

І.І.Дияк, А.Ю.Чернуха

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
НА ОСНОВІ КОМБІНАЦІЇ МЕТОДІВ ГРАНИЧНИХ
ТА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

Побудова та використання комбінованих схем методу скінченних /МСЕ/ та граничних /МГЕ/ елементів значно підвищує ефективність застосування чисельних методів для широкого кола задач математичної фізики [4, 6]. У даній праці розроблена чисельна схема та алгоритм комбінованого підходу для розв'язання двовимірних задач теорії пружності.

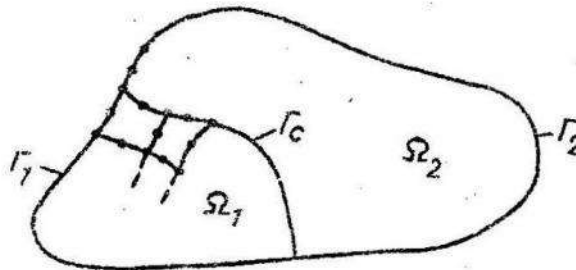


Рис. 1.

Розглянемо ізотропне пружне тіло /рис. 1/, яке займає двовимірну область Ω з межею Γ . Нехай Ω_1 та Ω_2 - підобласті Ω , такі що $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$; $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$; $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_c$ - межа Ω_1 ; $\partial\Omega_2 = \Gamma_2 \cup \Gamma_c$ - межа Ω_2 .

1. Розв'язок задачі теорії пружності для області Ω_1 шукаємо на основі мінімізації функціоналу Лагранжа, зображеного у вигляді

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} u^T B^T D B u d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} u^T t d\Gamma - \int_{\Gamma_c} u^T t d\Gamma, \quad /1/$$

де $u = (u_1, u_2)^T$ - вектор з компонент допустимих переміщень із простору $H = \{u = (u_1, u_2)^T : u_i = g_i, x \in \partial\Omega_1', u_i \in W_1'(\Omega)\}$;

$\partial\Omega_1'$ - та частина межі Γ_1 , на якій задані граничні умови на переміщення, тобто $u_i = g_i$, $i = 1, 2$; $\partial\Omega_1''$ - частина Γ_1 із заданим поверхневим навантаженням;

$$\sum_{j=1}^2 \partial_{ij} n_j = t_i, \quad i = 1, 2;$$

$t = (t_1, t_2)^T$ - вектор із компонент поверхневих сил; $n_j = \cos(n, x_j)$ - компоненти одиничної нормалі до поверхні; Γ_c - спільна межа областей Ω_1 і Ω_2 .

$$B = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad D = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu_1)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1}{2} \end{bmatrix}$$

де B - матриця диференціальних операторів; D - матриця пружності відповідно; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $\nu_1 = \nu$ - для плоского напруженого стану, $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$ - для випадку плоскої деформації.

Виконуємо дискретизацію області Ω_1 на чотирикутні скінченні елементи. Апроксимуємо переміщення на кожному з них:

$$u_j = \sum \psi_i u_{ji}, \quad j = 1, 2. \quad /2/$$

Тут u_{ji} - значення j -ї компоненти переміщення в i -му вузлі елемента; $\psi_i = \psi_i(\alpha, \beta)$ - координатна функція i -го вузла. Невідомі поверхневі сили, які входять у третій доданок /1/ апроксимуємо на Γ_c аналогічно /2/:

$$t_j = \sum \psi_i t_{ji}, \quad j = 1, 2. \quad /3/$$

Тут t_{ji} - значення j -ї компоненти поверхневої сили в i -му вузлі. Підставляємо співвідношення /2/ і /3/ у функціонал /1/ і сумуємо по всіх скінчених елементах. З умови мінімуму функціоналу $\delta \Pi = 0$ одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$KU = R, \quad /4/$$

де K - прямокутна /ге рахунок невідомих поверхневих сил на межі об'єкту/ матриця жорсткості системи; R - вектор навантаження; $U = (u_1, \dots, u_{2N}, t_1, t_2, \dots, t_{2l})^T$ - вектор шуканих переміщень і поверхневих сил на межі спряження; N - кількість вузлів області Ω_1 ; l - кількість вузлів на межі спряження.

