УДК 517.948:539.3

Ю.В.Нікольський

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КОНТАКТУ ПЛАСТИНИ, ЩО ВІЛЬНО ЛЕЖИТЬ НА ПОВЕРХНІ ПРУЖНОГО НАПІВПРОСТОРУ

Розглянемо математичну модель контакту /без тертя/ для пластини Кірхгофа, що вільно лежить на поверхні напівпростору. Припустимо, що пластина займає обмежену область Ω з межею Γ, яка має k кутових точок. Із напівпростором пов"язана система координат $OXYZ$, причому вісь OZ напрямлена всередину напівпростору перпендикулярно до його поверхні.

Умови непроникнення тіл одне в одне мають вигляд

$$u^*(M)=w(M),\quad p(M)\geq 0,\quad M\in S,$$
$$u^*(M)>w(M),\quad p(M)=0,\quad M\in(\Omega\setminus S), \qquad /1/$$

де S - область контакту пластини і напівпростору; $w(M)$ - прогин пластини; $u^*(M),\ M(x,y)\in\{R^2=\{z=0\}\}$ - переміщення межі напівпростору на осі OZ у точці M; $p(M),\ M\in S$ - контактний тиск.

Контактна задача як крайова зводиться до визначення у напівпросторі $z>0$ гармонійної функції $u(x,y,z)$, функції $w(x,y)$, яка визначає прогин пластини у точці $M(x,y)$ та області S з рівнянь

$$\Delta^2 w(x,y)=\lambda_1\big(q(x,y)-u'_z(x,y,0)\big),\ M(x,y)\in\Omega,$$
$$\Delta u(N)=0,\quad N(x,y,z)\in\{z>0\} \qquad /2/$$

та крайових умов

$$V_n=-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\nabla^2 w+(1-\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)\Big|_\Gamma=0,$$

$$M_n=-\frac{1}{\lambda_1}\left(\nabla^2 w-(1-\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)\Big|_\Gamma=0, \qquad /3/$$

$$M_{nsi}=\frac{1-\nu_1}{\lambda_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial n}\Big|_{M_i+0}-\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial n}\Big|_{M_i-0}\right)=0,$$

$$u(N)=O(r^{-1})\quad \text{при}\quad r\to\infty,\quad r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2},$$
$$2\pi\lambda_2 u(x,y,0)=w(x,y),\ u'_z(x,y,0)\geq 0,\ M(x,y)\in S,$$

$$2\pi\lambda_2 u(x,y,0) > w(x,y), \quad u'_z(x,y,0)=0, \quad M(x,y)\in(\Omega\setminus S)$$
$$\int_\Omega u'_z(x,y,0)\,ds = P, \qquad \int_\Omega x u'_z(x,y,0)\,ds = M_y,$$
$$\int_\Omega y u'_z(x,y,0)\,ds = M_x,$$
$$\lambda_1>0, \quad \lambda_2>0, \quad \nu_1>0, \quad \Gamma^* = \Gamma\setminus \bigcup_{i=1}^{k} M_i .$$

Постійні величини $\lambda_1, \lambda_2, \nu_1$ відомі та пов"язані з механічними характеристиками матеріалів пластини та напівпростору. У /2/–/3/ M_n – згинальна сила; V_n – узагальнена перерізувальна сила; M_{nsi} – зміна крутного моменту у кутовій точці M при обраному напрямку обходу контура пластини; n, s – відповідно напрямок нормалі та дотичної до контура Γ; P – рівнодіюча навантаження густини $q(M)$; M_x, M_y – моменти навантаження P відносно осей OY та OX.

Величини P, M_x, M_y, а також переміщення межі напівпростору u визначаються за формулами:

$$p(M) = u'_z(x,y,0), \quad M(x,y)\in S,$$
$$P = \int_\Omega q(N)\,dS_N, \qquad M_y = \int_\Omega x\, q(N)\,dS_N,$$
$$M_x = \int_\Omega y\, q(N)\,dS_N, \qquad u^* = 2\pi\lambda_2 u(x,y,0),$$
$$\lambda_1 = \frac{12(1-\nu_1^2)}{E_1 l^3}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},$$

де E_1, E_2, ν_1, ν_2 – модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона матеріалів пластини та напівпростору відповідно; l – висота пластини.

