi \leq C,$$

справедлива оцінка

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{i-1}{K}+l\right)\chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l< f(x)\leq \frac{i}{K}+l\right\} \leq \int f\,d\chi \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{i}{K}+l\right)\chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l<f(x)\leq \frac{i}{K}+l\right\}, \quad x\in X.$$

Позначимо $G_i^l = \left\{x \,|\, f(x) > \frac{i}{K}+l\right\}$. Тоді, зробивши очевидні перетворення і скориставшися скінченністю інтеграла функції f по мірі χ, отримаємо що

$$\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\chi(G_i^l) \leq \int f\,d\chi \leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\chi(G_i^l) .$$

Виписавши ланцюжок нерівностей

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int f d\mu_n \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\mu_n(G_i^l) \geq \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K} \underline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(G_i^l) \geq$$

$$\geq \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K} \mu(G_i^l) \geq -\frac{1}{K} + \int f d\mu$$

і перейшовши до межі при $K\to\infty$, отримаємо твердження леми.

Із лем 1 і 2 випливає, що

$$\int h(\omega_j) d\bar{\nu} \leq K_0 .$$

Тут $\bar{\nu}$ – граничний розподіл, що відповідає гамільтоніану /3/, якщо для довільних вимірних $a(\omega_K)$, $b(\omega_\Lambda)$

$$\int a(\omega_K) b(\omega_\Lambda) d\bar{\nu} = \int b(\omega_\Lambda) d\bar{\nu} \int a(\omega_K) d\nu_K(\omega_K(\cdot)|\bar{\omega}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{K\}}(\cdot)) \quad /6/$$

Оскільки міра однозначно відновлюється при заданні її значень на неперервних обмежених функціях, то /6/ достатньо довести для $a(\omega_K)$, $b(\omega_\Lambda)$ неперервних і обмежених.

Для досить великих n, таких що $\Lambda \subset \Lambda_n$, справедлива рівність

$$\int a(\omega_K) b(\omega_\Lambda) d\nu_n = \int b(\omega_\Lambda) d\nu_n \int a(\omega_K) d\nu_K(\omega_K(\cdot)|(\bar{\omega}_{\Lambda_n\setminus\{K\}} \cup \bar{\omega}_{\Lambda_n^c})(\cdot)). \quad /7/$$

За означенням слабої збіжності ліва частина /7/ при $n\to\infty$ прямує до лівої частини /6/. Із /5/ випливають оцінки зверху і знизу для внутрішнього інтеграла у правій частині /7/. Підставивши ці оцінки у /7/ і використавши лему 1, отримаємо /6/. Теорема доведена.

1. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Задання гіббсівських станів квантових граткових систем в термінах функціональних інтегралів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Випуск 36. С.70–74. 2. Добрушин Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1970. Т.15. Вып. 3. С.469–497.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.90

УДК 539.3

Ю.О.Пир"єв, Р.І.Мокрик

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТА ВЛАСТИВІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ РІВНЯНЬ РУХУ ДВОКОМПОНЕНТНОЇ ТЕОРІЇ СУМІШЕЙ

Рівняння руху взаємопроникних сумішей у випадку наявності лише механічних процесів має вигляд

$$\begin{gathered} m_{11}\Delta\vec{u}^{(1)}+l_{11}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(1)}+m_{12}\Delta\vec{u}^{(2)}+l_{12}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(2)}+ \\ +\vec{X}^{(1)}=\rho_1\partial_t^2\vec{u}^{(1)}+l(\partial_t)(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}), \\ m_{22}\Delta\vec{u}^{(2)}+l_{22}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(2)}+m_{21}\Delta\vec{u}^{(1)}+l_{21}\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u}^{(1)}+ \\ +\vec{X}^{(2)}=\rho_2\partial_t^2\vec{u}^{(2)}-l(\partial_t)(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}), \end{gathered} \qquad /1/$$

де $\vec{u}^{(\alpha)}=(u_1^{(\alpha)},u_2^{(\alpha)},u_3^{(\alpha)})$ – вектор переміщення α -компоненти $(\alpha=1,2)$; $\vec{X}^{(\alpha)}=(X_1^{(\alpha)},X_2^{(\alpha)},X_3^{(\alpha)})$ – вектор об"ємних сил, які прикладені до α -компоненти $(\alpha=1,2)$; $l(\partial_t)$ – диференціальний оператор, який в загальному випадку можна зобразити як

$$l(\partial_t)=\sum_{j=0}^{2}\beta_j d_t^j;$$

$\vec{R}=-l(\partial_t)(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)})$ – сила міжфазної взаємодії; m_{nj}, l_{nj}, $\rho_n, \beta_j, n,j=1,2,$ β_0 – фізичні постійні [7, 8].

У випадку $\beta_1=0$ система рівнянь /1/ описує рух механічної суміші двох пружних компонент, причому у працях [7, 9] вважається, що $\beta_2=0$, а в статті [5] – $\beta_2\neq 0$. У випадку $\beta_1=0$, $m_{22}=0$ система рівнянь /1/ описує рух двокомпонентного середовища: пориста матриця – рідина, причому у публікаціях [4, 6] $\beta_2=0$, а в працях [1, 10] $\beta_2\neq 0$.

Розв"язок системи /1/ подати як

$$\vec{u}^{(\alpha)}=B_1^{(\alpha)}(\partial_x,\partial_t)\vec{W}^{(1)}+B_2^{(\alpha)}(\partial_x,\partial_t)\vec{W}^{(2)} \quad \alpha=1,2, \qquad /2/$$

де невідомі тривимірні вектори $\vec{W}^{(\alpha)}(x,t)$ визначаються з рівнянь

$$D(\partial_x,\partial_t)\vec{W}^{(\alpha)}(x,t)=-\vec{X}^{(\alpha)}(x,t), \quad \alpha=1,2, \qquad /3/$$

а оператори $B_n^{(m)}(\partial_x, \partial_t)$ $n,m=1,2$ мають вигляд

$$B_m^{(m)} \equiv A_m^{(m)} \operatorname{graddiv} + D_p^T D_{12}^L, \; B_n^{(m)} \equiv A_n^{(m)} \operatorname{graddiv} - D_T D_{12}^L,$$

$$p,m,n=1,2, \; n \neq m, \; m+p=3;$$

$$A_n^{(m)}(\partial_x, \partial_t) \equiv (l_{mj} D_L - l_{mn} D_j^L) D_p^T - (l_{jp} D_L - l_{np} D_j^L) D_T,$$

$$l_{12} = l_{21}, \quad D_n^f(\partial_x, \partial_t) \equiv \square_n^f - l(\partial_t),$$

$$\square_n^L \equiv (l_{nn} + m_{nn})\Delta - \rho_n \partial_t^2, \quad \square_n^T \equiv m_{nn}\Delta - \rho_n \partial_t^2,$$

$$n,m,j,p=1,2, \; n+j=3, \; m+p=3, \; f \equiv L,T;$$

$$D_L(\partial_x, \partial_t) \equiv (l_{12} + m_{12})\Delta + l(\partial_t), \; D_T(\partial_x, \partial_t) \equiv m_{12}\Delta + l(\partial_t),$$

$$D_{nm}^f(\partial_x, \partial_t) \equiv D_n^f D_m^f - D_f D_f,$$

$$n,m=1,2, \quad n \neq m, \quad f \equiv L,T. \qquad /4/$$

Оператор $D(\partial_x, \partial_t)$ у рівняннях /3/ є добутком

$$D(\partial_x, \partial_t) \equiv D_{12}^L(\partial_x, \partial_t) D_{12}^T(\partial_x, \partial_t),$$

де оператори $D_{12}^f(\partial_x, \partial_t)$, $f \equiv L,T$ мають вигляд /4/ і записуються у вигляді полінома від оператора Лапласа:

$$D_{12}^f(\partial_x, \partial_t) \equiv \sum_{m=0,2,4} \Delta^{m/2} a_m^f(\partial_t), \quad f \equiv L,T.$$

Коефіцієнти цього поліноміального диференціального оператора задаються співвідношеннями:

$$a_0^f(\partial_t) \equiv a_{04}^f \partial_t^4 + a_{03}^f \partial_t^3 + a_{02}^f \partial_t^2, \quad a_4^f(\partial_t) \equiv a_{40}^f,$$

$$a_2^f(\partial_t) \equiv a_{22}^f \partial_t^2 + a_{21}^f \partial_t + a_{20}^f, \quad f \equiv L,T;$$

$$a_{04}^L = a_{04}^T = C_1', \; a_{03}^L = a_{03}^T = \beta_1 C_2', \; a_{02}^L = a_{02}^T = \beta_0 C_2',$$

$$C_1' = \rho_1 \rho_2 + \beta_2 C_2', \quad C_2' = \rho_1 + \rho_2,$$

$$a_{22}^f = -B_1^f, \; a_{21}^f = -\beta_1 B_2^f, \; a_{20}^f = -\beta_0 B_2^f, \; f \equiv L,T;$$

$$B_1^T = \rho_1 m_{22} + \rho_2 m_{11} + \beta_2 B_2^T, \; B_2^T = m_{11} + m_{11} + 2m_{12},$$

$$B_1^L = \rho_1(l_{22} + m_{22}) + \rho_2(l_{11} + m_{11}) + \beta_2 B_2^L,$$

$$B_2^L = l_{11} + m_{11} + l_{22} + m_{22} + 2(l_{12} + m_{12}),$$

$$a_{40}^L = (l_{11} + m_{11})(l_{22} + m_{22}) + (l_{12} + m_{12})^2,$$

$$a_{40}^T = m_{11} m_{22} - m_{12}^2 = 0.$$

Зауважимо, що співвідношення /2/-/4/ у стаціонарному випадку переходять у відоме представлення [8].

