1. Антонюк В.Г., Срочко В.А. К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т.32. № 7. С.979-991. 2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981. 3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982. 4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976. 5. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика. 1988. № 6. С.66-71.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.93

УДК 518:517.948

М.В.Жук

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + z\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y) \quad /1/$$

за нелінійної однорідної крайової умови

$$R[u]\big|_{\Gamma} \equiv \left[p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu,x) + q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu,y) + \sigma(s)u\right]\Big|_{\Gamma} = 0, \quad /2/$$

де Γ – межа області D, обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x)<h(x)$, ν – зовнішня нормаль до Γ.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(x,y)\in H=L_2(D)$ з нормою $\|f\|^2=\iint\limits_D f^2(x,y)\,dx\,dy$; $p(x,y,s,t,z)$; $q(x,y,s,t,z)$; $z(x,y,s,t,z)$ вимірні при $(x,y)\in D$, $-\infty<s,t,z<+\infty$, диференційовні за змінними s,t,z, причому модулі цих похідних обмежені /3/; $\sigma(s)$ – задана обмежена додатна. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $p(x,y,0,0,0)=0$, $q(x,y,0,0,0)=0$, $z(x,y,0,0,0)=0$. Крім цього, припускаємо, що при $(x,y)\in D$ і довільних s,t,z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t}\zeta^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}\right)\zeta_1\zeta_2 + \frac{\partial q}{\partial z}\zeta_2^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial t}\right)\zeta_1\zeta_0 + \left(\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\zeta_2\zeta_0 + \frac{\partial z}{\partial s}\times \zeta_0^2 \geq M(\zeta_1^2+\zeta_2^2)+N\zeta_0^2,$$

де $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ - довільні дійсні числа. $M = const > 0$, $N = const$. Причому співвідношення між постійними M, N, γ задовольняють певні умови [3] /γ визначається далі/.

Позначимо через $H_T \subset H$ енергетичний простір допоміжного додатно визначеного оператора T_σ, який знаходимо з формули

$$T_\sigma u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad /3/$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y) + u\right]\Big|_\Gamma = 0, \qquad /4/$$

областю визначення якого є $D(T_\sigma)$ множина двічі неперервно диференційованих $u(x,y)$ в $\bar{D}$, що задовольняють крайові умови /4/

При цьому [3]

$$[u,v]_\sigma = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\,dy + \int_\Gamma uv\,ds, \qquad /5/$$

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma}|u|_\sigma, \quad \gamma = const > 0. \qquad /6/$$

Для довільних u, $v \in H_\sigma$ формально вводиться квазібілінійна форма

$$A(u,v) = \iint_D \left[p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + r\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) v\right] dx\,dy + \int_\Gamma \sigma uv\,ds. \qquad /7/$$

Тоді для довільних $u, v, w \in H_\sigma$ аналогічно, як і в праці [3], можна знайти нерівності

$$A(u,u-v) - A(v,u-v) \geq \mu |u-v|_\sigma^2; \qquad /8/$$

$$A(u,w) - A(v,w) \leq \eta |u-v|_\sigma |w|_\sigma, \qquad /9/$$

де μ, η - деякі додатні константи [3].

Задачу /1/-/2/ розв"язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k(x,y), \qquad /10/$$

де лінійно незалежні функції $\varphi_k(x,y)$ у проміжку $[g(x), h(x)]$ вибираємо таким чином, щоб система $\{\chi_l(x)\varphi_k(x,y)\}$ була повною системою лінійно незалежних функцій в H_σ. Шукані коефіцієнти $C_K(x)$ визначаємо зі системи

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} (Au_n - f)\psi_i dy + \psi_i \sqrt{1+y'^2} R[u_n]\Big|_{y=g(x)} + \psi_i \sqrt{1+y'^2} R[u_n]\Big|_{y=h(x)} = 0 \qquad /11/$$

за умов

$$\int\limits_{g(a)}^{h(a)} R[u_n]\psi_i\Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int\limits_{g(b)}^{h(b)} R[u_n]\psi_i\Big|_{x=b} dy = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad /12/$$

Як відомо, для узагальненого розв'язку $u \in H_\sigma$ задачі /1/-/2/ виконується тотожність

$$A(u,v) = \iint\limits_{D} f v\, dx dy \qquad /13/$$

при довільній функції $v \in H_\sigma$. Аналогічно для узагальненого розв'язку системи /11/-/12/ $u_n(x,y)$ справедлива тотожність

$$A(u_n, v_n) = \iint\limits_{D} f v_n\, dx dy, \qquad /14/$$

де $v_n(x,y)$ – довільна функція з $H_n \cap H_\sigma$, $H_n \subset H$ – простір функцій вигляду $v_n(x,y) = \sum\limits_{K=1}^{n} a_K(x)\psi_K(x,y)$.