Скористаємося інтегральними зображеннями розв"язків рівнянь /2/ у вигляді

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \frac{p(N)\,dS_N}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right)^{1/2}},$$
$$w(M) = \lambda_1\Big(\int_\Omega \Lambda(M,N)\big(q(N)-p(N)\big)\,dS_N +$$
$$+\int_{\Gamma^*}\Big(q^*(M)\Lambda(M,\varepsilon) - m^*(\varepsilon)\frac{\partial\Lambda(M,\varepsilon)}{\partial n}\Big)\,d\varepsilon +$$
$$+\sum_{i=1}^{k} P_i\Lambda(M,M_i) + h_1 + h_2 x + h_3 y, \qquad /4/$$
$$N(\xi,\varepsilon)\in S, \quad \varepsilon\in\Gamma^*.$$

Зображення функції $w(x,y)$ грунтується на методі компенсуючих навантажень Толкачова [3]. Воно складається з компенсуючої перерізувальної сили $q^*(\varepsilon)$, моменту $m^*(\varepsilon)=(m_x^*(\varepsilon), m_y^*(\varepsilon))$, а також зусиль P_i, $i = 1,2, \ldots, k$, які зосереджені в кутових точках контура. Вектор $h=(h_1, h_2, h_3)$ визначає жорстке переміщення пластини; $\Lambda(M,N)=(8\pi)^{-1} z^2 \ln z$, $z=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ – фундаментальний розв"язок рівняння $\Delta^2 w = 0$; $\partial \Lambda / \partial n$ – нормальна похідна функції $\Lambda(M,N)$.

Зображення функції $w(x,y)$ виконане методом компенсуючих навантажень у зв"язку з тим, що зображення розв"язку задачі згину пластини з вільним краем методом функцій Гріна невідоме. Зміст методу компенсуючих навантажень полягає в тому, що пластину, яка займає область Ω з контуром Γ, доповнюють до безмежної. До серединної поверхні нескінченної пластини прикладають нормальні погонні зусилля $q^*(\varepsilon)$ вздовж контура Γ, згинальні моменти $m^*(\varepsilon)$ та зусилля P_i, $i = 1,2\ldots,k$, які зосереджені у кутових точках M контура і компенсують розширення області Ω. Тобто величини q^*, m^*, P_i підбирають таким чином, щоб задовольнити крайові умови (3) [3]. Виникнення зосереджених зусиль у кутових точках M контура Γ при згині пластини випливає з принципу Сен-Венана [2].

При побудові математичної моделі враховують [1], що під час переходу через гладкий контур Γ області Ω узагальнена перерізувальна сила V_n та згинальний момент M_n у /3/ змінюється стрибком. Тому умови /3/ набувають вигляду

$$V_n^{\pm}(M) = \pm 0{,}5\, q^*(M) + V_n(M),$$
$$M_n^{\pm}(M) = \pm 0{,}5\, m^*(M) + M_n(M). \qquad /5/$$

Тут знаки "+" і "-" відповідають значенням функцій всередині області Ω та поза нею. Щоб отримати інтегральні рівняння, за допомогою яких визначаються компенсуючі навантаження, виконаний граничний перехід з довільної точки $M(x,y) \in \Omega$ на контур Γ зсередини Ω.

Оскільки рівності $M_n^+ = 0$, $V_n^+ = 0$, $M \to \varepsilon$, $\varepsilon \in \Gamma$ є умовами вільної межі, то крайові умови /3/ набувають вигляду [2]

$$0{,}5\, q^*(M) + V_n(M) = 0,$$
$$0{,}5\, m^*(M) + M_n(M) = 0 \qquad /6/$$

разом з умовами у кутових точках:

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial n}\right|_{M_i-0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial n}\right|_{M_i+0}, \qquad i=1,2,\dots,k.$$

Підстановкою функцій $u(x,y,z^*)$, $w(x,y)$ у формі /4/ у крайові умови /3/ та рівності /5/ контактна задача зводиться до системи інтегральних включень відносно невідомих функцій $p(M)$, $q^*(\varepsilon)$, $m^*(\varepsilon)$ області S, вектора h і чисел P_i^* $= 1,2,\dots,k$.

Сформулюємо отриману контактну задачу на основі нелінійних інтегральних рівнянь відносно невідомих $v(M)$, $q^*(\varepsilon)$, $m^*(\varepsilon)$, $h=(h_1, h_2, h_3)$ і чисел P_i^*, $i = 1,2,\dots,k$, яка має вигляд