Використавши відому методику [2, 3], можна довести справедливість такого твердження.

Якщо $\vec{X}^{(\alpha)} e^{-\omega_2 t} \in S'$, $\omega_2 > 0$,

де S' – простір узагальнених функцій повільного росту, які дорівнюють нулю для $t < 0$, то і розв"язок /2/ системи /1/ належить до цього ж простору:

$$\vec{u}^{(\alpha)} e^{-\omega_2 t} \in S', \ \omega_2 > 0, \ \alpha = 1,2 .$$

Для доведення цього твердження спочатку потрібно довести, що у верхній комплексній півплощині трансформанта перетворення Фур"є-Лапласа фундаментального розв"язку рівняння /3/ є аналітичною функцією.

1. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 3. № 6. С.1115-1123. 2. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Динамические свойства решений задач термоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 4. С.44-47. 3. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Свойства решений динамических задач обобщенной связанной термоупругости // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. Вып. 5. С.912-918. 4. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М., 1970. 5. Рущицкий Я.Я. К вопросу о применимости линейной теории смеси // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 6. С.62-65. 6. Френкель Я.И К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т.8. № 4. С.133-150. 7. Хорошун Л.П. К теории взаимопроникающих смесей // Прикл. механика. 1977. Т.13. № 10. С.124-132. 8. Хорошун Л.П., Солтанов Г.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. К., 1984. 9. Bedford A., Stern M. Toward a diffusion continuum theory of composite materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1971. E38. No 1. P.8-14. 10. Biot M.A. Theory of propagation of elastik waves in a fluid-saturated porous. 1-low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. Vol. 28. No 2. P.168-178.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.92

УДК 539.3

Л.О.Тисовський

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПІВПРОСТОРІ З ТУНЕЛЬНИМ ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружний ізотропний півпростір, що містить тунельний отвір у вигляді прямокутника із заокругленими кутами. Сторони прямокутника $2a, 2b$; радіус заокруглення r. Поверхня півпростору вільна від зовнішніх навантажень, а контур отвору перебуває під дією рівномірно розподіленого нормального тиску інтенсивності p. Центр отвору розміщений на відстані h від вільної поверхні. Позначивши контур отвору через L_1, а межу півпростору – через L_0, граничні умови задачі запишемо у вигляді

$$N(t)+iT(t)=0, \quad t_0 \in L; \qquad /1/$$

$$N(t_1)+iT(t_1)=-p, \quad t_1 \in L_1, \qquad /2/$$

де N і T – відповідно нормальна і дотична компоненти вектора зовнішніх зусиль.

Таким чином, можна вважати, що виконуються умови плоскої деформації, тобто стан пружної рівноваги в тілі описується рівняннями плоскої задачі теорії пружності. У цьому випадку для визначення напружено-деформованого стану в довільній точці потрібно знайти три компоненти тензора напружень σ_x, σ_y, τ_{xy} і дві складові вектора переміщень u, v, які можна визначити через дві функції комплексної змінної $\Phi(Z)$, $\Psi(Z)$ [1]:

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(Z)+\overline{\Phi(Z)}],$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{Z}\Phi'(Z)+\Psi(Z)],$$
$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=\varkappa\Phi(Z)-\overline{\Phi(Z)}-Z\overline{\Phi'(Z)}-\overline{\Psi(Z)}. \qquad /3/$$

З огляду на лінійність задачі комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі можна зобразити як

$$\Phi(Z)=\Phi_*(Z)+\Phi_1(Z)+\Phi_0(Z),$$
$$\Psi(Z)=\Psi_*(Z)+\Psi_1(Z)+\Psi_0(Z), \qquad /4/$$

де функції $\Phi_*(Z), \Psi_*(Z)$ характеризують напружено-деформований стан у нескінченному однорідному просторі при заданих зовнішніх

7-2305

чинниках; $\Phi_1(Z), \Psi_1(Z)$ – кусково-голоморфні функції, що мають стрибок на лінії L_1; $\Phi_0(Z), \Psi_0(Z)$ – функції, голоморфні у нижній півплощині.

Вважаючи, що головний вектор і головний момент зовнішніх зусиль, прикладених до контура L_1, дорівнює нулю і використавши результати праці [2], комплексні потенціали $\Phi_1(Z), \Psi_1(Z)$ зобразимо у вигляді

$$\Phi_1(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{Q(t)dt}{t - Z},$$

$$\Psi_1(Z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{Q(t)}d\bar{t}}{t - Z} + \frac{\bar{t}Q(t)dt}{(t-Z)^2} \right], \qquad /5/$$

де $Q(t)$ – невідома функція.

Для визначення функцій $\Phi_0(Z), \Psi_0(Z)$ скористаємося працею [3], тобто функцію $\Phi_0(Z)$ аналітично продовжимо через незавантажену поверхню у верхню півплощину та визначимо її у всій комплексній площині. Потім, увівши нові допоміжні функції, виконаємо крайові умови /1/. Унаслідок розв"язування отриманої граничної задачі теорії аналітичних функцій одержимо вирази для потенціалів:

$$\Phi_0(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{Q(t)dt}{z - \bar{T}} + \frac{(\bar{T} - T)\overline{Q(t)}d\bar{t}}{(z - \bar{T})^2} \right],$$

$$\Psi_0(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\bar{T}Q(t)dt}{(\bar{T} - Z)^2} + \left(\frac{1}{\bar{T} - z} + \frac{(\bar{T} + Z)(T - \bar{T})}{(\bar{T} - Z)^3} \right) \overline{Q(t)}d\bar{t} \right]. \qquad /6/$$

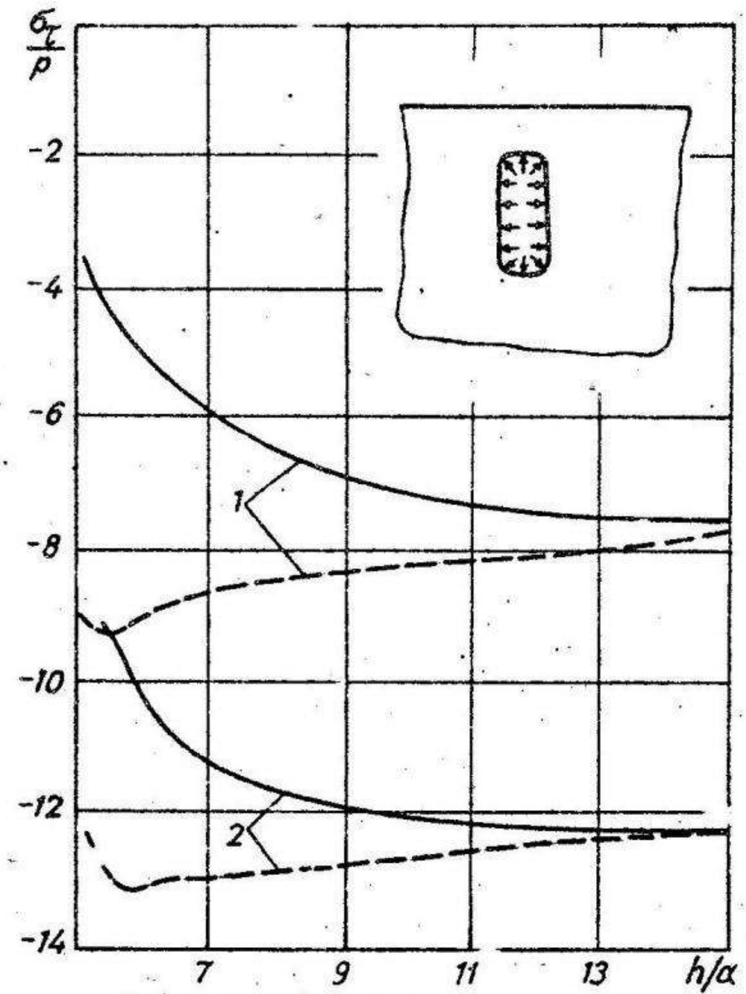
Узявши до уваги співвідношення /4/–/6/ і виконавши крайові умови /2/, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення функції $Q(t)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \Big\{ \Big[\frac{1}{t - t_1} + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \frac{1}{\bar{t} - \bar{t}_1} + \frac{1}{X - \bar{T}} + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \frac{1}{\bar{X} - T} + \frac{\bar{T} - T}{(\bar{X} - T)^2} \left(1 + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1}\right) -$$

$$- \frac{2(\bar{T} - T)(X - T)}{(\bar{X} - T)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \Big] Q(t)dt + \Big[-\frac{1}{\bar{t} - \bar{t}_1} + \frac{t - t_1}{(t - t_1)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} - \frac{T - \bar{T}}{(X - \bar{T})^2} -$$

$$- \frac{1}{\bar{X} - T} + \frac{X - T}{(\bar{X} - T)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \Big] \overline{Q(t)}d\bar{t} \Big\} = -p, \quad t_1 \in L_1, \qquad /7/$$

де $T = t + ih$, $X = t_1 + ih$.



Зміна коефіцієнта концентрації напружень $k = \sigma_\tau / p$.

Якщо форма гладкої замкнутої кривої L_1 визначається параметричним рівнянням

$$x = x(\vartheta),\ y = y(\vartheta),\ 0 \le \vartheta < 2\pi,$$

то після заміни змінних

$$t_1 = \omega(\vartheta) = x(\vartheta) + iy(\vartheta),\ t = \omega(\tau)$$

сингулярне інтегральне рівняння задачі можна записати у нормалізованому вигляді:

$$\int_0^{2\pi} \left[M(\tau,\vartheta) Q(\tau) + N(\tau,\vartheta) \overline{Q(\tau)} \right] d\tau = -p,\ 0 \le \vartheta < 2\pi$$

і для числового розв"язування застосовувати розрахункову схему методу механічних квадратур [3].