Відомо, що умови /8/, /9/ забезпечують існування та єдиність узагальненого розв'язку для задачі /1/-/2/ і системи /11/-/12/ [3].

Визначимо збіжність та оцінку швидкості збіжності методу Канторовича.

Нехай $u \in H_\sigma$ – узагальнений розв'язок задачі /1/-/2/. Тоді з тотожностей /13/, /14/ для довільного елемента $w_n \in H_n \cap H_\sigma$ отримуємо

$$A(u, w_n) - A(u_n, w_n) = 0.$$

З нерівності /8/, враховуючи останнє співвідношення при $w_n = u_n - v_n$, де v_n – довільний елемент з $H_n \cap H_\sigma$, а також лінійність форми $A(u,v)$ по другому аргументу, маємо

$$|u - u_n|_\sigma \leq \frac{1}{\mu}\left[A(u, u - u_n) - A(u_n, u - u_n)\right] = \frac{1}{\mu}\left[A(u, u - v_n) - A(u_n, u - v_n)\right].$$

Використовуючи нерівність /9/, з останнього співвідношення отримуємо

$$|u - u_n|_\sigma \leq \frac{\eta}{\mu}\, |u - u_n|_\sigma\, |u - v_n|_\sigma .$$

Таким чином,

$$|u - u_n|_\sigma \leq c\, |u - v_n|_\sigma , \qquad /15/$$

де $C = \frac{\eta}{\mu}$; елемент $v_n \in H_n \cap H_\sigma$ вибираємо так, щоб він реалізував мінімум функціоналу $|u - v_n|_\sigma$.

При цьому внаслідок повноти у просторі H_σ системи функцій $\{X_l(x)\psi_k(x,y)\}$ для елемента $v_n(x,y) = \lim\limits_{m \to \infty} v_n^m$, де елемент $v_n^m(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} a_{kl} X_l(x)\psi_k(x,y)$ реалізує мінімум функціоналу $|u - v_n^m|_\sigma$, маємо

$$|u - u_n|_\sigma \longrightarrow 0,$$

при $n \longrightarrow \infty$, тому

$$|u - u_n|_\sigma \longrightarrow 0 \qquad /16/$$

при $n \longrightarrow \infty$. Отже, справедлива така теорема.

<u>Теорема.</u> При обмеженнях, зроблених відносно вихідних даних задачі /1/-/2/, що забезпечують виконання умов /8/, /9/, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою /15/.

Повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_σ є, наприклад, система $\{x^l y^k\}$, $l,k = 0,1,2,\ldots$ [3], тому координатну систему функцій $\{\psi_k(x,y)\}$ вибираємо у вигляді

$$\psi_k(x,y) = y^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad /17/$$

Нехай $u_n(x,y)$ - узагальнений розв"язок вихідної задачі /1/-/2/, перші похідні якого неперервні, та існують сумовані з квадратом в області D другі узагальнені похідні, функції $g''(x)$ і $h''(x)$ неперервні. Тоді, використовуючи оцінку /15/ і доведення леми 1 [1], отримуємо, що швидкість збіжності методу Канторовича, якщо для наближення /10/ використовуються функції /17/, характеризується оцінкою

$$|u - u_n|_\sigma = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Якщо ж, крім цього, $u(x,y)$ належить простору $W_2^{s+1}(D)$, а функції $g^{(s+1)}(x)$ і $h^{(s+1)}(x)$ - неперервні, то

$$|u - u_n|_\sigma = O\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

1. Власова З.А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1959. Т.53. С.37-42. 2. Жук М.В. Застосування методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип. 37. С.12-16. 3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.9.