УДК 518.517:948

Я.С.Герасим, Б.А.Остудін

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ В ОБЛАСТЯХ ЗІ СКЛАДНОЮ ГЕОМЕТРІЄЮ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ АЛГОРИТМУ ШВАРЦА

В основі розрахунку електронно-променевих приладів лежить задача визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів. Будуючи відповідну математичну модель, доцільно зображати такі електроди у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задаються граничні значення потенціалу.

Досвід розв"язування багатьох практичних задач показав ефективність методу інтегральних рівнянь /ІР/, оскільки його застосування пов"язане з визначенням невідомих величин лише на межі області. Однак часто виникає потреба розв"язувати задачі в областях зі складною геометрією граничних поверхонь. Ця обставина суттєво ускладнює традиційне застосування методу ІР, причому особливі проблеми виникають у випадку наявності безмежних поверхонь. Використання алгоритму Шварца дає змогу отримати розв"язок в області, утвореній перетином ряду областей, у кожній з яких розв"язок відповідної задачі можна знайти за допомогою методу ІР.

Таким чином, згадана проблема зводиться до послідовності простіших. Це дає змогу отримати розв"язок з довільною наперед заданою точністю.

Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ міститься n замкнених поверхонь Σ_K $(K=1,2,\dots,n)$, які не мають спільних точок. Введемо такі позначення: $\Sigma = \bigcup\limits_{K=1}^{n} \Sigma_K$; Ω_K^+ – область, обмежена поверхнею Σ_K; $\Omega_K^- = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_K$, де $\bar{\Omega}_K^+ = \Omega_K^+ \cup \Sigma_K$; $\Omega^+ = \bigcup\limits_{K=1}^{n} \Omega_K^+$; $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}^+$, де $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup \Sigma$; M, N, P і т.д. – точки в $\mathbb{R}^3$. Припустимо, що в необмеженій області Ω_m^- міститься сукупність гладких розімкнених поверхонь $S = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$, які не мають спільних точок. Нехай $S_i = S_i \cup \partial S_i$, $\bar{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \bar{S}_i$.

Дана класифікація поверхонь є умовною і застосовується лише для спрощення формулювання проблеми. Усі поверхні розділяють не за принципом "замкнені-незамкнені", а виходячи з умови існування функції Гріна для диференціального оператора відповідної задачі.

Тому, строго кажучи, до першого типу поверхонь можна віднести також деякі незамкнені і навіть необмежені у просторі поверхні.

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими у просторі і незмінними в часі електростатичними зарядами, розподіленими по поверхнях Σ та S. Потрібно визначити потенціал $U(P)$ в області $\Omega^- \setminus \bar{S}$, якщо на поверхнях виконуються граничні умови першого роду.

При постановці граничної задачі будемо враховувати узагальнене трактування її розв"язку, а також специфічне задання граничних умов. Це потрібне для розширення сфери застосування отриманих результатів, а також з огляду на умови використання необхідного математичного апарату інтегральних рівнянь.

Визначимо функцію $U(P) \in H^1(\Omega^- \setminus \bar{S}, \Delta)$, яка задовольняє такі умови:

$$\Delta U(P) = 0, \qquad P \in \Omega^- \setminus \bar{S}; \tag{1}$$

$$\gamma_0^- U(P) = g_0(P), \quad P \in \Sigma; \tag{2}$$

$$\gamma_0^{\pm} U(P) = g_{\pm}(P), \quad P \in S; \tag{3}$$

$$\lim_{|P| \to \infty} U(P) = 0, \tag{4}$$

де $H^1(\Omega^- \setminus \bar{S}, \Delta) = \{U(P) \mid U(P) \in H^1(\Omega^- \setminus \bar{S}), \Delta U(P) \in L_2(\Omega^- \setminus \bar{S})\}$

$\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(\Sigma)$, $\gamma_0^{\pm} : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(S)$

– оператори сліду, причому $H^1(\Omega^-) = \{U(P) \mid U(P), |\nabla U(P)| \in L_2(\Omega^-)\}$. Нагадаємо, що деякі з поверхонь Σ_k можуть бути необмеженими в просторі, але їх розміщення в $\mathbb{R}^3$ має передбачати існування необмеженої області Ω^-. Припустимо, також, що $g_0(P) \in H^{1/2}(\Sigma)$, $g_{\pm}(P) \in H^{1/2}(S)$ – задані функції. Поставлена задача називається задачею Діріхле в просторі зі щілинами.