Проаналізовано розв"язок задачі, причому для визначення концентрації напружень на контурі отвору використані співвідношення

$$\sigma_\tau = p + 4Re\left\{ -\frac{1}{2}Q(\vartheta) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1}{\omega(\tau)-\omega(\vartheta)} + \frac{1}{\bar{\bar{X}}-T}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\omega'(\tau)Q(\tau) + \frac{(\bar{T}-T)\overline{\omega'(\tau)}\,\overline{Q(\tau)}}{(\bar{T}-X)^2}\right]d\tau\right\}.$$

На рисунку зображені залежності, що характеризують зміну коефіцієнта концентрації напружень $k = \sigma_T / p$ у півплощині з прямокутним отвором залежно від відстані центра отвору до вільної поверхні. Прийняті значення безрозмірних параметрів $b/a = 5$, $r^* = r/a = 0{,}5$ /лінії 1/ і $r^* = 0{,}1$ /лінії 2/. Суцільними лініями подане значення коефіцієнта концентрації у ближчій /до межі півпростору/ вершині, штриховими – у дальшій. Як бачимо, із зменшенням радіуса заокруглення збільшується концентрація напружень в околі вершин прямокутника. Відзначимо також, що наявність вільної поверхні відіграє велику роль у перерозподілі напружено-деформованого стану у півпросторі з тунельним отвором. Прямолінійний край спричиняє зменшення концентрації напружень в дальшій вершині і збільшення – у ближчій. Із віддаленням отвору від краю ця відмінність згладжується.

1. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Упругое состояние пластины с круглой шайбой и прямолинейным тонким упругим включением // Прикл. математика и механика. 1982. Т.46. № 6. С.993-1000. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.92

УДК 539.3

В.П.Левицький, І.Т.Яськевич

ОДНОМІРНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ І ЗНОШУВАННЯМ ДЛЯ ЦИЛІНДРІВ

Одномірні задачі для циліндрів у циліндричній системі координат з урахуванням зношування розглянуті у працях [2, 3, 5], а теплова задача - у праці [6]. Однак процеси теплоутворення і зношування не можна розглядати окремо через їхній взаємний вплив. Мета даної праці - дослідити вплив температурного поля, що виникає внаслідок тертя, на процес зношування для вкладених циліндрів. При цьому приймемо, що коефіцієнт тертя є функцією температури.

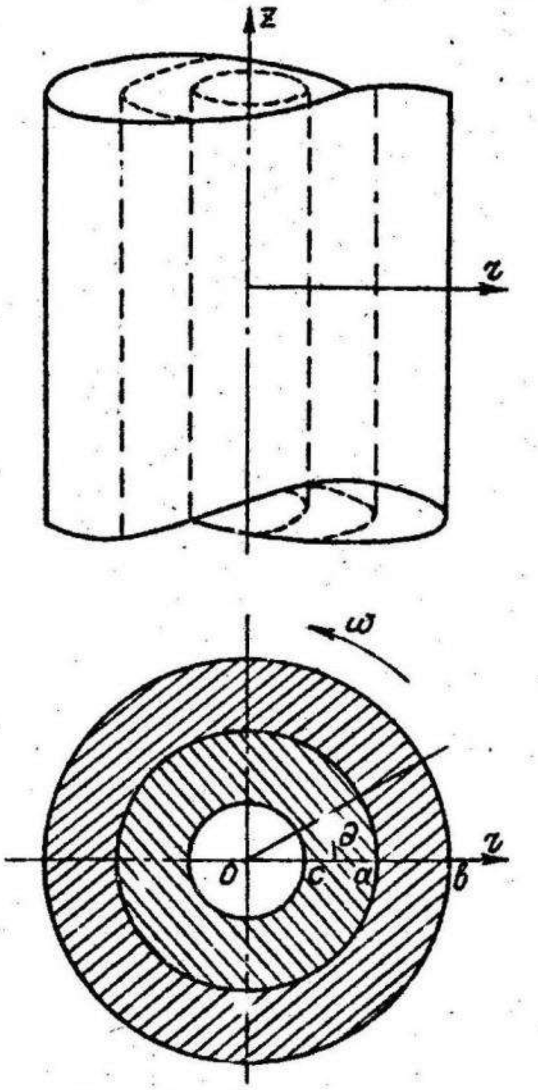


Рис. 1. Геометрія задачі

Розглянемо довгі круглі циліндри /рис. 1/, один з яких вкладений в інший, причому вони ковзають один відносно одного з кутовою швидкістю ω і коефіцієнтом тертя, що залежить від середньої температури на контакті $f = f(T_c)$. По поверхні зовнішнього циліндра рівномірно розподілене зусилля Q. Вважаємо, що температура, яка виникає внаслідок тертя, розподілена симетрично відносно осі циліндрів і не залежить від осьової координати Z. Припустимо, що осьове переміщення W дорівнює 0, що еквівалентне умові закріплення торців. Отже, маємо умови плоскої деформації. Тому у циліндричній системі координат невідомими будуть переміщення $u = v$ і напруження $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$. Усі три деформації зсуву і дотичні напруження дорівнюють 0 внаслідок симетрії відносно осі і постійності вздовж осі.

З використанням узагальненого закону Гука і рівняння рівноваги після нескладних перетворень [6] одержимо:

$$u_i = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\alpha_i \frac{1}{r}\int_{r_1}^{r_2} T_i r\,dr + C_i r + \frac{D_i}{r}, \quad i = 1,2; \qquad /1/$$

$$\sigma_{r_i} = -\frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i}\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} T_i r\,dr + \frac{E_i}{1+\nu_i}\left(\frac{C_i}{1-2\nu_i} - \frac{D_i}{r^2}\right), \quad i = 1,2; \qquad /2/$$

$$\sigma_{\theta_i} = \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i}\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} T_i r\,dr - \frac{\alpha_i E_i T_i}{1-\nu_i} + \frac{E_i}{1+\nu_i}\left(\frac{C_i}{1-2\nu_i} + \frac{D_i}{r^2}\right), \quad i = 1,2; \qquad /3/$$

$$\sigma_{z_i} = -\frac{\alpha_i E_i T_i}{1-\nu_i} + \frac{2\nu_i E_i C_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}, \quad i = 1,2. \qquad /4/$$

Для того, щоб скрізь виконувалося $W = 0$, до торців циліндрів необхідно прикласти нормальні зусилля, розподілені відповідно до /4/.

Граничні умови:

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = \gamma_1 T_1, \quad r = c; \qquad /5/$$

$$\sigma_{r_1} = 0, \quad r = c; \qquad /6/$$

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{r_2}, \quad r = a; \qquad /7/$$

$$u_1 = u_2, \quad r = a; \qquad /8/$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \sigma_{r_1} f \omega r, \quad r = a; \qquad /9/$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = h(T_1 - T_2), \quad r = a; \qquad /10/$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} = -\gamma_2 T_2 \ , \ r = b ; \qquad /II/$$

$$\sigma_{r_2} = -Q \ , \ r = b. \qquad /I2/$$

Умови /5/ і /II/ – умови теплообміну із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Умова /6/ характеризує вільну від напружень внутрішню поверхню циліндра I, умова /I2/ – характеризує зовнішню поверхню циліндра II, що навантажена рівномірно розподіленим радіальним зусиллям Q. Умови /7/ і /8/ описують рівність напружень і переміщень на контактній поверхні, тобто умови ідеального механічного контакту. Згідно з умовою /9/, сума теплових потоків, що входять у тіла, дорівнює потужності дотичних напружень на контактній поверхні. Умова /I0/ відображає неідеальність теплового контакту з коефіцієнтом термопроникливості h; при $h \to \infty$ тепловий контакт ідеальний. Коефіцієнт тертя $f = f(T_c)$ розглядаємо як функцію середньої температури на контакті $T_c = \frac{T_1 + T_2}{2}$, причому розглядатимемо як лінійну, так і експоненціальну залежності:

$$f = f_0 \exp(-\beta(T_1 + T_2)/2) ; \qquad /I3/$$

$$f = f_0 - \beta(T_1 + T_2)/2 . \qquad /I4/$$

Як показали експериментальні дослідження [4], β слід вибирати таким чином, щоб при середній температурі на контактній поверхні близько I50°С коефіцієнт тертя f зменшився б удвічі.

Розглянемо інтеграли, що містяться у рівняннях /I/–/4/. Для циліндра I $r_1 = c$, $r_2 = a$, тому

$$\int_c^r T_1 r dr = \frac{A_1}{r}\left(r^2 \ln \frac{B_1}{r} + \frac{1}{2}(r^2 - c^2) - c^2 \ln \frac{B_1}{c}\right). \qquad /I5/$$

Для циліндра II $r_1 = a$, $r_2 = b$, тому

$$\int_a^r T_2 r dr = \frac{A_2}{r}\left(r^2 \ln \frac{B_2}{r} + \frac{1}{2}(r^2 - a^2) - a^2 \ln \frac{B_2}{a}\right). \qquad /I6/$$

Остаточно /I/–/4/ перепишемо як

$$u_i = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_i \frac{A_i}{2}\left(r \ln \frac{B_i}{r} + \frac{1}{2}\left(r - \frac{\delta^2}{r}\right) - \frac{\delta^2}{r} \ln \frac{B_i}{\delta}\right) + C_i r + \frac{D_i}{r} ; \qquad /I7/$$

$$\sigma_{r_i} = -\frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i} \frac{A_i}{2}\left(\ln \frac{B_i}{r} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\delta^2}{r^2}\right) - \frac{\delta^2}{r^2} \ln \frac{B_i}{\delta}\right) + \frac{E_i}{1+\nu_i}\left(\frac{C_i}{1-2\nu_i} - \frac{D_i}{r^2}\right); \qquad /I8/$$

$$\sigma_{\theta_i} = \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i}\frac{A_i}{2}\left(-\ln\frac{B_i}{r} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\delta^2}{r^2}\right) - \frac{\delta^2}{r^2}\ln\frac{B_i}{\delta}\right) + \frac{E_i}{1+\nu_i}\left(\frac{C_i}{1-2\nu_i} + \frac{D_i}{r^2}\right); \qquad /19/$$

$$\sigma_{z_i} = \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i} A_i \ln\frac{B_i}{r} + \frac{2\nu_i E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} C_i; \qquad /20/$$

$$T_i = A_i \ln\frac{B_i}{r}; \qquad /21/$$

$$q_i = -\frac{A_i}{r}, \quad i = 1, 2, \qquad \text{де } \delta = \begin{cases} c, i=1, \\ a, i=2. \end{cases} \qquad /22/$$

Невідомими є константи: A_i, B_i, C_i, D_i, $i = 1, 2$.
Виконавши граничні умови /5/-/12/ і розв"язавши квадратне рівняння відносно A_1 у випадку лінійної залежності f від середньої температури чи трансцендентне рівняння

$$\exp(J_1 A_1) = \frac{A_1}{J_2 A_1 + J_3}, \qquad /23/$$

де J_1, J_2, J_3 – деякі константи, у випадку експоненціальної залежності f від середньої температури, одержимо розподіл температурного поля для вкладених циліндрів. /рис. 2/.