2. Для межі області Ω_2 запишемо граничне інтегральне рівняння, на якому базуються співвідношення прямого МГЕ [2]:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\partial\Omega_2} F_{ij}(x, \xi)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\partial\Omega_2} G_{ij}(x, \xi)t_j(x)d\Gamma(x), \quad i, j=1, 2, \quad /5/$$

де $\xi = \xi(x_1, x_2) \in \partial\Omega_2$ - точка навантаження; $x = x(x_1, x_2) \in \partial\Omega_2$ - точка області; $u_j(x)$ і $t_j(x)$ - відповідно переміщення і поверхневі сили; $F_{ij}(x, \xi)$ і $G_{ij}(x, \xi)$ - фундаментальні розв'язки задачі Кельвіна [2]. Коefіцієнти матриці $C_{ij}(\xi)$ залежать лише від локальної геометрії межі $\partial\Omega_2$. Якщо $\partial\Omega_2$ є гладкою кривою, то $C_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$.

Для отримання чисельного розв'язку задачі, межу області Ω_2 розділяємо на N_2 граничних елементів, $\partial\Omega_2 = \bigcup_{n=1}^{N_2} \Gamma_n$ і $\Gamma_n \cap \Gamma_m = \emptyset$ ($m \neq n$). На елементі Γ_n компоненти переміщень і поверхневих сил задаються у формі

$$u_i(x) = \sum_{k=0}^{N_i^n-1} \varphi^{kn}(x) u_i^{kn}, \quad t_i(x) = \sum_{k=0}^{N_i^n-1} \varphi^{kn}(x) t_i^{kn}, \quad x \in \Gamma_n, \quad /6/$$

Підставляючи /6/ у рівняння /5/, одержуємо нев'язку

$$\begin{aligned} z_i(\xi) = & \sum_{e=0}^{N_i^n-1} \sum_{j=1}^2 \left[C_{ij}(\xi) \varphi^{en}(\xi) + \int_{\Gamma_n} F_{ij}(x, \xi) \varphi^{en}(x) d\Gamma(x) \right] u_j^{en} + \\ & + \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{e=0}^{N_j^m-1} \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\Gamma_m} F_{ij}(x, \xi) \varphi^{em}(x) d\Gamma(x) \right] u_j^{em} - \\ & - \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{e=0}^{N_j^m-1} \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\Gamma_m} G_{ij}(x, \xi) \varphi^{em}(x) d\Gamma(x) \right] t_j^{em}, \quad \xi \in \Gamma_n. \end{aligned} \quad /7/$$

Застосовуємо процедуру методу Бубнова-Гальоркіна:

$$\int_{\Gamma_n} \varphi^{kn}(\xi) z_i(\xi) d\Gamma(\xi) = 0, \quad /8/$$

де $i=1, 2$; $k=0, \dots, (N_i^n-1)$; $n=1, \dots, N_2$.

Підставляючи /7/ у /8/, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$F_{ij}^{knet} u_j^{em} = G_{ij}^{knet} t_j^{em}.$$

Після врахування заданих граничних умов рівняння можна записати у формі

$$A y = b, \quad /9/$$

де A - повністю заповнена несиметрична прямокутна матриця;

U - вектор невідомих переміщень і поверхневих сил у граничних вузлах; δ - вектор правої частини.

Об'єднуючи системи /4/ і /9/ і враховуючи умови спряження на Γ_C :

$$u_j^+ = u_j^-, \quad t_j^+ = t_j^-, \quad j=1,2, \quad /10/$$

одержуємо загальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A^* x = \delta^*. \quad /11/$$

3. Використання для невідомих функцій на межі спряження однакової апроксимації в МСЕ та ІМТЕ забезпечує їх неперервність під час переходу через межу Γ_C .

Відзначимо, що при адатій нумерації вузлів, коли вузли на межі спряження Γ_C є останніми для CE області і першими в МТЕ на межі $\partial\Omega_2$, матриця системи /11/ має таку структуру, зображену на рис.2, де A_1 - симетричний блок стрічкової структури; A_2 - несиметричний блок.

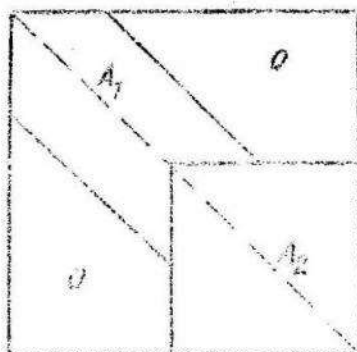


Рис. 2.

