УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.М.Щербина

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1. Постановка задачі. У даній статті розглядаємо чисельні методи розв"язування задач оптимального керування процесами, які описуються системами звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t, \xi), \quad 0 \le t \le T; \qquad /1/$$

$$x(0) = x_0, \qquad /2/$$

де $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $\xi \in R^l$; t - час.

Вектор-функція $x(t)$ характеризує рух об"єкта /перебіг процесу тощо/ залежно від часу. Її компоненти називають фазовими координатами об"єкта. За допомогою компонент вектор-функції $u(t)$, які називають керуваннями, здійснюють керування рухом об"єкта. Вектор ξ - керуючі параметри - визначає стан системи і є сталим на всьому проміжку $[0,T]$. Функції $f_i(x,u,\xi,t)$, $i=\overline{1,n}$, що описують внутрішню будову об"єкта і враховують різноманітні зовнішні фактори, вважаються відомими.

Надалі приймемо, що $x(t)$, $f(x,u,\xi,t)$ - неперервно диференційовні за сукупністю своїх аргументів. Керування $u(t)$ шукатимемо в класі кусково-неперервних функцій.

На керування, фазові координати та керуючі параметри можна накладати різноманітні обмеження:

$$\begin{aligned} &V_0(\xi) = 0, \quad g_T(x(T), \xi, T) \le 0, \\ &g_0(\xi) \le 0, \quad V(x(t), u(t), \xi, t) = 0, \\ &V_T(x(T), \xi, T) = 0, \quad g(x(t), u(t), \xi, t) \le 0, \\ &\int_0^T \tilde{V}(x(t), u(t), \xi, t)dt + V(x(T), \xi, T) = 0, \\ &\int_0^T \tilde{g}(x(t), u(t), \xi, t)dt + G(x(T), \xi, T) \le 0. \end{aligned} \qquad /3/$$

Тут вектор-функції $V_0, g_0, V_T, g_T, V, g, \tilde{V}, \tilde{g}, V, G$ вважаються неперервно диференційовними за сукупністю своїх аргументів.

Набір $(x(\cdot), u(\cdot), \xi, T)$ називається допустимим, якщо керування $u = u(\cdot) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ визначене і кусково-неперервне на інтервалі $[0, T]$ та виконуються умови /1/-/3/.

Нехай множина допустимих наборів непорожня і на ній заданий функціонал

$$F(x(\cdot), u(\cdot), \xi, T) = \int_0^T f_0(x(t), u(t), \xi, T)dt + \Phi(x(T), \xi, T). \qquad /4/$$

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в тому, щоб мінімізувати функціонал /4/ на множині допустимих наборів.

2. <u>Дискретна задача оптимального керування.</u> Ефективним засобом дослідження задач оптимального керування є принцип максимуму Понтрягіна [4], який дає необхідні умови оптимальності в даних задачах.

На базі принципу максимуму побудована велика кількість методів розв"язування задачі оптимального керування [1, 2, 3]. Однак із використанням принципу максимуму на даний час вдається розв"язати лише досить вузький клас задач. Тому актуальним залишається розв"язування задач оптимального керування через їх дискретні апроксимації. Це пов"язане з тим, що дискретна задача оптимального керування є по суті задачею нелінійного програмування, а для розв"язування останньої розроблено потужний математичний і програмний апарат.

Розіб"ємо відрізок $[0, T]$ на $q-1$ ділянок точками

$$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_q = T.$$

Відрізок $[t_i, t_{i+1}]$ називатимемо $i = M$ інтервалом інтегрування, а його величину позначимо через $h_i = t_{i+1} - t_i$.

Введемо позначення:

$$t_i = \sum_{j=1}^{i-1} h_j, \quad x_i = x(t_i), \quad u_i = u(t_i),$$

$$z_i = [x_i, u_i, \xi, t_i], \quad i = \overline{1, q-1},$$

$$f(z_i) = f(x_i, u_i, \xi, t_i).$$

Проінтегруємо формулу /1/ за схемою Рунге-Кутта:

$$x_{i+1} = x_i + h_i \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(z_i^j). \qquad /5/$$

Тут
$$z_i^j = [x_i^j, u_i^j, \xi, t_i^j], \quad u_i^j = u(t_i^j),$$

$$x_i^j = x_i + \beta_{j-1} h_i f(z_i^{j-1}), \quad t_i^j = t_i + \beta_{j-1} h_i, \qquad /6/$$

2-3030

де α_j, β_{j-1} – деякий набір чисел, причому всі $0 \le \beta_{j-1} \le 1$ і $\beta_0 = 0$, а тому значення векторів z^0 не суттєві. У /5/, /6/ і далі в цій праці індекси i та j набувають цілочисельних значень відповідно з інтервалів $[1, q-1]$ та $[1, p]$.