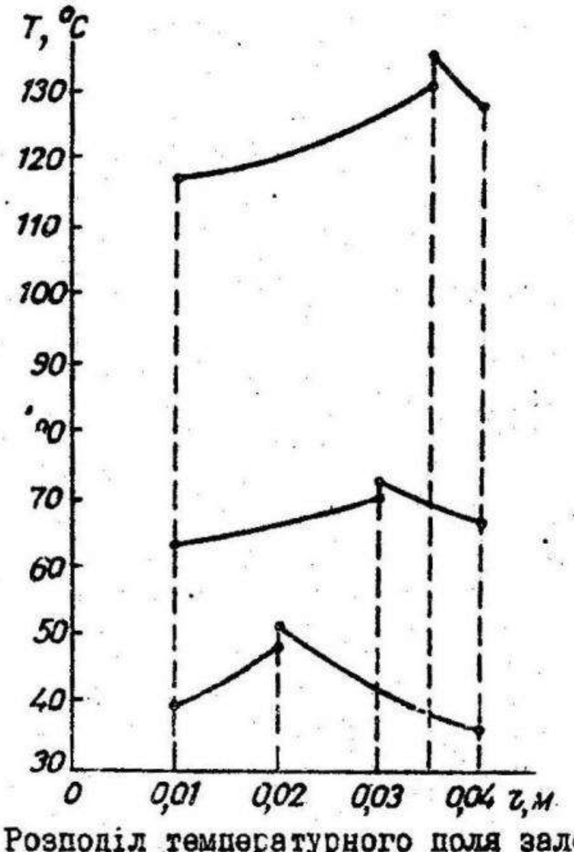


Рис. 2. Розподіл температурного поля залежно від радіуса поверхні контакту.

Під час розрахунку розглянуті матеріали з такими фізико-механічними характеристиками:
циліндр I: $E_1 = 20{,}6 \cdot 10^{10}$ Н/м², $V_1 = 0{,}28$, $\alpha_1 = 11{,}7 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹, $\lambda_1 = 47$ Вт/м·°C, $\gamma_1 = 3$ м⁻¹,
циліндр II: $E_2 = 7{,}1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $V_2 = 0{,}34$, $\alpha_2 = 23{,}8 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹, $\lambda_2 = 209$ Вт/м·°C, $\gamma_2 = 6$ м⁻¹.

Проте у даних розрахунках узятий до уваги тільки процес теплоутворення, котрий, як уже зазначено, не можна розглядати без процесу зношування. Для оцінки зношування поверхні основною характеристикою є лінійне зношування u^* – зміна розміру в напрямку, перпендикулярному до поверхні тертя. Тому гранична умова /8/ повинна мати вигляд:

$$u_1 = u_2 - u_2^* . \qquad /24/$$

Основними чинниками, що зумовлюють процес зношування, є контактні напруження σ_z і швидкість ковзання ω . Залежність зношування від σ_z і ω можна зобразити у вигляді функціоналу

$$u^* = F_0^t [\sigma_z, \omega] . \qquad /25/$$

За своїм фізичним змістом зношування є накопиченими за час t переміщеннями, які зумовлені руйнуванням, що відбувається за малі проміжки часу Δt . Для багатьох видів зношування властива степенева залежність швидкості зношування від σ_z і ω . На значення коефіцієнта зношування передусім впливають характеристики використовуваних матеріалів пари тертя, мікрогеометрія співдотичних поверхонь і мастила. Тому, строго кажучи, він не є параметром процесу зношування через зміну в часі таких характеристик контакту, як мікрогеометрія контакту, його фрикційні властивості. Однак найчастіше ці зміни відбуваються за проміжок часу, що є малою часткою в усьому часі експлуатації пари тертя. Розглянемо закон зношування у вигляді

$$u_2^* = Kf(\sigma_z)^{\xi} (\omega z)^{\eta} t \ , \quad z = a \qquad /26/$$

де $0 < \xi < 1$, $\eta = 0{,}5$, $K = 10^{-8}$.
Лінійний закон зношування /26/ має назву "старіння у зношуванні". Такий підхід дає змогу розглядати також інші закони зношування, наприклад, течію в зношуванні [5], наслідкове і наслідковостаріюче зношування [1].

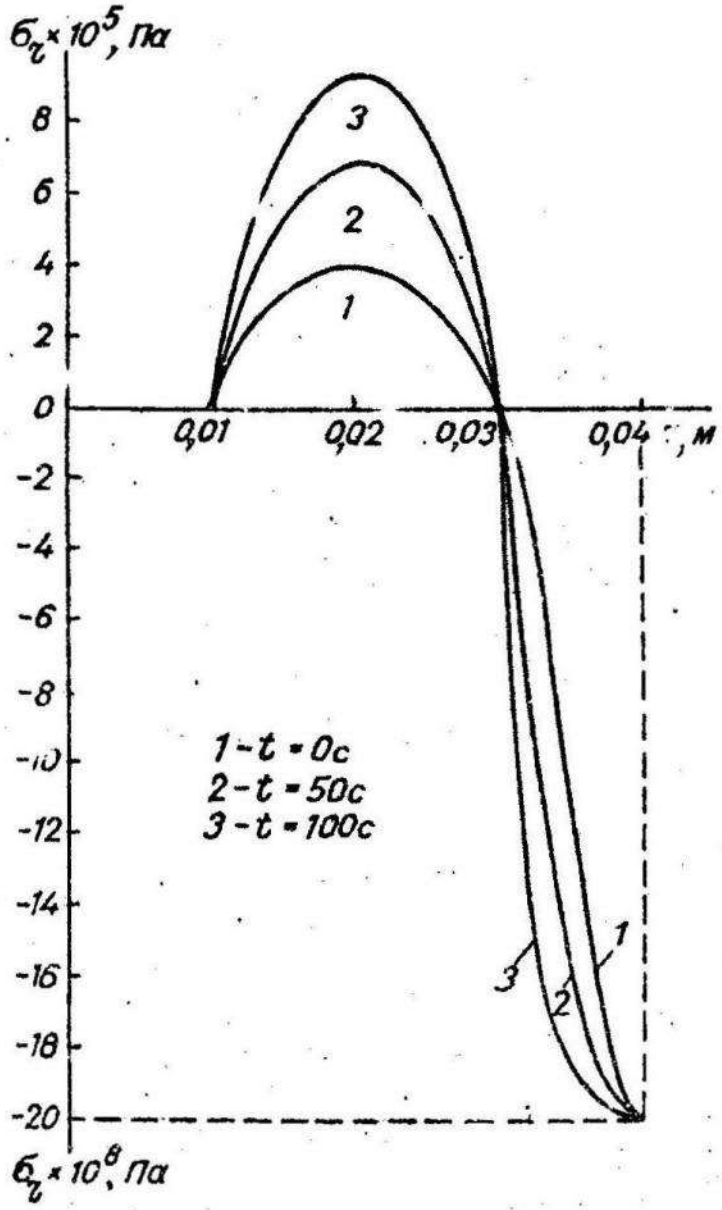


Рис. 3. Кінетика зміни σ_z у процесі зношування

В результаті заміни граничної умови /8/ на /24/ із використанням /26/ для знаходження коефіцієнта A_1 /за його допомогою виражаються всі інші коефіцієнти/ одержане трансцендентне рівняння

$$J_4 A_1 + J_5 = J_6 (J_7 A_1 + J_8)^{\xi}, \qquad /27/$$

де J_4, J_5, J_6, J_7, J_8 – деякі константи.

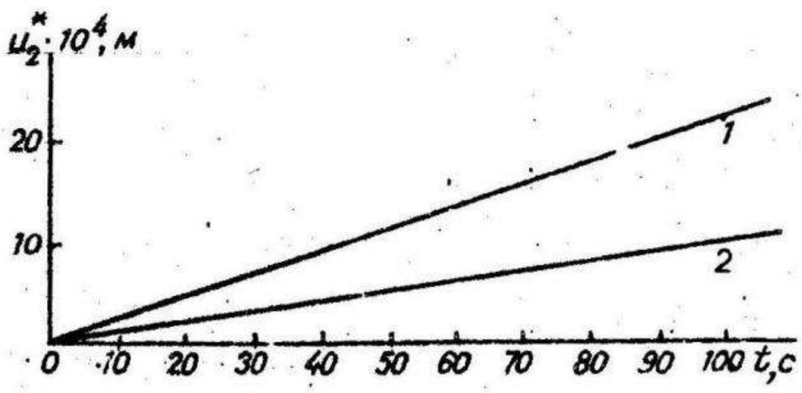


Рис. 4. Зміна профілю зношеної поверхні:
1 – з урахуванням теплоутворення; 2 – без урахування теплоутворення.