Для побудови наближеного розв"язку задачі /1/–/4/ скористаємося методом Шварца [4]. Припустимо, що вміємо розв"язувати задачу Діріхле для кожної області Ω_k^- $(k = 1, 2, \ldots, n)$ при заданих граничних умовах на Σ_k та S_{k_i}; де k_i пробігає деяку підмножину значень індекса з множини $\{1, 2, \ldots, m\}$. Покажемо, яким чином можна при цьому розв"язати задачу Діріхле для області Ω^-. Ідея методу полягає у якомога кращому наближенні шуканої функції $U(P)$ шляхом розв"язання послідовності задач Діріхле для областей Ω_k^- та вибору спеціальним чином граничних умов на кожному кроці ітераційного процесу.

Згідно з алгоритмом Шварца, на i-му / $i = 1,2,3,\dots$/ кроці ітераційного процесу для всіх K знаходимо функції $U_{iK}(P) \in H^1(\Omega_K^- \setminus \bar{S}^K, \Delta)$, які задовольняють такі умови:

$$\Delta U_{iK}(P) = 0, \qquad P \in \Omega_K^- \setminus \bar{S}^K; \qquad /1'/$$

$$\gamma_0^- U_{iK}(P) = -\sum_{j=1, j\neq K} \gamma_0^- U_{i-1,j}(P), \quad P \in \Sigma_K; \qquad /2'/$$

$$\gamma_0^\pm U_{iK}(P) = -\sum_{j=1, j\neq K} \gamma_0^\pm U_{i-1,j}(P), \quad P \in S^K; \qquad /3'/$$

$$\lim_{|P|\to\infty} U_{iK}(P) = 0, \qquad P \in \Omega_K^-, \qquad /4'/$$

де $S^K = \bigcup_{i=1}^{m_K} S_{Ki}$; $\sum_{K=1}^{n} m_K = m$;

функції $U_{0K}(P)$ є розв"язками задачі /1'/ - /4'/ з граничними умовами $g_0(P)$, $g_\pm(P)$ відповідно на поверхнях Σ_K та S^K.

Таким чином, кожна функція $\sum_{l=0}^{i} U_{lK}(P)$ є узагальненим розв"язком рівняння Лапласа у відповідній області $\Omega_K^- \setminus \bar{S}^K$ і задовольняє в ній умову на безмежності /4'/, а також граничні умови:

$$\sum_{l=0}^{i} \gamma_0^- U_{lK}(P) = g_0(P) - \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{j=1, j\neq K}^{n} \gamma_0^- U_{lj}(P), \quad P \in \Sigma_K; \qquad /5/$$

$$\sum_{l=0}^{i} \gamma_0^\pm U_{lK}(P) = g_\pm(P) - \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{j=1, j\neq K}^{n} \gamma_0^\pm U_{lj}(P), \quad P \in S^K. \qquad /6/$$

Перетворемо рівності /5/ та /6/ до вигляду

$$\sum_{l=0}^{i-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_0^- U_{lj}(P) = g_0(P) - \gamma_0^- U_{iK}(P), \quad P \in \Sigma_K, \qquad /7/$$

$$\sum_{l=0}^{i-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_0^\pm U_{lj}(P) = g_\pm(P) - \gamma_0^\pm U_{iK}(P), \quad P \in S^K, \quad K = 1,2,\dots,n. \qquad /8/$$

У праці [4] показано, що при безмежному зростанні i всі функції $U_{iK}(P)$ рівномірно в замкненій області Ω^- прямують до нуля, якщо виконується умова

$$(n-1)q < 1,$$

де константа q не залежить від граничних умов $g_0(P)$ і $g_\pm(P)$ та визначається лише геометрією області Ω^-, причому $0 < q < 1$. Таким чином, з рівностей /7/ та /8/ випливає, що неперервна функція

$$U(P) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} U_{ij}(P), \qquad P \in \Omega^- \setminus \bar{S}$$

дає розв"язок задачі /1/-/4/.