Параметри p, α_j та β_{j-1} визначають різні методи чисельного інтегрування системи /I/, які належать до сімейства методів Рунге-Кутта. Похибка інтегрування системи /I/ на i-му кроці оцінюється різницею $\eta(h_i) = x(t_{i+1}) - x_{i+1}$, де $x(t)$ – розв"язок системи /I/-/2/. Якщо $f(z)$ – достатньо гладка функція своїх аргументів, то функцію $\eta(h_i)$ можна виразити у вигляді ряду Тейлора:

$$\eta(h_i) = \sum_{k=0}^{s} \frac{\eta^{(k)}(0)}{k!}(h_i)^k + \frac{\eta^{(k+1)}(\theta h_i)}{(k+1)!}(h_i)^{k+1},$$

де $0 < \theta < 1$. Параметри методу підбираємо так, щоб

$$\eta(0) = \eta^{(1)}(0) = \ldots = \eta^{(s)}(0) = 0$$

для довільних достатньо гладких функцій $f(z)$. Якщо при цьому $\eta^{(s+1)} \ne 0$, то s називають порядком похибки методу інтегрування на одному кроці.

Якщо в схемі /5/ прийняти $p = 1$, отримаємо схему Ейлера з першим порядком похибки інтегрування.

Якщо взяти $p = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1/2$, отримаємо схему Ейлера з перерахунком, в якій порядок похибки інтегрування дорівнює двом.

Другий порядок похибки має також модифікована схема Ейлера: $p = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $\beta_1 = 1$.

Із схем, які мають четвертий порядок похибки, найбільш уживаною є схема, в якій $p = 4$, $\alpha_1 = \alpha_4 = 1/6$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$, $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 0$.

Перепишемо задачу оптимального керування в дискретизованому вигляді:

$$\Phi(z) + \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_0(z^j) \longrightarrow \min_{u_i^j, \xi, T}, \qquad /7/$$

$$\begin{aligned}
&v_0(\xi) = 0,\\
&g_0(\xi) \le 0,\\
&v_T(z_q) = 0,\\
&g_T(z_q) \le 0,\\
&v(z_i^j) = 0, \quad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,p}, \qquad /8/\\
&g(z_i^j) \le 0, \quad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,p},
\end{aligned}$$

$$V(z_q)+\sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j \tilde{V}(z_i^j)=0,$$

$$G(z_q)+\sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j \tilde{g}(z_i^j)\leq 0.$$

Задача /5/–/8/ є деякою специфічною задачею нелінійного програмування відносно скінченної кількості невідомих параметрів ξ, T і $u_i^j,\ i=\overline{1,q},\ j=\overline{1,\rho}$.

Очевидно, що при $q \to \infty$ розв"язок задачі /5/–/8/ наближається до розв"язку задачі /I/–/3/.

Для розв"язування задачі /5/–/8/ можна використати ефективні методи оптимізації, зокрема квазіньютонівську модифікацію методу лінеаризації [5].

Основною проблемою в процесі розв"язування дискретної задачі оптимального керування є її висока розмірність: $q * \rho * m + l + 1$. Для зменшення розмірності можна використати такі підходи.

Вважаємо, що керування $u(t)$ на інтервалі інтегрування є сталим: $u_i^1=u_i^2=\ldots=u_i^\rho=u_i$. Окрім зменшення розмірності до $q * m + l + 1$, можна зменшити і кількість обмежень на траєкторію руху типу нерівності:

$$g(x_i^1, u_i, \xi, T)\leq 0,\quad i=\overline{1,q},$$

а обмеження типу рівності звести до одного:

$$\sum_{i=1}^{q}\left[V(x_i^1, u_i, \xi, T)\right]^2=0.$$

Інший можливий підхід полягає ось у чому. Очевидно, що z_{i+1} залежить лише від $z_1,\ldots,z_i$. Тому можна розглядати q задач /5/–/8/, в яких невідомим є набір $w_i=(u_i, \xi, T)$. Послідовно розв"язуючи ці задачі при $i=1,2,\ldots,q$, отримуємо оптимальне керування і траєкторію.

Такий підхід дає змогу розв"язувати задачу оптимального керування майже з довільною точністю. Однак він потребує подальшого дослідження, оскільки клас задач, до яких підхід застосовний, є досить вузьким.

Для використання ефективних градієнтних методів оптимізації потрібно вміти обчислювати похідні функцій.

Нехай задана функція

$$R(x,u,t,\xi,T)=B(z_q)+\sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j B(z_i^j).$$

Для обчислення похідних функції R по параметрах оптимізації можна використати такі рекурентні формули [3] $(i=\overline{1,q-1})$:

$$p_i=p_{i+1}+\sum_{j=1}^{\rho} p_i^j,\qquad p_q=\frac{\partial b(z_q)}{\partial x},$$

$$p_i^j = h_i\left[\alpha_j \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial x} + \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial x}\left(\beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1}\right)\right],$$

$$\frac{dR}{du_i} = h_i \sum_{j=1}^{\rho}\left(\alpha_i \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial u} + \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial u}\left[\beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1}\right]\right),$$

$$\frac{dR}{du_q} = \frac{\partial B(z_q)}{\partial u},$$

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_{i+1} + h_i \sum_{j=1}^{\rho}\left[\alpha_j \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial t},\ \beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1}\right\rangle\right],$$

$$\tilde{p}_q = \frac{\partial B(z_q)}{\partial T},$$

$$\frac{dR}{dT} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^{\rho}\left[\alpha_j B(z_i^j) + \left\langle f(z_i^j), \alpha_j p_{i+1} + \beta_j p_i^{j+1}\right\rangle\right] + \tilde{p}_{i+1};$$