Після знаходження коефіцієнтів A_i, B_i, C_i, D_i, $i=1,2$ побудовані графіки зміни σ_z у процесі зношування та зміни профілю зношеної поверхні контакту з урахуванням і без урахування процесу теплоутворення /рис. 3 і 4/.

1. Гавриков М.В., Мазин Р.И. Применение наследственно стареющей модели изнашивания к осесимметричной контактной задаче // Трение и износ. 1989. Т.10. № 6. 2. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М., 1988. 3. Добычин М.Н. Общие характеристики процессов, протекающих при взаимодействии трущихся тел. М., 1968. 4. Дроздов Ю.Н., Павлов В.Г., Пучков В.Н. Трение и износ в экстремальных условиях: Справ. М., 1986. 5. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. К., 1965. 6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. 2-е изд., М., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 19.05.92.

УДК 539.3

В.П.Левицький, В.М.Онишкевич

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ІЗ ЗНОШУВАННЯМ

Уперше задачі із зношуванням /стирання, зминання мікронерівностей/ розглянуті у працях Л.О.Галіна [3]. У даній статті досліджується осесиметричне зношування під підошвою жорсткого штампа. Температурними ефектами при цьому нехтуємо, оскільки задачі в стаціонарній постановці при врахуванні теплоутворення і зношування втрачають сенс. Слід зауважити, що при стаціонарному теплоутворенні введення параметра часу τ лише у зношування порушуватиме принцип причинності [1]. Осесиметричне зношування описане у праці [2].

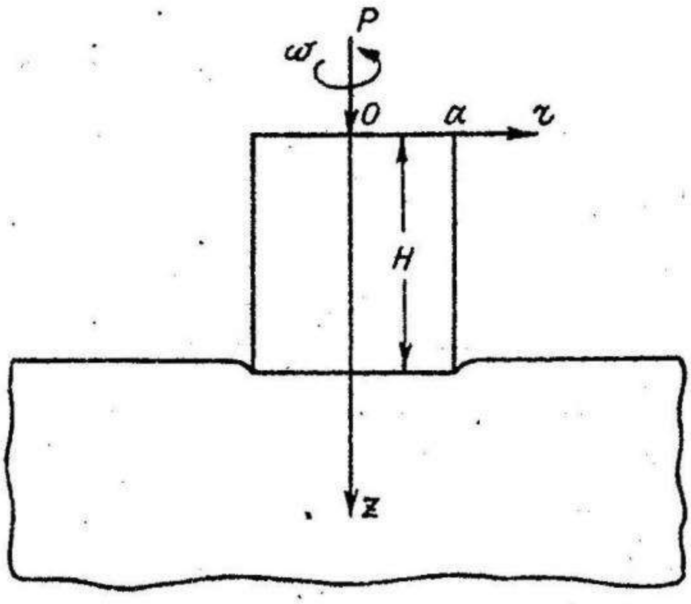


Рис. 1. Геометрія задачі

Розглянемо циліндричний штамп радіусом a і висотою H, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω. До моменту часу $\tau=0$ штамп був втиснутий силою P, пружний півпростір /рис. 1/. Під штампом спостерігається стаціонарний розподіл тиску. На ділянці контакту враховується зношування півпростору [4].

Для розв"язування задачі необхідно проінтегрувати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + k\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \qquad /1/$$

де $\theta = \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$, $k = \dfrac{\lambda + \mu}{\mu}$,

при таких крайових силових умовах:

$$z = H: \ u_z = f(r) + \left(\frac{k_1 \omega \tau r}{H_B} + k_2\right)\sigma_z^{\alpha}; \ 0 \leq r \leq a, \qquad /2/$$

$$\sigma_z = 0, \ r \geq a; \ \tau_{rz} = 0, \ r < \infty,$$

де λ, μ – коефіцієнти Ламе; $f(r)$ – задана величина осадки штампа; H_B – твердість матеріалу півпростору за Брінелем; τ – час. Процес зношування характеризується параметрами k_1, k_2 і α.

Увівши безрозмірні координати $\rho = r/a$ і $\zeta = z/H$ та застосувавши інтегральне перетворення Ханкеля по радіальній координаті до рівнянь /1/ і крайових умов /2/, розв"язок осесиметричних рівнянь термопружності для пружного півпростору в зображеннях за Ханкелем можна подати у вигляді

$$\bar{u}_z(\xi,\zeta) = \xi^2 [k C_1(\xi) + 2C_2(\xi) + k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)] e^{-\xi(\zeta-1)},$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi,\zeta) = -2\mu\xi^3 [kC_1(\xi) + C_2(\xi) + k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)] e^{\xi(\zeta-1)},$$

$$\bar{\tau}_{rz}(\xi,\zeta) = 2\mu\xi^3 [(k-1)C_2(\xi) - kC_1(\xi) - k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)] e^{-\xi(\zeta-1)},$$

де $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ – невідомі функції.

Задовольнивши останню умову /2/ і використавши отримане співвідношення

$$C_2(\xi) = \frac{k}{k-1} C_1(\xi),$$

шукані функції на ділянці контакту можна подати як

$$\bar{u}_z\Big|_{\zeta=1}=\theta_1\xi^2 C_1(\xi)\quad,\quad \bar{\sigma}_z\Big|_{\zeta=1}=\sigma_1\xi^3 C_1(\xi)\,,$$

де

$$\theta_1=k\,\frac{k+1}{k-1}\quad,\quad \sigma_1=-\frac{2\mu k^2}{k-1}\,.$$

Використавши формули обернення інтегрального перетворення Ханкеля, виконавши перші дві крайові умови /2/ та зобразивши контактні напруження σ_z у вигляді ряду

$$\sigma_z(\rho)=\sum_{n=1}^{N}a_n J_0(\lambda_n\rho)\,, \qquad /3/$$

отримаємо вирази для невідомих функцій, підстановка яких у крайові умови дає співвідношення

$$\frac{\theta_1}{\sigma_1}a\sum_{n=1}^{N}a_n\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^\infty\frac{J_0(\eta)J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2-\eta^2}d\eta-$$

$$-\left(\frac{k_1\omega\tau a\rho}{H_в}+k_2\right)\left[\sum_{n=1}^{N}a_n J_0(\lambda_n\rho)\right]^\alpha=f(\rho)\,,\quad \rho\le 1\,, \qquad /4/$$

де λ_n – нулі функції Бесселя першого роду нульового порядку:

$$J_0(\lambda_n)=0\,,\qquad n=1,\dots,N\,.$$

Використавши метод поточкової коллокації при $\rho=\rho_k$, $\rho_k=(k-1)/(N-1)$, $k=1,\dots,N$, отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів a_n , $n=1,\dots,N$:

$$\|A\|\vec{a}+\|D\|\vec{d}=\vec{b}\,, \qquad /5/$$

де

$$a_{k,n}=\frac{\theta_1}{\sigma_1}a\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^\infty\frac{J_0(\eta)J_0(\eta\rho_k)}{\lambda_n^2-\eta^2}d\eta\,, \qquad /6/$$

$$d_{k,n}=-\left(\frac{k_1\omega\tau a\rho_k}{H_в}+k_2\right)\left[J_0(\lambda_n\rho_k)\right]^\alpha,$$

$$b_k=f(\rho_k)\,,\quad d_k=a_k^\alpha\,, \qquad /7/$$

$$k=1,\dots,N\,;\quad n=1,\dots,N\,.$$

Тоді контактні напруження σ_z обчислюємо згідно із /3/, а вертикальні пружні переміщення поверхні півпростору визначаємо як

$$u_z(\rho,\zeta)=\frac{a}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{N}a_n\lambda_n J_1(\lambda_n)\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\left(\theta_1+\frac{k^2\eta(\zeta-1)}{k-1}\right)\frac{J_0(\eta)J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2-\eta^2}e^{-\eta(\zeta-1)}d\eta. \qquad /8/$$

Числові результати наведені для сили P, яка визначається з умови рівноваги штампа:

$$P=2\pi a^2\sum_{n=1}^{N}a_n\lambda_n J_1(\lambda_n) \qquad /9/$$

при таких значеннях вхідних параметрів /система CI/: матеріал півпростору – алюміній /H_B = II3/, a = I, H = 0,3, ω = 20, α = I, $k_1 = 10^{-9}$, $k_2 = 10^{-12}$. Розподіл контактних напружень подано на рис.2. Крива I відповідає часу τ = 0; 2 – τ = I; 3 – τ = 5; 4 – τ = I0.

