зок, що перша з трьох наведених частот є найчутливішою до даного навантаження, оскільки має найменшу зону малого впливу. Третя частота має найбільшу зону, тому є малочутливою до даного навантаження.

1. Б а т э К., В и л с о н Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982. 2. Б у д з И.С. Численный анализ динамики оболочек типа Тимошенко с учетом предварительного нагружения. Львов, 1992. 37 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.01.92, № 77-Ук92. 3. В а г і н П.П., М у х а І.С., С а в у л а Я.Г. Розв"язування геометрично нелінійних задач статики оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.31. С.67-74. 4. В о л ь м и р А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967. 5. К о с с а к О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях составных осесимметричных тел: Автореф.: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1991. 6. Р и к а р д с Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига, 1988. 7. С а в у л а Я.Г. Задачи механики деформирования оболочек с разными срединными поверхностями: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Львов, 1984. 8. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов: Учеб. пособие. Львов, 1981.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.93

УДК 536.2

Н.П.Флейшман

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВОГО СПРЯЖЕННЯ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ТОНКИМИ ЧУЖОРІДНИМИ ПРОШАРКАМИ АБО ПОКРИТТЯМИ

Для визначення нестаціонарних полів температур у середовищах з клейовими з"єднаннями, в композитах з міжфазними прошарками під час теплопередачі через поверхневу плівку або під час охолодження рідини в тонкостінних посудинах тощо необхідно вивести відповідні умови спряження середовищ.

1. Узагальнені умови спряження /УУС/. Розглянемо з"єднання двох просторових тіл "1" і "2" за допомогою тонкого ізотропного криволінійного чужорідного шару сталої товщини $2h$. Віднесемо цей шар оболонкового типу до змішаної триортогональної системи координат α, β, γ, де α, β - лінії кривизни серединної поверхні шару, вісь γ напрямлена по нормалі до неї. Припустимо, що на поверхнях $\gamma = \pm h$, уздовж яких прошарок спрягається з

тілами "I" і "2", виконуються умови неідеального теплового контакту [2]:

$$T(-h)=T^-+F_1\lambda_1\frac{\partial T^-}{\partial\gamma},\quad T(h)=T^+-F_2\lambda_2\frac{\partial T^+}{\partial\gamma}\qquad /1/$$

та умови рівності теплових потоків:

$$\lambda\frac{\partial T(-h)}{\partial\gamma}=\lambda_1\frac{\partial T^-}{\partial\gamma},\qquad \lambda\frac{\partial T(h)}{\partial\gamma}=\lambda_2\frac{\partial T^+}{\partial\gamma},\qquad /2/$$

де $T\equiv T(\alpha,\beta,\gamma,t)$ - температура; T^- і T^+ - відповідні температури тіл "I" і "2" на поверхнях $\gamma=\pm h$; F_i, λ_i -коефіцієнти поверхневого термічного опору контакту та коефіцієнти теплопровідності / i = I,2/; λ - коефіцієнт теплопровідності прошарку. Припустимо також, що вся система рухається зі швидкістю $\vec{u}$.

Для виведення умов теплового спряження тіл за допомогою з"єднувального прошарку, аналогічно [6], дискретизуємо область, яку він займає, лише вздовж осі γ, беручи три точки $\gamma=0$, $\gamma=\pm h$. Лінійне рівняння нестаціонарної теплопровідності для рухомого тривимірного середовища за відсутності джерел тепла записуємо лише для точок поверхні $\gamma=0$ [3]:

$$\Phi(T)+\frac{\partial^2T}{\partial\gamma^2}+2K\frac{\partial T}{\partial\gamma}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t},\qquad /3/$$

де

$$\Phi(T)=\Delta T-\frac{1}{a}\left(\frac{u_1}{A_1}\frac{\partial T}{\partial\alpha}+\frac{u_2}{A_2}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right);\qquad 2K=\kappa_1+\kappa_2-\frac{u_3}{a},$$

$$\Delta=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right],\qquad /4/$$

a - коефіцієнт температуропровідності; t - час; A_1, A_2 - коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $\gamma=0$; κ_1, κ_2 - її головні кривини; u_1, u_2, u_3 - фізичні координати вектора швидкості $\vec{u}$ в локальній системі координат α, β, γ, які за відомими формулами [5] виражаються через координати того ж вектора у прямокутній декартовій системі координат.