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{\partial B(z_q)}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^{\rho}\left[\alpha_j \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial \xi} + \left\langle \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial \xi}, \beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1}\right\rangle\right].$$

3. Обчислювальний експеримент. Процес дискретизації задачі оптимального керування реалізований у вигляді процедури на алгоритмічній мові Паскаль у середовищі Turbo-Pascal 7.0. Для розв"язування задачі нелінійного програмування використана квазіньютонівська модифікація методу лінеаризації [5]. За допомогою даної процедури розв"язана низка тестових задач оптимального керування на персональному комп"ютері IBM AT з математичним співпроцесором /тактова частота 16 МГц/.

Задача 1 [3]. Рух матеріальної точки описується системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_1 = \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

На керування накладене обмеження $|u(t)| \leq 0{,}5$. Задані також два термінальні обмеження:

$$x_1(T) = 4, \qquad x_2(T) = 3.$$

Суть задачі: потрібно перевести матеріальну точку з початку координат у точку з координатами /4, 3/ за найкоротший час:

$$F(T) = T \longrightarrow min.$$

Систему диференціальних рівнянь інтегрували за модифікованою схемою Ейлера з постійним кроком. Число точок дискретизації $q = 50$.

За початкове наближення взяте $u_0(t) \equiv 0$, $T_0 = 3c$. Оптимізація виконана з точністю 10^{-5}.

За 31о роботи комп"ютера отримане оптимальне управління, характер якого зображений на рис. I. Значення функціоналу мети $F(T) = T$ =5,108705.

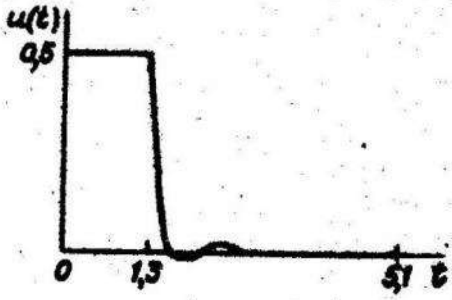

Рис. I.

Задача 2 [3]. Керований процес описується системою:

$$\dot{x}_1 = -u, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = [Vu - Q(x)]/x_1 - g,$$

де $V = 2$, $g = 0{,}01$, $Q(x) = 0{,}05\, x_3^2\, e^{-(0{,}1x_2)}$.

Початковий стан: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$.

Тривалість процесу фіксована: T = 100.

Термінальне обмеження: $x_1(T) = 0{,}2$.

Обмеження на керування: $0 \leq u(t) \leq 0{,}04$.

Функціонал мети: $F(x, T) = -0{,}01 x_2(T)$.

Початкове наближення: $u_0(t) = 0{,}008$.

Система диференціальних рівнянь проінтегрована за схемою Рунге-Кутта 4-го порядку. Число точок дискретизації q = 50. Оптимізація виконана з точністю 10^{-5}. Через 30 с рахунку отримане оптимальне керування, характер якого поданий на рис. 2. Значення функціоналу мети F = -1,32196.

Рис. 2.

1. Антонюк В.Г., Срочко В.А. К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т.32. № 7. С.979-991. 2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981. 3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982. 4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976. 5. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика. 1988. № 6. С.66-71.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.93

УДК 518:517.948

М.В.Жук

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + r\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y) \qquad /1/$$

за нелінійної однорідної крайової умови

$$R[u]\Big|_\Gamma \equiv \left[p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu,x) + q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu,y) + \sigma(s)u\right]\Big|_\Gamma = 0, \qquad /2/$$

де Γ – межа області D, обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x)<h(x)$, ν – зовнішня нормаль до Γ.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(x,y)\in H=L_2(D)$ з нормою $\|f\|^2=\iint_D f^2(x,y)\,dx\,dy$; $p(x,y,s,t,z)$; $q(x,y,s,t,z)$; $r(x,y,s,t,z)$ вимірні при $(x,y)\in D$, $-\infty<s,t,z<+\infty$, диференційовні за змінними s, t, z, причому модулі цих похідних обмежені /3/; $\sigma(s)$ – задана обмежена додатна. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $p(x,y,0,0,0)=0$, $q(x,y,0,0,0)=0$, $r(x,y,0,0,0)=0$. Крім цього, припускаємо, що при $(x,y)\in D$ і довільних s,t,z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t}\zeta^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}\right)\zeta_1\zeta_2 + \frac{\partial q}{\partial z}\zeta_2^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial t}\right)\zeta_1\zeta_0 + \left(\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)\zeta_2\zeta_0 + \frac{\partial r}{\partial s}\times \zeta_0^2 \geq M(\zeta_1^2+\zeta_2^2) + N\zeta_0^2,$$