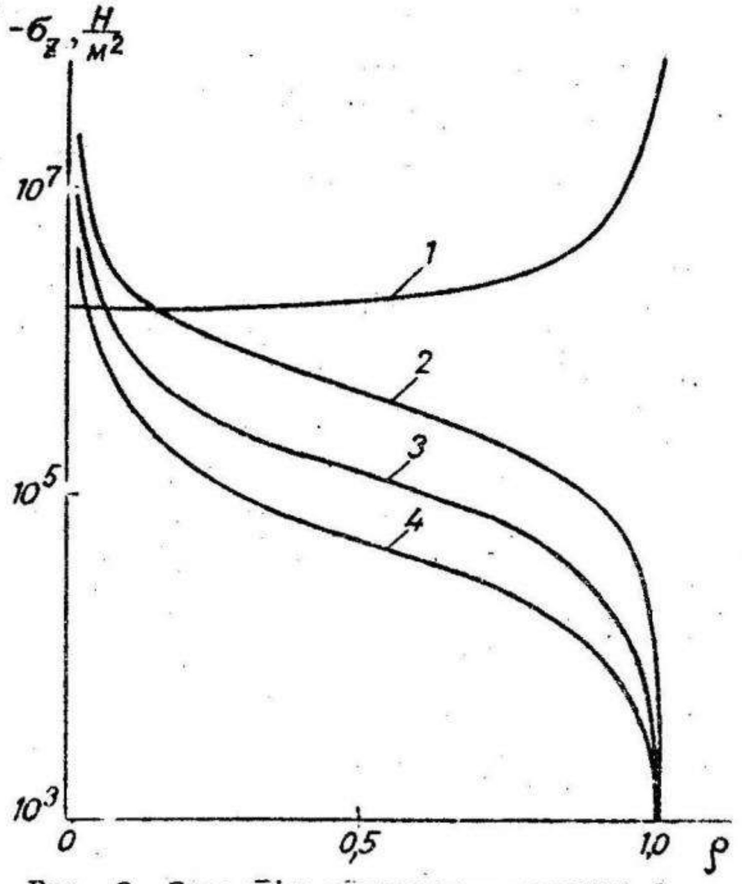


Рис. 2. Еволюція контактних напружень

1. Баран В.П. Принцип максимума модулей для волновых уравнений линейной упругости // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. Вып. 24. 2. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Применение наследственно-стареющей модели изнашивания к осесимметричной контактной задаче // Трение и износ. 1989. Т.10. № 6. 3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М., 1980. 4. Хрущов М.М., Бабичев М.А. Абразивное изнашивание. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.92

УДК 511.364

Я.М.Холявка

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ЧИСЕЛ, ПОВ"ЯЗАНИХ З $\wp(z)$

Нехай $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса, $2\omega_1$, $2\omega_2$ – довільна фіксована пара основних періодів, g_2, g_3 – її інваріанти, ξ_1, ξ_2, ξ_3 – довільні алгебраїчні числа, $n_i = \deg \xi_i$, $n = \deg Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $L_i = L(\xi_i)$.

Теорема. Нехай ω_2 – алгебраїчне число,

$$M = n\left(\min(n_2, n_3)\left(\frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3} + 1\right) + \ln\left(n\left(\frac{\ln L_1}{n_1} + 1\right)\right)\right),$$

$$N = 1 + \frac{\ln L_1}{n_1} + \ln\left(n\left(\frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3} + 1\right)\right).$$

Тоді існує така ефективна постійна $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$, що

$$|\omega_1 - \xi_1| + |g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| > \exp(-\Lambda n N M).$$

Для доведення цієї теореми використаємо другий метод Гельфонда [1]. Позначимо через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ лінійно незалежні із чисел $\xi_1^{u_1} \xi_2^{u_2} \xi_3^{u_3}$, $u_i = 0, \ldots, n_i - 1$, $i = 1, 2, 3$,

$$c_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n} c_{k,l,\tau} \zeta_\tau, \quad c_{k,l,\tau} \in \mathbb{Z}.$$

Допоміжну функцію, параметри і точки інтерполяції визначимо як

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} c_{k,l} z^k \wp^l(z + \omega_2),$$

$$K = [4\lambda^2 \sqrt{M} - 1]^2 - 1, \quad L = [\lambda^2 n N],$$

$$S_0 = [\lambda^3 n N], \quad X_0 = [\lambda \sqrt{M}], \quad X_1 = 2\lambda X_0,$$

$$z_{ij} = 2x_i \omega_1 + 2x_j \omega_2,$$

де λ – деяке натуральне число, X_0 і X_1 – межі інтерполяції перед та після застосування "основної леми" Гельфонда; S_0 – межа порядку похідних; z_{ij} – точки інтерполяції. Основна лема застосовується до функції $F(z) = f(z)\sigma^{2L}(z + \omega_2)$, σ – пов"язана з $\wp(z)$, σ – функція Вейєрштрасса, межу інтерполяції на p-му кроці можна взяти $X_p = 2^p X_0 \leq X_1$ [2].

1. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М., 1982. 2. Холявка Я.М. Приближение чисел, связанных с эллиптическими функциями. 1987. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4886-В87.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.91

УДК 517.946

П.В.Примак

ОБЕРНЕНІ КОЕФІЦІЄНТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Нехай у задачі без початкових умов:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku + f(x,t), \qquad /1/$$

$$(x,t) \in \{0 \leq x \leq l,\ t > -\infty\};$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h(t)u\right)\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad /2/$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu(t) \qquad /3/$$

крім функції $u(x,t)$ потрібно визначити коефіцієнт $h(t)$. Для цього додатково задамо умову

$$u\Big|_{x=l} = \psi(t). \qquad /4/$$

Для розв"язання цієї задачі застосуємо символічний метод Фантапьє*. Введемо інтегральний оператор

$$Ju = \int_l^x u(\alpha,t)\,d\alpha$$

і двічі подіємо ним на рівняння /1/, при цьому використаємо умови /2/ та /3/:

$$a^2 J^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u - \psi(t) - J\nu(t) + kJ^2 u + J^2 f.$$

Після введення інтегродиференціального оператора

$$Bu = J\frac{\partial u}{\partial t}$$

рівняння /1/ набирає вигляду

$$(1 - (B^2 a^2 - kJ^2))u = \psi(t) + J\nu(t) - J^2 f(x,t).$$

Виконаємо формальні заміни $B \to \lambda_1$, $J \to \lambda_2$, це λ_1 і λ_2 – комплексні параметри, при цьому $u(x,t)$ замінимо на $\bar{u}(x,t,\lambda_1,\lambda_2)$.

---

* Л е в и П. Конкретные проблемы функционального анализа. М., 1967.

Таким чином,

$$(1-(\lambda_1^2 a^2 - k\lambda_2^2))\bar{u} = \psi(t) + \lambda_2 \nu(t) - \lambda_2^2 f(x,t),$$

звідки

$$\bar{u}(x,t,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\psi(t)}{\Delta} + \frac{\lambda_2 \nu(t)}{\Delta} - \frac{\lambda_2^2 f(x,t)}{\Delta},$$

де $\Delta = 1-(\lambda_1^2 a^2 - k\lambda_2^2)$.

Розв"язок задачі Коші /1/, /3/, /4/ відновлюється за $\bar{u}(x,t,\lambda_1,\lambda_2)$ формулою обернення:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \int_{C_2} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_l^x d\tau_1 \int_l^{\tau_1} \bar{u}(\tau_0, t + \frac{x-\tau_1}{\lambda_1}, \lambda_1, \lambda_2) e^{\frac{\tau_1-\tau_0}{\lambda_2}} d\tau_0,$$

де C_1 і C_2 – кола достатньо малого радіуса з центром у нулі, розміщені у комплексних площинах λ_1 і λ_2 відповідно.

Припустимо, що функції $\psi(t)$ і $\nu(t)$ – цілі, а $f(x,t)$ – ціла по t та неперервна по x. Врахувавши це і скориставшись теорією лишків, після деяких перетворень отримаємо розв"язок задачі Коші /1/, /3/, /4/ у явному вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i k^i a^{2(n-i)} \Big(\psi^{(2(n-i))}(t) \frac{(x-l)^{2n}}{(2n)!} + \nu^{(2(n-i))}(t) \frac{(x-l)^{2n+1}}{(2n+1)!} - $$

$$ - \frac{1}{(2n+1)!} \int_l^x f^{(0,2(n-i))}(\tau_0, t) (x-\tau_0)^{2n+1} d\tau_0 \Big). \qquad /5/$$

Переконатись у тому, що /5/ дійсно є розв"язком задачі /1/, /3/, /4/, неважко через безпосередню підстановку. Маючи цей розв"язок, знаходимо коефіцієнт $h(t)$ з крайової умови /2/:

$$h(t) = \frac{u_x(0,t) - \mu(t)}{u(0,t)}, \quad \text{якщо } u(0,t) \neq 0 \text{ для всіх } t \in R.$$

Для рівняння /1/ цим самим методом досліджено задачу на визначення функцій $u(x,t), h_1(t), h_2(t)$ з крайових:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h_1(t) u\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_2(t) u\right)\Big|_{x=l} = \mu_2(t)$$

і додаткових умов:

$$u\big|_{x=x_0} = \psi(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \nu(t),$$

де $0<x_0<l$, $h_1(t)\geq 0$, $h_2(t)\geq 0$.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i k^i a^{2(n-i)}\Big(\psi^{(2(n-i))}_{(t)}\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}+\nu^{(2(n-i))}_{(t)}\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}-$$

$$-\frac{1}{(2n+1)!}\int_{x_0}^{x}f^{(0,2(n-i))}_{(\tau_0,t)}(x-\tau_0)^{2n+1}d\tau_0\Big),$$

$$h_1(t)=\frac{u_x(0,t)-\mu_1(t)}{u(0,t)},\quad h_2(t)=\frac{\mu_2(t)-u_x(l,t)}{u(l,t)},$$

якщо $u(0,t)\neq 0$, $u(l,t)\neq 0$ для всіх $t\in R$.

Розв"язок задачі Коші /I/, /3/, /4/ можна використати також для знаходження одного з невідомих сталих коефіцієнтів a або k рівняння /1/. Для цього досить додатково мати

$$u\Big|_{\substack{x=0\\ t=t_0}}=\mu(t_0). \qquad /6/$$

Крім уже зроблених припущень щодо функцій $\psi(t)$, $\nu(t)$ і $f(x,t)$ додатково вимагаємо, щоб

$$m_\psi\leq\psi^{(n)}_{(t_0)}\leq M_\psi,$$
$$m_\nu\leq\nu^{(n)}_{(t_0)}\leq M_\nu,$$
$$m_f\leq f^{(0,n)}_{(x,t_0)}\leq M_f,$$

де $m_\psi, m_\nu, m_f, M_\psi, M_\nu, M_f$ - деякі сталі, для всіх $0\leq x\leq l$ та $n=0,\dots$.

