

Еквівалентність рівнянь /7/ інтегральним включенням визначається теоремою.

Теорема. Розв'язки системи граничних інтегральних рівнянь /7/ та інтегральних включень, до яких зводиться задача /1/-/2/, еквівалентні, тобто: якщо (v, q^*, m^*, P_i^*, h) - розв'язок рівняння /7/, то функції q^*, m^* , числа $P_i^*, i=1, 2, \dots, k$, вектор h , функція $p = v^+ i$ область $S = \{M: v(M) \geq 0\}$ є розв'язком системи інтегральних включень; якщо $(p, q^*, m^*, P_i^*, S, h)$ розв'язок системи інтегральних включень, то функції

$$v = \mu^{-1} (q - \lambda K p + \lambda_1 (T_1 q^* - T_2 m^* + \sum_i \lambda P_i^*)) + p$$

q^*, m^* , числа $P_i^*, i=1, 2, \dots, k$ та вектор h є розв'язком рівнянь /7/.

І. Кулак В.М., Толкачев В.М. Изгиб пластин произвольного очертания // Докл. АН СССР. 1976. Т.230. № 1. С.56-59. 2. Работнов Ю.В. Механика деформируемого твердого тела. М., 1979. 3. Толкачев В.М. Метод компенсирующих нагрузок в теории изгиба пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 3. С.155-160.

Стаття надійшла до редколегії 10.04.93

УДК 539.3

І.С.Будэ, Я.Г.Савула

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ПОЧАТКОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

І. Постановка задачі. Розглядаємо тонку оболонку як тривимірне тіло Z :

$$Z = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3): (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, -h \leq \alpha_3 \leq h\},$$

яке в недеформівному стані належить до криволінійної ортогональної системи координат α_i ($i=1, 2, 3$), де α_3 - лінія, перпендикулярна до середньої поверхні Ω оболонки, що є образом ω .

Нехай напружено-деформівний стан оболонки складається з "головного", що є рівноважним і характеризується малими деформаціями та скінченними переміщеннями, а також з "додавкового", якому

© Будэ І.С., Савула Я.Г., 1993

відповідають малі переміщення і деформації, що виникають в процесі відхилень оболонки від положення рівноваги.

Відповідно до зробленого припущення, подаємо вектор переміщень у вигляді суми

$$u = u^0 + \tilde{u}, \quad /1.1/$$

де індекс "0" - тут і надалі позначає "головний" стан, а "∼" - "додатковий".

Підставляємо вираз /1.1/ для вектора переміщень у співвідношення геометрично нелінійної теорії оболонок [3].

Нехтуючи квадратами величин "додаткового" стану як такими, що мають вищий порядок мализни порівняно з іншими величинами, запишемо повну лінеаризовану систему рівнянь динаміки попередньо навантаженої оболонки [2]:

$$\begin{aligned} C_0(\tilde{b}^*)^0 + \tilde{P} &= 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, \\ G_1(\tilde{b}^*)^0 &= \tilde{b}_r, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma_b, \\ G_2(\tilde{u}) &= \tilde{u}_r, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma_u, \end{aligned} \quad /1.2/$$

межа області $\omega - \Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_u$.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_0(\alpha_1, \alpha_2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_0(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad /1.3/$$

Тут

$$(\tilde{b}^*)^0 = \tilde{F}B[C_1 u^0 + \frac{1}{2}(C_\omega u^0)^T E_\omega C_\omega u^0] + F^0 B[C_1 \tilde{u} + (C_\omega u^0)^T E_\omega C_\omega \tilde{u}];$$

C_0, C_1, C_ω - матриці диференціальних операторів; $F^0, \tilde{F}, B, E_\omega$ - матриці констант; G_1, G_2 - матриці непрямих косинусів /вигляд цих матриць наведений у праці [3]/; $\tilde{P}$ - вектор-стовпець зовнішнього навантаження та інерційних доданків "додаткового" стану; $\tilde{b}_r, \tilde{u}_r$ - вектори-стовпці відповідно граничних зусиль-моментів і переміщень.