Заміняючи з точністю $O(h^2)$ похідні по γ їх симетричними та несиметричними скінченнорізницевими аналогами відповідно у /3/ та /1/ і /2/, після елементарних перетворень одержуємо

$$(1+2Kh)\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial T^+}{\partial\gamma}-(1-2Kh)\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial T^-}{\partial\gamma}=h\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\Phi\right)\left[(T^++T^-)+\left(F_1\lambda_1\frac{\partial T^-}{\partial\gamma}-F_2\lambda_2\frac{\partial T^+}{\partial\gamma}\right)\right],\qquad /5/$$

$$(T^+-T^-)-\left(F_2\lambda_2\frac{\partial T^+}{\partial\gamma}+F_1\lambda_1\frac{\partial T^-}{\partial\gamma}\right)-h\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial T^-}{\partial\gamma}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial T^+}{\partial\gamma}\right)=0.$$

Умови /5/, які зв"язують між собою величини T^-, T^+ та їх похідні, служать математичною моделлю теплового спряження двох рухомих середовищ "I" і "2" за допомогою тонкого прошарку з іншого матеріалу. Ці умови дають змогу не розглядати прошарок, а лише опосередковано врахувати його вплив /на розподіл температур/, який характеризується його теплофізичними та геометричними параметрами.

Після розв"язування нестаціонарної задачі теплопровідності для тіл "I" і "2" з використанням УУС /5/ можна визначити також температуру в трьох точках по товщині прошарку: у точках $\gamma = \pm h$ за формулами /I/, у точці $\gamma = 0$ – за формулою:

$$T(0) = \frac{1}{2}\left(T^+ + T^-\right) + \frac{1}{4}\left[\left(2F_1 + \frac{h}{\lambda}\right)\lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial \gamma} - \left(2F_2 + \frac{h}{\lambda}\right)\lambda_2 \frac{\partial T^+}{\partial \gamma}\right]. \qquad /6/$$

2. <u>Узагальнена гранична умова /УГУ/</u> для тіла з тонким покриттям. Нехай тіло "2" відсутнє, а на поверхні покриття $\gamma = h$ відбувається "лінійна теплопередача в середовище з температурою T_c" [I] за законом

$$\lambda \frac{\partial T(h)}{\partial \gamma} + \alpha\left[T(h) - T_L\right] = 0, \qquad /7/$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; $T_L = T_c + Q/\alpha$ (Q – тепловий потік, який задається на поверхні $\gamma = h$). При $Q = 0$ із закону /7/ одержуємо закон Ньютона.

Вилучаючи T^+ з умов /5/, з урахування /I/, /2/, та /7/, виводимо УГУ /з точністю $O(h^2)$ / для тіла з тонким покриттям завтовшки $2h$, яка при $F_1 = F_2 = 0$ має вигляд

$$\alpha(1 + 2Kh)(T^- - T_L) + \left(1 - 2Kh + \frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial \gamma} + 2h\lambda\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} - \Phi\right)T^- = 0. \qquad /8/$$

3. <u>Часткові випадки.</u> Для деяких часткових випадків наведемо відповідні УУС та УГУ при $F_1 = F_2 = 0$, $Q = \bar{u} = 0$.

3.I. Плоска задача для тіла з циліндричним прошарком $\left(\frac{\partial}{\partial \beta} = 0,\ A_2 = 1,\ A_1 d\alpha = ds,\ K_2 = 0\right)$:

$$(1 + K_1 h)\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial T^+}{\partial \gamma} - (1 - K_1 h)\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial T^-}{\partial \gamma} = h\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)(T^+ + T^-),$$

$$T^+ - T^- = h\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial T^-}{\partial \gamma} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial T^+}{\partial \gamma}\right).$$

3.2. Плоска задача для циліндра з тонким покриттям:

$$\alpha(1+2k_1h)(T^- - T_c)+\left(1-2k_1h+\frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\lambda_1\frac{\partial T^-}{\partial \gamma}+2h\lambda\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)T=0.$$

3.3. Плоский прошарок у просторовому тілі $(A_1=A_2=1,\ K=0)$:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial T^+}{\partial \gamma}-\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial T^-}{\partial \gamma}=h\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)(T^+ + T^-),\quad T^+ - T^- = h\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial T^-}{\partial \gamma}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial T^+}{\partial \gamma}\right).$$