Підставивши /5/ у /6/, отримаємо для знаходження одного з невідомих сталих коефіцієнтів a або k трансцендентне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i k^i a^{2(n-i)}\Big(\psi^{(2(n-i))}_{(t_0)}\frac{l^{2n}}{(2n)!}-\nu^{(2(n-i))}_{(t_0)}\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!}-$$

$$-\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^{l}f^{(0,2(n-i))}_{(\tau_0,t_0)}\tau_0^{2n+1}d\tau_0\Big)-\mu(t_0)=0. \qquad /7/$$

Неважко переконатися, що при $k<0$ у випадку невідомого коефіцієнта a, при $a\to 0$ умова $u(0,t_0)-\mu(t_0)\le 0$ випливає з нерівності

$$\psi(t_0)ch(l\sqrt{-k})-\nu(t_0)\frac{sh(l\sqrt{-k})}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{-k}}\int_0^l f(\tau_0,t_0)sh(\tau_0\sqrt{-k})d\tau_0-\mu(t_0)<0, \quad /8/$$

а умова $u(0,t_0)-\mu(t_0)\ge 0$ – з нерівності

$$\psi(t_0)ch(l\sqrt{-k})-\nu(t_0)\frac{sh(l\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}-\frac{1}{\sqrt{-k}}\int_0^l f(\tau_0,t_0)sh(\tau_0\sqrt{-k})d\tau_0-\mu(t_0)>0. \quad /9/$$

Крім цього, при $a=a_0$, де $a_0>0$, умова $u(0,t_0)-\mu(t_0)\le 0$ випливає з нерівності

$$M_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a_0^2-k})-m_\nu\frac{sh(l\sqrt{a_0^2-k})}{\sqrt{a_0^2-k}}-m_f\frac{ch(l\sqrt{a_0^2-k})-1}{\sqrt{a_0^2-k}}-\mu(t_0)\le 0, \quad /10/$$

а умова $u(0,t_0)-\mu(t_0)\ge 0$ – з нерівності

$$m_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a_0^2-k})-M_\nu\frac{sh(l\sqrt{a_0^2-k})}{\sqrt{a_0^2-k}}-M_f\frac{ch(l\sqrt{a_0^2-k})-1}{\sqrt{a_0^2-k}}-\mu(t_0)\ge 0. \quad /11/$$

Пари нерівностей /8/ і /11/, або /9/ і /10/ забезпечують на підставі відомої теореми Коші існування розв"язку рівняння /7/ з проміжку $(0,a_0]$.

Якщо в рівнянні /7/ невідомим є k, то аналогічні міркування приводять до висновку:
Якщо існують такі k_0 і k_1, $k_0<k_1\le 0$, щоб одночасно виконувались нерівності:

$$M_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_1})-m_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_1})}{\sqrt{a^2-k_1}}-m_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_1})-1}{\sqrt{a^2-k_1}}-\mu(t_0)\le 0,$$

$$m_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_0})-M_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_0})}{\sqrt{a^2-k_0}}-M_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_0})-1}{\sqrt{a^2-k_0}}-\mu(t_0)\ge 0,$$

або

$$m_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_1})-M_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_1})}{\sqrt{a^2-k_1}}-M_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_1})-1}{\sqrt{a^2-k_1}}-\mu(t_0)\geq 0,$$

$$M_\psi(t_0)ch(l\sqrt{a^2-k_0})-m_\nu\frac{sh(l\sqrt{a^2-k_0})}{\sqrt{a^2-k_0}}-m_f\frac{ch(l\sqrt{a^2-k_0})-1}{\sqrt{a^2-k_0}}-\mu(t_0)\leq 0,$$

тоді існує розв"язок рівняння /7/, який належить відрізку $[k_0,k_1]$.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.90

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук, М.П.Ленюк

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У БЕЗМЕЖНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПРИ ЗАЛЕЖНОМУ ВІД КООРДИНАТИ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Нехай безмежна кругова циліндрична оболонка нагрівається зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$ по кільцевій області $|\alpha| \leq \beta$, $\gamma = \pm\delta$. Через бічні поверхні $\gamma = \pm\delta$ оболонки здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температури $t_c = t_0 N(\alpha)$.

Для знаходження нестаціонарного температурного поля в оболонці маємо рівняння теплопровідності [1]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha^2}+\left[\varkappa_1^2+\varkappa N(\alpha)\right]T=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial\tau}-\varkappa_0^2 t_0 N(\alpha)S_+(\tau) \qquad /1/$$

з початковою та крайовими умовами

$$T\big|_{\tau=0}=0; \qquad T\big|_{|\alpha|\to\infty}=0, \qquad /2/$$

де

$$\varkappa=\varkappa_0^2-\varkappa_1^2,\quad \varkappa_i^2=\alpha_i/\lambda\delta,\quad i=0,1;$$

$$N(\alpha)=S_-(\alpha+\beta)-S_+(\alpha-\beta);$$

α_0, α_1 – коефіцієнти тепловіддачі відповідно з поверхонь області нагріву та за її межами; λ – коефіцієнт теплопровідності a – коефіцієнт температуропровідності; τ – час; 2δ – товщина оболонки; $2b$ – ширина кільця нагріву; $S_{\pm}(\xi)$ – асиметричні одиничні функції [2].

Після застосування перетворення Лапласа до рівняння /I/ та умов /2/ розв"язок задачі теплопровідності в зображеннях має вигляд [3]

$$T=\frac{\varkappa_0^2 t_0}{s\gamma_0}\Big\{(\gamma_0 \,sh\, 2\gamma_0 b+\gamma_1(ch\, 2\gamma_0 b-1))\times$$

$$\times\left[e^{\gamma_1(\alpha+b)}(1-S_-(\alpha+b))+e^{-\gamma_1(\alpha-b)}S_+(\alpha-b)\right]+$$

$$+\gamma_0^{-1}\left[(\gamma_0^2+\gamma_1^2)\,sh\,2\gamma_0 b+2\gamma_0\gamma_1\,ch\,2\gamma_0 b-\right.$$

$$\left.-2\gamma_1(\gamma_1\,sh\,\gamma_0 b+\gamma_0\,ch\,\gamma_0 b)\,ch\,\gamma_0\alpha\right]N(\alpha)\Big\}\times$$

$$\times\left[(\gamma_0^2+\gamma_1^2)\,sh\,2\gamma_0 b+2\gamma_0\gamma_1\,ch\,2\gamma_0 b\right]^{-1}, \qquad /3/$$

де $\gamma_0^2=\varkappa_0^2+\dfrac{s}{a}, \quad \gamma_1^2=\varkappa_1^2+\dfrac{s}{a}.$

Нестаціонарне температурне поле в оболонці визначається формулою

$$T=\varkappa_0^2 t_0\Big\{T_1(\tau,\alpha)\left[1-S_-(\alpha+b)\right]+T_2(\tau,\alpha)S_+(\alpha-b)+$$

$$+T_3(\tau,\alpha)\left[S_-(\alpha+b)-S_+(\alpha-b)\right]\Big\}, \qquad /4/$$

де

$$T_1(\tau,\alpha)=M\int_0^\infty\left[f_1(\xi)\cos\sqrt{\xi^2+\varkappa}\,(\alpha+b)+\right.$$

$$+f_2(\xi)\sin\sqrt{\xi^2+\varkappa}\,(\alpha+b)\big]\varphi(\xi)\,d\xi\,;$$

$$T_2(\tau,\alpha)=M\int_0^\infty f_3(\xi)\varphi(\xi)\cos\xi\alpha\,\frac{d\xi}{\xi}\;+$$

$$+\,t_0\big(1-e^{-a\varkappa_0^2\tau}\big)\Big[1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_3(\xi)\,\frac{\cos\xi\alpha}{\omega_1^2(\xi)+\omega_2^2(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi}\Big];$$

$$T_3(\tau,\alpha)=M\int_0^\infty\big[f_1(\xi)\cos\sqrt{\xi^2+\varkappa}\,(\alpha-b)-$$

$$-f_2(\xi)\sin\sqrt{\xi^2+\varkappa}\,(\alpha-b)\big]\varphi(\xi)\,d\xi\,;$$

$$f_1(\xi)=\xi\omega_1(\xi)\sin 2b\xi+\sqrt{\xi^2+\varkappa}\;\omega_2(\xi)(1-\cos 2b\xi)\,;$$

$$f_2(\xi)=\xi\omega_2(\xi)\sin 2b\xi-\sqrt{\xi^2+\varkappa}\;\omega_1(\xi)(1-\cos 2b\xi)\,;$$

$$f_3(\xi)=2\sqrt{\xi^2+\varkappa}\,\big[\xi\omega_2(\xi)\cos b\xi-\sqrt{\xi^2+\varkappa}\,\omega_1(\xi)\sin b\xi\big];$$

$$\varphi(\xi)=\big[1-e^{-a(\xi^2+\varkappa_0^2)\tau}\big](\xi^2+\varkappa_0^2)^{-1}\big[\omega_1^2(\xi)+\omega_2^2(\xi)\big]^{-1};$$

$$\omega_1(\xi)=2\xi\sqrt{\xi^2+\varkappa}\,\cos 2b\xi\,;$$

$$\omega_2(\xi)=(2\xi^2+\varkappa)\sin 2b\xi\,;$$

$$M=2\pi^{-1}\varkappa_0^2\,t_0\;.$$

1. К о л я н о Ю.М., Л и д ы к В.З. Установившиеся напряжения в бесконечной цилиндрической оболочке с теплообменом, обусловленные локальным нагревом // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1978. Вып.8. С.93-98. 2. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., 1972. 3. П о д с т р и г а ч Я.С., Л о м а к и н В.А., К о л я н о Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.91

УДК 517.956

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ АСИМЕТРИЧНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛОСКІЙ ОБЛАСТІ

У практиці при розв"язуванні задач математичної фізики узагальнені функції застосовують у двох випадках: для моделювання джерел зосереджених фізичних впливів і моделювання неоднорідних фізичних параметрів композитних тіл. У першому випадку використовують симетричні узагальнені функції [1]. У другому випадку, з теоретико-множинного погляду, найприродніше користуватися асиметричними узагальненими функціями. Одновимірні асиметричні функції з численними прикладами докладно описані у праці /3/. Зроблені кроки до побудови теорії двовимірних асиметричних узагальнених функцій [2]. Розглянемо практичний приклад, що ілюструє можливості теорії.