2. Варіаційна постановка задачі. Розглянемо задачу про вільні коливання тонких оболонок. Зазначимо, що в даному випадку маємо однорідні граничні умови ($\tilde{b}_r = \tilde{u}_r = 0$), зовнішнє поверхневе навантаження відсутнє.

Подаємо вектор переміщень у вигляді

$$u(\alpha_1, \alpha_2, t) = \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\lambda t}, \text{ де } (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, t - \text{час.} /2.1/$$

Враховуючи зображення /2.1/, запишемо варіаційну постановку [2] для задачі про вільні коливання попередньо навантаженої оболонки:

$$\int_{\Omega} [C_i V + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} V]^T E_0 B [C_i \bar{u} + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \bar{u}] d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (C_{\omega} V)^T E_{\omega}^T G_8^0 C_{\omega} \bar{u} d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} V^T m \bar{u} d\Omega = 0. \quad /2.2/$$

Тут G_8^0 - матриця початкових зусиль-моментів [2]; V - діагональна матриця розмірності 5×5 , ненульовими елементами якої є функції V_i ($i = \overline{1,5}$), що задовольняють умови

$$V_i \in [W_2'(\Omega)]^5, \quad G_2 V_i = 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

3. Схема побудови чисельного розв'язку. Розглядаємо задачу про вільні коливання осесиметричних оболонкових конструкцій. У цьому випадку використовуємо циліндричну систему координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, зв'язок якої з декартовою визначається співвідношеннями:

$$x = \alpha_1 \cos \alpha_2, \quad y = \alpha_1 \sin \alpha_2, \quad z = \alpha_3, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1', \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi.$$

Для апроксимації розв'язку використовуємо квадратичні апроксимації за координатою α_1 і зображення сумою по повній системі тригонометричних функцій за координатою α_2 .

Відповідно до цього запишемо вектор переміщень $\bar{u}$:

$$\bar{u} = \sum_{m=0}^M \Phi_m(\alpha_2) \hat{u}(\alpha_1), \quad /3.1/$$

де $\hat{u}(\alpha_1) = N(\alpha_1) q$; q - вектор-стовпець вузлових значень вектора-функції $\hat{u}(\alpha_1)$; $\Phi_m(\alpha_2)$ - діагональна матриця розмірності 5×5 , ненульові елементи якої є такими:

$$\psi_m^{11} = \psi_m^{33} = \psi_m^{44} = \cos m\alpha_2, \quad \psi_m^{22} = \psi_m^{66} = \sin m\alpha_2; \quad /3.2/$$

$N(\alpha_1)$ - блоково-діагональна матриця координатних функцій /5/.

Матриця V має вигляд

$$V = \sum_{m=0}^M \Phi_m(\alpha_2) N(\alpha_1). \quad /3.3/$$

Підставляючи у варіаційне рівняння /2.2/ співвідношення /3.1/-/3.3/, отримуємо

$$\sum_{m=0}^M \left(\int_{\Omega} [C_i \Phi_m N + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \Phi_m N]^T E_0 B [C_i \Phi_m N + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \Phi_m N] \times \right. \\ \left. + \int_{\Omega} (C_{\omega} \Phi_m N)^T E_{\omega}^T G_8^0 C_{\omega} \Phi_m N d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} (\Phi_m N)^T m \Phi_m N d\Omega \right) q = 0. \quad /3.4/$$

де G_8^0 - матриця констант [5].

Відокремлюючи змінні α_1 і α_2 у рівнянні /3.4/ та виконуючи інтегрування, отримуємо матричну задачу на власні значення. Для розв'язування цієї задачі застосовуємо метод ітерацій у підпросторі /1/.

4. Чисельні приклади. 4.1. Розглядаємо процес вільних коливань круглої пластини радіусом R , яка попередньо рівномірно розтягується /отискається/ з торців зовнішнім зусиллям T_0 , залишаючись у стані статичної рівноваги. У даній задачі приймаємо, що $\alpha_1 = z$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = z$, $0 \leq z \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$.

На краю і в центрі пластини задані такі граничні умови:

головні: $u_1 = v_1 = w = 0$, $z = R$, $u_1 = v_1 = 0$, $z = 0$;

природні: $Q_1 = 0$, $z = 0$.