Розв'язуючи /11/, визначимо функції переміщення у вузлах скінченноелементної області Ω_1 та шукані переміщення і поверхневі сили у вузлах на межі області Ω_2 . На основі відомих співвідношень /1/ одержуємо переміщення і напруження у будь-якій внутрішній точці області Ω_2 . Визначення деформацій і напружень у вузлах скінченноелементної сітки в області Ω_1 знаходимо за допомогою співвідношень Коші і закону Гука /3/.

Описаний вище алгоритм реалізований у вигляді комплексу програм на мовах Фортран-77 і Сі для ЕЕОМ типу *IBM PC/AT*. У підпрограмі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь враховується специфіка матриці системи /II/, що дає змогу ефективно використовувати оперативну пам'ять. Для систем великих розмірів використовується зовнішня пам'ять.

4. Для тестування запропонованого комбінованого підходу розглянута задача про плоску деформацію жорстко защемленого на краю нескінченного бруса, під дією на одній з поверхонь рівномірно розподіленого навантаження /рис.3/.

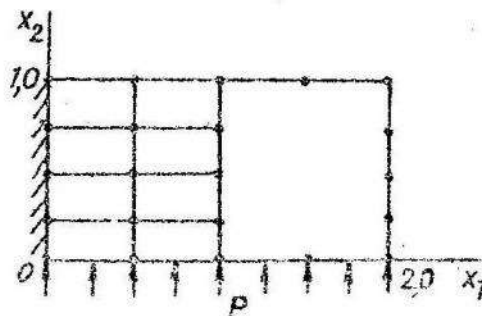


Рис. 3.

Метод	Роз- биття: $dx \times dy$		$A(0.3, 1.0)$		$B(1.0, 1.0)$		$C(2.0, 0.0)$	
			u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
МСЕ	3×6	106	-.1539-3	.1601-3	-.3064-3	.5740-3	.3762-3	.1342-2
МІЕ	3×6	72	-.1615-3	.1469-3	-.3064-3	.5678-3	.3779-3	.1334-2
Комбі-8x3		45	-.1341-3	.1393-3	-.2823-3	.6276-3	.3553-3	.1255-2
нована 6x6		132	-.1499-3	.1484-3	-.3006-3	.5653-3	.3730-3	.1326-2
схема 3x3		114	-.1527-3	.1483-3	-.3104-3	.5709-3	.3537-3	.1199-2

У таблиці наведені значення переміщень у точках з координатами $A = /0.33, 1.0/$, $B = /1.0, 1.0/$, $C = /2.0, 0.0/$. Перших два рядки значення, одержані з використанням відповідно МСЕ та МІЕ для дискретизації всієї області. Останніх три значення, одержані на основі розробленого підходу із застосуванням лінійної /третій і четвертий

рядки/ та квадратичної апроксимації. Вказані також розбиття та сумарна кількість ступенів свободи (*d.o.f. - degrees of freedom*).

1. Б е н е р д ж и П., Б а т т е р ф и л д Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 2. Б р е б б и я К., У о к е р С. Применение метода граничных элементов в технике. М., 1987. 3. Д и я к И.И. Решение двумерных задач квазистатической термоупругости на основе применения высокоточных схем МКЕ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 4. B e e r G. Implementation of combined boundary element finite element analysis with applications in geomechanics // Devel. boundary Elem. Math. 1986. Vol.4. P. 191-225. 5. P a r r l i n a P., G u l g g i a n i M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method // Comput. and Struct. 1989. Vol.33. N1. P. 269-279. 6. W e a r i n g J.L., S h e i k h M.A. A Combined Finite Element Boundary Element Technique for Stress Analysis // Devel. Boundary Elem. Math. 1988. Vol.1. P. 493-507

Стаття надійшла до редколегії 09.04.93

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач, І.І.Дяк

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянемо двовимірну задачу нестационарної теплопровідності, яка описується рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, (x,t) \in \Omega \times (0,T) \quad /1/$$

$i=1,2$

з граничними умовами на температуру

$$u(x,t)|_{\Gamma_1} = \bar{u}(t) \quad /2/$$

і тепловий потік

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)} \Big|_{\Gamma_2} = q(x,t) \Big|_{\Gamma_2} = q(t), \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \quad /3/$$

та початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad /4/$$

Для розв'язання початково-крайової задачі /1/-/4/ застосуємо прямий метод граничних елементів /ПМГЕ/. У цьому випадку розв'язання задачі /1/-/4/ зводиться до інтегрального рівняння

© Головач Н.П., Дяк І.І., 1993