Нехай прямокутне у плані призматичне тіло армоване M прямокутними призматичними тепловипромінювальними включеннями. Через бічну поверхню тіла здійснюється конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Для визначення стаціонарного поля $t(x_1, x_2)$ температур у тілі маємо таку математичну задачу

$$\begin{cases} -div\left[\lambda(x_1,x_2)\, grad\, t\right] = \sum\limits_{m=1}^{M} Q_m S_m(x_1,x_2), & 0<x_1<D_1,\ 0<x_2<D_2, \\ \left(\lambda_0 \dfrac{\partial t}{\partial n} + \alpha t\right)\Big|_{\Gamma} = 0, & \end{cases} \qquad /1/$$

де $\lambda(x_1, x_2) = \lambda_0 + \sum\limits_{m=1}^{M} (\lambda_m - \lambda_0) S_m(x_1, x_2)$,

$$S_m(x_1,x_2) = \left[S_-(x_1 - d_{11}^m) - S_+(x_1 - d_{12}^m)\right]\left[S_-(x_2 - d_{21}^m) - S_+(x_2 - d_{22}^m)\right],$$

$(d_{1i}^m,\ d_{2j}^m)$ – координати кутових точок m -го включення $i, j = 1,2$;

$$S_-(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad S_+(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ 1, & \xi > 0, \end{cases}$$

Q_m – потужність m -го нагрівача, λ_0, λ_m – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу і m -го включення відповідно.

Застосувавши теореми диференціювання двовимірних узагальнених асиметричних функцій / 2 /, перетворимо задачу /I/ до вигляду

$$\begin{cases} -\Delta t = \sum_{m=1}^{M} \left[\frac{Q_m}{\lambda_m} S_m(x_1, x_2) + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{\partial t}{\partial n_m} \Big|_{\Gamma_m} \delta_m^- \right], \\ \left(\frac{\partial t}{\partial n} + \beta t \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \qquad /2/$$

де δ_m^- – двовимірна асиметрична дельта-функція, $\beta = \frac{\alpha}{\lambda_0}$.

Шукане температурне поле знаходимо з /2/ у вигляді розкладу за системою ортонормованих функцій:

$$t = \sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij}\, \varphi_{1i}(x_1) \varphi_{2j}(x_2), \quad \varphi_{sz}(x_s) = \frac{\nu_{sz} \cos \nu_{sz} x_s + \beta \sin \nu_{sz} x_s}{\sqrt{\frac{1}{2}(\nu_{sz}^2 + \beta^2) D_s + \beta}},$$

де ν_{sz} z -й корінь трансцендентного рівняння

$$tg\, D_s \nu_{sz} - \frac{2\beta \nu_{sz}}{\nu_{sz}^2 - \beta^2}, \quad s = 1,2; \quad z = 1,2,3,\dots .$$

Коефіцієнти t_{ij} визначаємо з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$t_{ij} = \sum_{k,l=1}^{\infty} A_{ij}^{kl} t_{kl} + B_{ij}\,; \quad i,j = 1,2,3,\dots .$$

де

$$A_{ij}^{kl} = \frac{1}{\mu_{ij}} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_0} - 1 \right) \left(f_{11}^{ik} f_{22}^{jl} - f_{12}^{jl} f_{21}^{ik} \right),$$

$$f_{ps}^{ij} = F_p(\nu_{si}, \nu_{sj}, d_{s2}) - F_p(\nu_{si}, \nu_{sj}, d_{s1}), \quad p = 1,2; \; s = 1,2;$$

$$F_1(\nu_{si}, \nu_{sj}, x_s) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta^2}{\nu_{si}\nu_{sj}}\right) \frac{\sin(\nu_{si} - \nu_{sj}) x_s}{\nu_{si} - \nu_{sj}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta^2}{\nu_{si}\nu_{sj}}\right) \frac{\sin(\nu_{si} + \nu_{sj}) x_s}{\nu_{si} + \nu_{sj}} +$$

$$+ \frac{\beta}{\nu_{si}\nu_{sj}} \sin \nu_{si} x_s \, \sin \nu_{sj} x_s ,$$

$$F_2(\nu_{si},\nu_{sj},x_s)=\varphi_{si}(x_s)\varphi'_{sj}(x_s),$$

$$B_{ij}=\frac{1}{\mu_{ij}}\sum_{m=1}^{M}\frac{Q_m}{\lambda_m}\left[\varphi'_{1i}(d_{12}^m)-\varphi'_{1i}(d_{11}^m)\right]\left[\varphi'_{2j}(d_{22}^m)-\varphi'_{2j}(d_{21}^m)\right],$$

$$\mu_{ij}=\nu_{1i}^2+\nu_{2j}^2 .$$

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: 4-е изд. М., 1981. 2. Грицевич В.С. Асимметричные слои и дифференциальные операторы теории поля от разрывных функций в плоской области // Изв. вузов. Математика. 1989. № 8. С.79-82. 3. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.91

УДК 517.535.4

Ш.Абуарабі

ПРО ТЕЙЛОРІВСЬКІ КОЕФІЦІЄНТИ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО l-M-ІНДЕКСУ

Нехай l - додатна неперервна на $[0,\infty)$ функція. Ціла функція $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ називається функцією обмеженого l-M -індексу, якщо існує $N\in Z_+$ таке, що для всіх $n\in Z_+$ і $r\in[0,\infty)$

$$\frac{M(r,f^{(n)})}{n!\,l^n(r)}\leqslant max\left\{\frac{M(r,f^{(k)})}{k!\,l^k(r)}:0\leqslant k\leqslant N\right\},$$

де $M(r,f)=max\{|f(z)|:|z|=r\}$. Використовуючи критерії обмеженості l-M -індексу цілої функції, наведені у праці [1], можна довести такі теореми.

Теорема 1. Нехай l - неперервно диференційована, RO - змінна [ ] і задовольняє умову

$$-1<\Lambda\leqslant\underline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{r\,l'(r)}{l(r)}\leqslant\overline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{r\,l'(r)}{l(r)}\leqslant S<+\infty .$$

Для того щоб ціла функція f була функцією обмеженого l-M індексу, необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|}\Big/ l\left(1/\sqrt[n]{|a_n|}\right)<+\infty .$$

Теорема 2. Нехай $f(x)=\frac{1}{x}\alpha(x)$, $x \geq a$, де функція $\alpha(x)\uparrow+\infty$, $x\to+\infty$, така що $\alpha(e^x)$ є RO - змінною функцією і задовольняє умову

$$0<k_1 \leq \frac{x\alpha'(x)\ln x}{\alpha(x)} \leq k_2<+\infty, \quad x \geq x_0 .$$

Для того щоб ціла функція f була функцією обмеженого $l-M$ - індексу, необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, n/\alpha\left(1/\sqrt[n]{|a_n|}\right)<+\infty$$

Теорема 3. Нехай $l(x)=\frac{1}{x}\alpha(\ln x)$, $x \geq a$, де α - повільно зростаюча двічі неперервно диференційована функція, така що $2\alpha'(x)+x\alpha''(x)\geq 0$, $x\geq a$ і $\alpha(x^2\alpha'(x)/$ $/\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $x\to+\infty$. Для того щоб ціла функція f була функцією обмеженого $l-M$ -індексу, необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, n/\alpha\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)<+\infty .$$

1. Абуарабі Ш., Шеремета М.М. Цілі функції обмеженого $l-M$ - індексу // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1989. № II. С.3-5. 2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.90.

З М І С Т

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України

Вісник Львівського університету
Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 38

ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ ТА АЛГЕБРИ

Редактор Е.А.Главацька
Художній редактор Е.Д.Каменщик
Технічний редактор С.Д.Довба
Коректор К.Г.Логвиненко

Підп. до друку 17.03.93. Формат 60х84/16.
Папір офсет. Умовн. друк. арк. 4,65. Умовн. фарб.-відб. 4,88.
Обл.-вид. арк. 4,76. Вид. № 7. Зам. 2305. Замовне.

Видавництво "Світ" при Львівському держуніверситеті.
290000 Львів, вул. Університетська, 1.

Львівська обласна книжкова друкарня.
290000 Львів, вул. Стефаника, 11.

У видавництві "Світ" готується до видання в 1993 р.
нова книга:

Р у д а в с ь к и й Ю.К., М о к р и й Є.М., П і х З.Г., Ч и п М.М., К у р и л я к І.Й. Математичні методи в хімії та хімічній технології.- 14 арк.- Мова українська.

У посібнику викладені основи стехіометричного аналізу простих і складних хімічних реакцій з використанням методів матричного числення. Описана методика побудови математичних моделей багатостадійних реакцій за участю інтермедіатів, використання методів математичної статистики в обробці результатів хімічних досліджень та розрахунку параметрів кінетичних моделей. Посібник є зв"язковою ланкою між математичними та спеціальними дисциплінами хімічного профілю.

Для студентів, аспірантів та викладачів хіміко-технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572
Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1993, вип. 38, 1—80.