Розглядаємо осесиметричні коливання /у розкладі /3.1/ приймаємо, що $m = 0$ /.

Задачу розв'язуємо при таких параметрах:

$2h = 0,5 \text{ м}$, $E = 0,625 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,22$, $\rho = 0,245 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$,

$$\frac{2h}{R} = \frac{1}{20}.$$

Т а б л и ц я . 1

N_{el}	$T, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\omega_1, \text{Гц}$	$\delta, \%$	$\omega_2, \text{Гц}$	$\delta, \%$	$\omega_3, \text{Гц}$	$\delta, \%$
4	0	.12076E+02	0,013	.46560E+02	0,524	.10469E+03	3,12
	-10^8	.65944E+00	17	.38780E+02	0,8	.97082E+02	4
8	0	.12075E+02	0,001	.46335E+02	0,038	.10176E+03	0,231
	-10^8	.57166E+00	1	.38503E+02	0,05	.94010E+02	0,3
16	0	.12075E+02	0	.46319E+02	0,003	.10155E+03	0,017
	-10^8	.56540E+00	0,1	.38483E+02	0,004	.93778E+02	0,02
32	0	.12075E+02	0	.46317E+02	0	.10153E+03	0
	-10^8	.56500E+00	0,02	.38482E+02	0	.93763E+02	0,002
Анал.	0	.12075E+02	-	.46317E+02	-	.10153E+03	-
	-10^8	.56486E+00	-	.38482E+02	-	.93761E+02	-

У табл. 1 наведені перші три частоти ($\omega_i = \lambda_i / 2\pi$, $i = \overline{1,3}$), що отримані на різних скінченноелементних сітках при нульовому і близькому до критичного [4] навантаженнях. Наведені результати порівнюються з аналітичними. Слід зазначити, що вже при 8-елементному розбитті області серединної поверхні в напрямі α_1 досягається висока точність розв'язку, про що свідчить відносно похибка δ .

Т а б л и ц я 2

$T_1, \text{H/M}$	$\omega_1, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_2, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_3, \text{Гц}$	$\Delta, \%$
-10^8	.56540E+00	95	.38483E+02	17	.93778E+02	7
-10^7	.11473E+02	5	.45598E+02	1.6	.10080E+03	0.73
-10^6	.12016E+02	0.49	.46247E+02	0.15	.10147E+03	0.079
-10^5	.12069E+02	0.05	.46312E+02	0.015	.10154E+03	0.009
0	.12075E+02	0	.46319E+02	0	.10155E+03	0
10^5	.12081E+02	0.05	.46326E+02	0.015	.10155E+03	0
10^6	.12133E+02	0.48	.46390E+02	0.15	.10162E+03	0.073
10^7	.12645E+02	5	.47028E+02	1.5	.10229E+03	0.73
10^8	.168558E+02	40	.52962E+02	14	.10872E+03	7

Т а б л и ц я 3

$\frac{2h}{R}$	$\omega_i, \text{Гц}$	Аналітичний	8 елементів	4 елементи	k
$\frac{1}{20}$	ω_1	.12081E+02	.12081E+02	.12082E+02	3.515
	ω_2	.46325E+02	.46342E+02	.46568E+02	3.799
	ω_3	.10154E+03	.10177E+03	.10470E+03	3.751
$\frac{1}{100}$	ω_1	.25723E+01	.25723E+01	.25726E+01	3.944
	ω_2	.96334E+01	.96370E+01	.96858E+01	3.862
	ω_3	.21351E+02	.21403E+02	.22060E+02	3.762

Із табл. 2 можна бачити відносний вплив зовнішнього навантаження T_1 на частоти вільних коливань. Цей вплив характеризується параметром Δ , де

$$\Delta = \frac{|\omega_0^i - \omega_{T_1}^i|}{\omega_0^i} 100\%, \quad i = \overline{1,3},$$

ω_0^i - i -та частота нанавантаженої пластини; $\omega_{T_1}^i$ - i -та частота пластини, навантаженої зусиллям T_1 .