$$\begin{aligned}
&\mu v^-(M) + \lambda K v^+ - \lambda_1\Big(T_1 q^* - T_2 m^* + \sum_i \Lambda P_i^*\Big) = g,\\
&\mathop{\mathcal{I}}_{\Omega} v^+ + \mathop{\mathcal{I}}_{\Gamma^*} q^* + \sum_i P_i^* = P,\\
&\mathop{\mathcal{I}}_{\Omega} y v^+ + \mathop{\mathcal{I}}_{\Gamma^*} y q^* + \mathop{\mathcal{I}}_{\Gamma^*} m^* + \sum_i y_i P_i^* = M_x, \qquad /7/\\
&\mathop{\mathcal{I}}_{\Omega} x v^+ + \mathop{\mathcal{I}}_{\Gamma^*} x q^* + \mathop{\mathcal{I}}_{\Gamma^*} m^* + \sum_i x_i P_i^* = M_y,\\
&0{,}5 q^*(\varepsilon) + V_n\big(A v^+, q^*(\varepsilon), m^*(\varepsilon), P_i^*, A g\big) = 0, \quad \varepsilon\in\Gamma,\\
&0{,}5 m^*(\varepsilon) + M_n\big(B v^+, q^*(\varepsilon), m^*(\varepsilon), P_i^*, B g\big) = 0, \quad \varepsilon\in\Gamma,\\
&W_n\big(C v^+, q^*(\varepsilon), m^*(\varepsilon), P_i^*, C g\big) = 0 \quad \varepsilon\in\Gamma.
\end{aligned}$$

Тут

$$v^+(M) = \sup\{0, v(M)\}; \qquad v^-(M) = \inf\{0, v(M)\};$$

$$K = \lambda^{-1}(\lambda_2 R + \lambda_1 W); \qquad g = \lambda_1 W q + h_1 + h_2 x + h_3 y,$$

$$Rp = \int_\Omega R(M,N)\,p(N)\,dS_N, \qquad R(M,N) = \big((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\big)^{-1/2}.$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mathop{\mathcal{I}}_{\Omega} = \int_\Omega (\cdot)\,dS_N, \quad \mathop{\mathcal{I}}_{\Gamma^*} = \int_{\Gamma^*} (\cdot)\,d\varepsilon, \quad i=1,2,\dots,k,$$

$$Wp = \int_\Omega \Lambda(M,N)\,p(N)\,dS_N, \qquad \Lambda P_i^* = \Lambda(M, M_i)\,P_i^*,$$

$$T_1 q^* = \int_{\Gamma^*} \Lambda(M,\varepsilon)\,q^*(\varepsilon)\,d\varepsilon, \qquad T_2 m^* = \int_{\Gamma^*} \frac{\partial \Lambda}{\partial n}\, m^*(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$Ap = \int_\Omega A(N,\varepsilon)\,p(N)\,dS_N, \qquad Bp = \int_\Omega B(N,\varepsilon)\,p(N)\,dS_N,$$

$$Cp = \int_\Omega C(N,\varepsilon)\,dS_N,$$

$\mu > 0$ – довільне число.

Буквами V_n, M_n, W_n позначені оператори, лінійні відносно аргументів, що стоять у дужках, а ядра лінійних операторів A, B, C не наведені через їхню громіздкість.

Еквівалентність рівнянь /7/ інтегральним включенням визначається теоремою.

Теорема. Розв"язки системи граничних інтегральних рівнянь /7/ та інтегральних включень, до яких зводиться задача /1/-/2/, еквівалентні, тобто: якщо (v, q^*, m^*, P_i^*, h) - розв"язок рівняння /7/, то функції q^*, m^*, числа $P_i^*, i = 1, 2, \ldots, k$, вектор h, функція $p = v^+ i$ область $S = \{M: v(M) \geq 0\}$ є розв"язком системи інтегральних включень; якщо $(p, q^*, m^*, P_i^*, S, h)$ розв"язок системи інтегральних включень, то функції

$$v = \mu^{-1}\left(g - \lambda K p + \lambda_1\left(T_1 g^* - T_2 m^* + \sum_i \Lambda P_i^*\right)\right) + p$$

q^*, m^*, числа P_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k$ та вектор h є розв"язком рівнянь /7/.

1. Кулаков В.М., Толкачев В.М. Изгиб пластин произвольного очертания // Докл. АН СССР. 1976. Т.230. № 1. С.56-59. 2. Работнов Ю.В. Механика деформируемого твердого тела. М., 1979. 3. Толкачев В.М. Метод компенсирующих нагрузок в теории изгиба пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 3. С.155-160.

Стаття надійшла до редколегії 10.04.93

УДК 539.3

І.С.Будз, Я.Г.Савула

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ПОЧАТКОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

1. Постановка задачі. Розглядаємо тонку оболонку як тривимірне тіло Z:

$$Z = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3): (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, \ -h \leq \alpha_3 \leq h\},$$

яке в недеформівному стані належить до криволінійної ортогональної системи координат α_i $(i = 1, 2, 3)$, де α_3 - лінія, перпендикулярна до серединної поверхні Ω оболонки, що є образом ω.

Нехай напружено-деформівний стан оболонки складається з "головного", що є рівноважним і характеризується малими деформаціями та скінченними переміщеннями, а також з "додаткового", якому