3.4. Плоска задача для півпростору з покриттям на межі $\gamma=-h$, $(A_2=1,\ A_1 d\alpha = dx,\ k_2=0,\ \partial/\partial\beta=0)$:

$$\left(1+\frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\lambda_1\frac{\partial T^-}{\partial \gamma}+\left[\alpha+2h\lambda\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]T^- = \alpha T_c.$$

3.5. Осесиметрична задача для порожнистого кругового циліндра з покриттям на поверхнях $r=c$ та $r=b$ $(c \le r \le b$, r -відстань точки від осі Ox циліндра; $R_2=b+h$, $R_1=c-h$, $\frac{\partial}{\partial\beta}=0$, $\alpha=x)$:

$$(1+h/R_2)(T-T_c)\alpha+\left(1-\frac{h}{R_2}+\frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\left(\lambda_1\frac{\partial T}{\partial r}\right)+$$

$$+2h\lambda\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)T=0. \qquad \text{при } r=b,$$

$$(1-h/R_1)\alpha(T-T_c)-\left(1+\frac{h}{R_1}+\frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\lambda_2\frac{\partial T}{\partial r}+2h\lambda\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)T=0$$

при $r=c$.

3.6. Центрально-симетрична задача для кулі радіусом R_0 з тонким покриттям / $\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\beta}=0$, R - відстань точки від центра кулі/:

$$\alpha\left(1+\frac{2h}{R_0}\right)(T-T_c)+\left(1+\frac{2h}{R_0}+\frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\lambda_1\frac{\partial T}{\partial R}+\frac{2h\alpha}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=0$$

при $R=R_0$. /9/

3.7. Одновимірна задача охолодження рідкої речовини через тонку плівку $(T_c=0,\ x>0,\ K=0,\ \Delta\equiv 0)$:

$$\left(1+\frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x}-\left(\alpha+\frac{2h\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)T=0 \quad \text{при } x=0.$$

4. Для прикладу розглянемо задачу теплопровідності для кулі з тонким покриттям. У момент часу $t=0$ куля радіусом R_0 з тонким покриттям занурюється в середовище з температурою T_c.

Початкова температура кулі дорівнює $f(R)$. Диференціальне рівняння задачі має вигляд [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[RT(R,t)\right]=a\,\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[RT(R,t)\right]. \qquad /10/$$

Інтегруючи рівняння /10/ при УГУ /9/ методом розділення змінних [5], знаходимо температуру кулі:

$$T(R,t)\,T_c+\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(\varkappa_n R)e^{-a\varkappa_n^2 t},$$

де $\varkappa_n$ – корені рівняння

$$\operatorname{tg}\varkappa R_0+\beta\varkappa R_0=0,$$

$$\beta=\left(1-\frac{4h}{R_0}+\frac{2h\alpha}{\lambda}\right)\Big/\left[\frac{4h}{R_0}-1-\frac{2h\alpha}{\lambda}-(2h\lambda\varkappa^2-\alpha)R_0/\lambda_1\right];$$

$$C_n=-\int_0^{R_0}\left[f(R)-T_c\right]u_n(R)R\,dR\Big/\int_0^{R_0}\sin(\varkappa_n R)u_n(R)\,dR,$$

$u_n(R)$ – ортонормована до системи функцій $\sin(\varkappa_n R)$ послідовність функцій, яка будується за відомим процесом ортогоналізації Грама-Шмідта [3].

Примітка. Аналогічно виводять УУС та УГУ для середовищ, поведінка яких описується рівнянням

$$a\Delta\Phi+\varkappa^2\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+a_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\bar{u}\operatorname{grad}\Phi,$$

яке залежно від значень своїх коефіцієнтів моделює різноманітні процеси та явища /теплопровідність з урахуванням скінченної швидкості поширення тепла, поширення звукових та електромагнітних хвиль, задачі електростатики та магнітостатики, дифузії, фільтрації, коливання мембран, кручення та згинання призматичних стержнів тощо [1, 4].

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 2. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М., 1975. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1973. 4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962. 5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 6. Флейшман Н.П. Нелінійна модель спряження деформівного середовища з тонким прошарком // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.35.С.42-47.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.93