Дані у табл. 3 свідчать про залежність перших трьох частот від товщини пластини. У таблиці наведені значення коефіцієнта збіжності k , який визначається за формулою [8]

$$k = \frac{\ln|\omega_i^* - \omega_i^{2i}| - \ln|\omega_i^* - \omega_i^i|}{\ln 2i - \ln 1}, \quad i = \overline{1,3},$$

де ω_i - аналітичне значення i -ї частоти; $l = l_1/N$, l_1 - довжина пробігу α_1 ; N - кількість елементів; ω_i^1 - i -та частота, що отримана при розбитті на N елементів; ω_i^{21} - i -та частота, що отримана при розбитті на $\frac{N}{2}$ елементів.

Отримані значення коефіцієнта $\frac{N}{2}k$ добре узгоджуються з теоретичними, наведеними у праці [6]. Результати з табл. 3 одержані при $T_1 = 10^5$ Н/м.

4.2. Розглядаємо задачу про вільні коливання циліндра, закритого на одному з торців пластиною. Дана конструкція піддається рівномірному зовнішньому /внутрішньому/ тиску, що характеризується поверхневим зусиллям P_3 . Меридіанний переріз даної конструкції площиною $\varphi = \text{const}$ зображений на рис. 1.

Розглядатимемо осесиметричні коливання /у розкладі /3.1/ приймаємо, що $m=0$ /.

У точках A і C задачі такі граничні умови:
головні: $u_1 = \gamma_1 = 0$, $z = 0$, $u_1 = \gamma_1 = w = 0$, $z = R_1 + R_2$;
природні: $Q_1 = 0$, $z = 0$.

У точці B задані головні умови спряження [7]:

$$T_j u_{(j)} = T_k u_{(k)},$$

де T_j , T_k - матриці спряження j -ї та k -ї складових оболонкової конструкції /вигляд даних матриць наведений у праці [7]/; $u_{(j)}$, $u_{(k)}$ - вектори переміщень у вузлі спряження, записані для j -ї та k -ї складових відповідно.

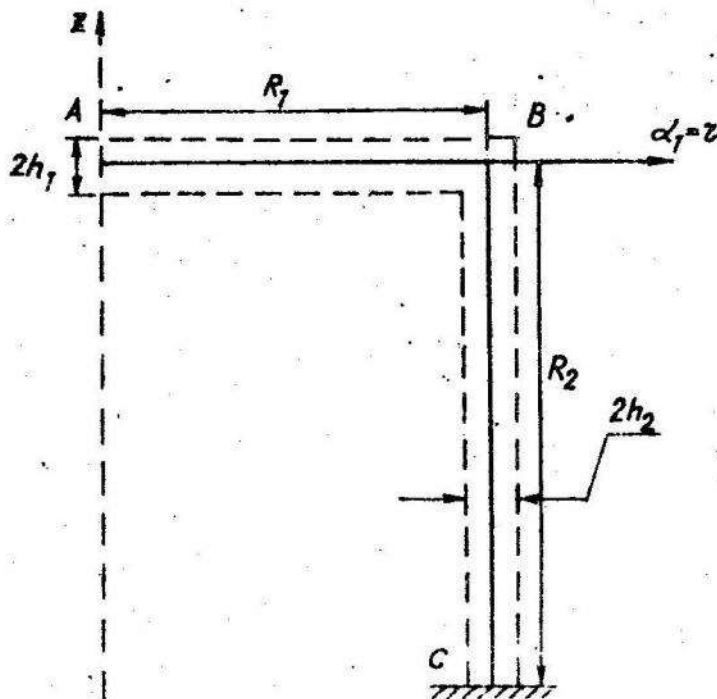


Рис. 1.