Як було відзначено, на кожному кроці ітераційного процесу необхідно розв"язувати задачі Діріхле типу /1/-/4/ для всіх областей Ω_K^-. Очевидно, що проблема зводиться до часткового випадку загальної постановки, коли задана лише одна поверхня Σ. Вважатимемо, що для області Ω^- існує функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа. Тому, відповідно до [1, 2], розв"язок задачі типу /1/-/4/ шукатимемо у вигляді $U_1(P)+U_2(P)$, де функції U_1 та U_2 - розв"язки таких задач:

$$\Delta U_1(P)=0, \qquad P\in\Omega^-; \qquad /9/$$

$$\gamma_0^- U_1(P)=g_0(P), \quad P\in\Sigma; \qquad /10/$$

$$\lim_{|P|\to\infty} U_1(P)=0; \qquad /11/$$

$$\Delta U_2(P)=0, \qquad P\in\Omega^-\setminus\bar{S}; \qquad /12/$$

$$\gamma_0^- U_2(P)=0, \quad P\in\Sigma; \qquad /13/$$

$$\gamma_0^{\pm} U_2(P)=g_{\pm}(P)-U_1(P)\overset{df}{=}d_{\pm}(P), \quad P\in S; \qquad /14/$$

$$\lim_{|P|\to\infty} U_2(P)=0. \qquad /15/$$

Відомо [5], що розв"язок задачі /9/-/11/ зображається у вигляді

$$U_1(P)=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M}g_0(M)dS_M,$$

де $G(P,M)$ - функція Гріна оператора Лапласа для області Ω^-. Таким чином, визначення шуканої функції зводиться до розв"язування задачі /12/-/15/. У зв"язку з цим справедлива така теорема [2, 3].

Теорема I. Якщо розв"язок задачі /12/-/15/ існує, то його з необхідністю зображають у вигляді

$$U_2(P)=\iint_S G(P,M)\tau(M)dS_M-U_0(P), \quad P\in\Omega^-\setminus\bar{S}, \qquad /16/$$

де $U_0(P)=\iint_S\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M}[d(M)]dS_M$; $\tau(M)$ - розв"язок ІР Фредгольма першого роду:

$$K\tau=\iint_S G(P,M)\tau(M)dS_M=g(P), \quad P\in S, \qquad /17/$$

причому $g(P)=\frac{1}{2}\left[d_-(P)+d_+(P)\right]+U_0(P)$.

Тут $\left[d(M)\right]^{df}=d_-(M)-d_+(M)\in H_{00}^{1/2}(S)$;

$H_{00}^{1/2}(S)=\left\{U(P)\,|\,U(P)\in H^{1/2}(S),\quad \omega^{-\frac{1}{2}}U\in L_2(S)\right\}$,

де $\omega(P)$ – достатньо гладка функція, яка перетворюється в нуль при підході до ∂S як $dist(P,\partial S)$. І навпаки, якщо $\tau\in\left(H^{1/2}(S)\right)'$ – розв"язок рівняння /I7/, то функція $U_2(P)$, яка задається виразом /I6/, є розв"язком задачі /I2/-/I5/.

Сформульована теорема встановлює еквівалентність диференціальної задачі /I2/-/I5/ та двовимірного ІР /I7/. Важливим є питання єдиності розв"язку /I7/, яке пов"язане з дослідженням єдиності розв"язку задачі /I2/-/I5/. Справедливою є також така теорема [2, 3].