Задача розв'язана для таких фізико-геометричних характеристик:

$$2h_1 = 2h_2 = 0,5 \text{ м}, E = 0,625e+11 \text{ Н/м}^2, \nu = 0,22, \rho = 0,245e+04 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\ R_1 = R_2 = 10 \text{ м}.$$

Т а б л и ц я 4

$p_3 \cdot 10^6, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	$\omega_1, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_2, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_3, \text{Гц}$	$\Delta, \%$
4.85	.13975E+01	87	.50731E+02	26	.64436E+02	0.01
4.8	.38525E+01	63	.50607E+02	25	.64436E+02	0.01
4.7	.62434E+01	40	.50355E+02	24	.64436E+02	0.01
4.5	.90019E+01	13	.49837E+02	23	.64436E+02	0.01
4	.12443E+02	20	.48480E+02	20	.64436E+02	0.01
3	.14366E+02	38	.45711E+02	13	.64435E+02	0.01
1	.11907E+02	15	.41444E+02	2	.64431E+02	0.005
0.1	.10484E+02	1	.40563E+02	0.1	.64428E+02	0
0.01	.10385E+02	0.1	.40518E+02	0.01	.64428E+02	0
0	.10375E+02	0	.40513E+02	0	.64428E+02	0
-0.01	.10365E+02	0.1	.40509E+02	0.01	.64428E+02	0
-0.1	.10281E+02	1	.40474E+02	0.1	.64427E+02	0.002
-1	.10205E+02	1.6	.40570E+02	0.1	.64424E+02	0.006
-3	.14151E+02	36	.43905E+02	8	.64415E+02	0.02
-4	.16470E+02	59	.47116E+02	16	.64410E+02	0.03
-5	.17720E+02	71	.51146E+02	26	.64405E+02	0.04
-6	.15993E+02	54	.55360E+02	37	.62736E+02	3
-6.6	.11962E+02	15	.55999E+02	38	.61168E+02	5
-6.8	.56233E+01	45	.54938E+02	36	.61762E+02	4
-6.86	.14957E+01	86	.54624E+02	35	.61994E+02	4

У табл.4 наведені результати чисельного аналізу відносно впливу зовнішнього /внутрішнього/ тиску p_3 на перші три частоти коливань. Проаналізувавши отримані результати, можна стверджувати, що однакове за характером початкове зовнішнє навантаження по-різному впливає на різні частоти.

Результати з табл. 4 отримані при розбитті області на 16 скінченних елементів. Як бачимо, характер зміни першої і другої частот відрізняється від характеру зміни третьої частоти.

Це явище можна пояснити тим, що третій частоті відповідають круті форми коливань, у той час як перша і друга частоти характеризують осесиметричні коливання.

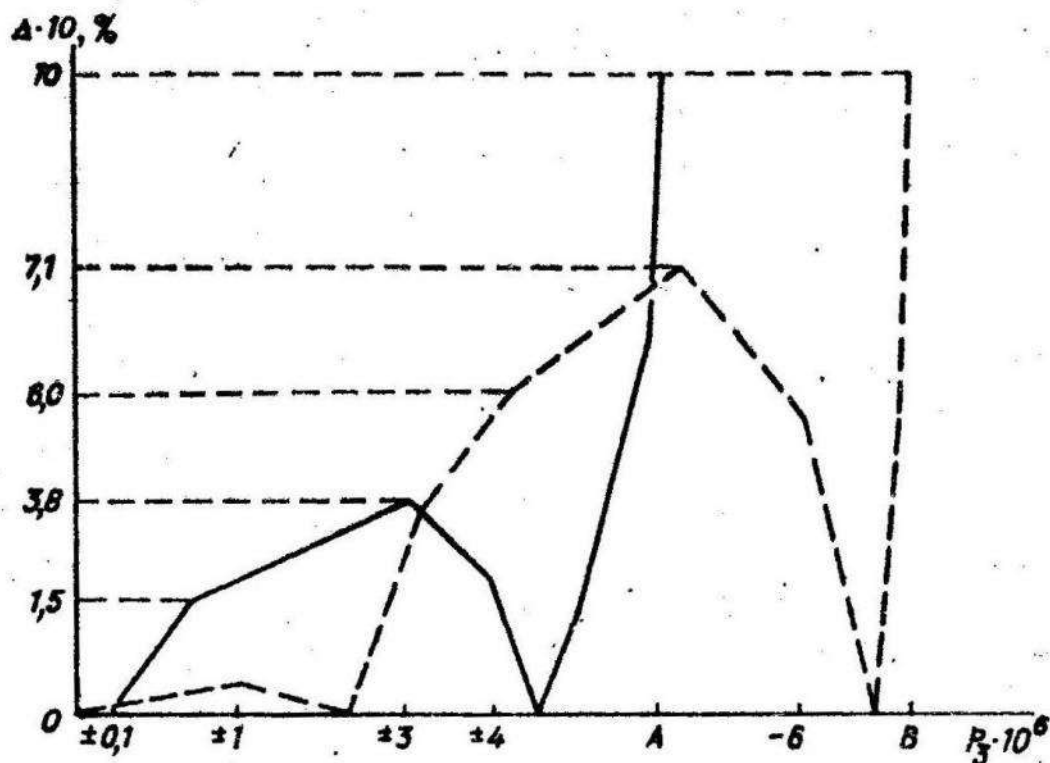


Рис. 2.

На рис. 2 подана залежність відносного впливу зовнішнього навантаження $P_3 - \Delta$ від цього навантаження для першої частоти ω_1 .

За графіком можна умовно розрізняти такі зони навантаження P_3 :

- зона малого впливу /від 0 до 10^5 Н/м^2 для внутрішнього тиску і від 0 до $-2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ для зовнішнього тиску/;
- критична зона, що характеризується різким спадом частоти до нуля. Для внутрішнього тиску це проміжок від $4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ до $4.86 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, для зовнішнього - від $-6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ до $-6.87 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

Як бачимо, при певному навантаженні можна досягти частоти, що й у випадку ненавантаженої оболонки /точки, де $\Delta = 0$, крім початку координат/.

Точки А / $4.86 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ / та В / $-6.87 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ / означають величину внутрішнього та зовнішнього тиску P_3 відповідно, при якому частота стає близькою до нуля, що призводить до втрати стійкості конструкції за першою формою коливань.

Зважаючи на те, що ділянка малого впливу - це діапазон навантажень в околі нуля, де $\Delta < 10 \%$, можемо зробити висно-

зок, що перша з трьох наведених частот є найчутливішою до даного навантаження, оскільки має найменшу зону малого впливу. Третя частота має найбільшу зону, тому є малочутливою до даного навантаження.

І. Б а т є К., В и л с о н Б. Численні методи аналізу і метод кінцевих елементів. М., 1982. 2. Б у д з И.С. Численний аналіз динаміки оболонок типу Тимошенка з урахуванням попереднього навантаження. Львів, 1992. 37 с. Рукопис деп. в УкрНИИДТИ 22.01.92, № 77-Ук92. 3. В а г і н П.П., М у х а І.С., С а в у л а Я.Г. Розв'язування геометрично нелінійних задач статичної оболонки типу Тимошенка методом скінчених елементів // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.31. С.67-74. 4. В о л ь м и р А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967. 5. К о с с а к О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях составных осесимметричных тел: Автореф.: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1991. 6. Р и к а р д с Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига, 1988. 7. С а в у л а Я.Г. Задачи механики деформирования оболочек с резными срединными поверхностями: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Львов, 1984. 8. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов: Учеб. пособие. Львов, 1981.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.93

УДК 536.2

Н.П.Флейшман

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВОГО СПРЯЖЕННЯ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ТОНКИМИ ЧУЖОРІДНИМИ ПРОШАРКАМИ АБО ПОКРИТТЯМИ

Для визначення нестационарних полів температур у середовищах з клейовими з'єднаннями, в композитах з міжфазними прошарками під час теплопередачі через поверхневу плівку або під час охолодження рідини в тонкостінних посудинах тощо необхідно вивести відповідні умови спряження середовищ.

І. Узагальнені умови спряження /УУС/. Розглянемо з'єднання двох просторових тіл "1" і "2" за допомогою тонкого ізотропного криволінійного чужорідного шару сталої товщини $2h$. Віднесемо цей шар оболонкового типу до змішаної триортogonalної системи координат α, β, γ , де α, β - лінії кривизни серединної поверхні шару, вісь γ направлена по нормалі до неї. Припустимо, що на поверхнях $\gamma = \pm h$, уздовж яких прошарок спрягається з

© Флейшман Н.П., 1993