<u>Теорема 2.</u> Задача /I2/, /I3/, /I5/ з однорідною граничною умовою $\gamma_0^{\pm}U_2(P)=0,\qquad P\in S$ має лише тривіальний розв"язок.

<u>Наслідок.</u> Якщо $K\tau=0$, то $\tau(P)=0$ на S.

<u>Теорема 3.</u> Оператор $K:\left(H^{1/2}(S)\right)'\longrightarrow H^{1/2}(S)$ – ізоморфізм.

Таким чином, задача /I2/-/I5/ за допомогою інтегрального зображення /I6/ зведена до еквівалентного ІР Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі /I7/, яке має єдиний розв"язок.

Для практичної реалізації описаного алгоритму розглядали задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного системою, яка складалася з двох заряджених пластин та двох сфер. Пластини S_1 та S_2 вибирали у вигляді трапецій з такими координатами вершин: S_1 – /0,4; -0,25; -0,4/, /0,4; 0,25; -0,4/,/-0,4;0,I5;-0,2/; /-0,4; -0,I5; -0,2/ /0,4; -0,25; 0,4/; /0,4; 0,25; 0,4/; /-0,4; 0,I5; 0,2/; /-0,4; -0,I5; 0,2/.

Радіуси сфер Σ_1 та Σ_2 становили 0,05 і 0,I відповідно з центрами у точках /-0,2; 0; -0,I/ і /0,I5; 0; 0,I/. Граничні значення потенціалу на кожній поверхні вважали сталими:

$$g_{\pm}(P)=\begin{cases}-1, & P\in S_1;\\ 1, & P\in S_2;\end{cases}$$

$$g_0(P)=\begin{cases}-0{,}5, & P\in\Sigma_1;\\ 0{,}5, & P\in\Sigma_2.\end{cases}$$

Задачу розрахунку поля розбивали на дві задачі зі сферою та пластиною. Отримані при розв"язуванні вказаних задач ІР типу /I7/ зводили за допомогою методу саморегуляризації до ІР Фредгольма другого роду, які розв"язували методом колокації. При цьому для апроксимації розв"язку рівнянь використовували білінійні, фінітні в області інтегрування функції.

Потенціал електростатичного поля після виконання дев"яти ітерацій в окремих точках розглядуваної системи характеризується такими значеннями: U /0,I; 0; 0/ = 0,I9; U /0; 0; -0,2/ = = -0,I7, U /0; 0; 0,2/ = 0,039.

Слід відзначити, що кількість ітерацій у методі Шварца не залежить від граничних умов /2/, /3/, а визначається лише геометрією області Ω^-. Причому при збільшенні відстані між граничними поверхнями різних задач кількість ітерацій зменшується. Зауважимо також, що аналогічно можна побудувати розв"язок задачі Діріхле у випадку, коли область Ω^+ є обмеженою областю із зовнішньою межею Σ_1 і внутрішніми межами $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$. При цьому для області Ω_1^+, обмеженої поверхнею Σ_1, отримуємо внутрішню задачу Діріхле, а для областей Ω_k^- $(k = 2, \ldots, n)$, як і вище, зовнішні задачі Діріхле.

I. Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Дослідження розв"язку однієї задачі електростатики на основі функцій Гріна і методу інтегральних рівнянь // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С.63-68. 2. Кичура С.М., Остудин Б.А., Сибиль Ю.Н. Исследование одной математической модели, описывающей пространственное электростатическое поле // Теорет. электротехника. 1990. Вып. 49. С.132-139. 3. Сибиль Ю.Н. Существование решения двумерных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений первого рода теории потенциала, заданных не гладком многообразии с краем. Львов, 1990. 17 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 21.09.1990, № 856-Ук90. 4. Смирнов В.И. Курс высшей математики: В 4 т. М., 1981. Т.4. Ч.2. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1966.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.93