рядки/ та квадратичної апроксимацій. Вказані також розбиття та сумарна кількість ступенів свободи (d.o.f. - degrees of freedom).

I. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 2. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М., 1987. 3. Дияк И.И. Решение двумерных задач квазистатической термоупругости на основе применения высокоточных схем МКЭ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 4. Beer G. Implementation of combined boundary element finite element analysis with aplications in geomechanics // Devel. boundary Elem. Math. 1986. Vol.4. P. 191-225. 5. Parrlina P., Guiggiani M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method // Coumput. and Struct. 1989. Vol.33. N1. P. 269-279. 6. Wearing J.L., Sheikh M.A. A Combined Finite Element Boundary Element Tehnique for Stress Analysis // Devel. Boundary Elem. Math. 1988. Vol.1. P. 493-507

Стаття надійшла до редколегії 09.04.93

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач, І.І.Дияк

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянемо двовимірну задачу нестаціонарної теплопровідності, яка описується рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\, \partial x_i} - \frac{1}{k}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,T) \quad i=1,2 \qquad /1/$$

з граничними умовами на температуру

$$u(x,t)\Big|_{\Gamma_1} = \bar{u}(t) \qquad /2/$$

і тепловий потік

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)}\Big|_{\Gamma_2} = q(x,t)\Big|_{\Gamma_2} = q(t), \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \qquad /3/$$

та початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \qquad /4/$$

Для розв"язання початково-крайової задачі /1/-/4/ застосовуємо прямий метод граничних елементів /ПМГЕ/. У цьому випадку розв"язання задачі /1/-/4/ зводиться до інтегрального рівняння

© Головач Н.П., Дияк І.І., 1993

Фредгольма другого роду:

$$c(\xi)u(\xi,T)+k\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)q^*(\xi,x,T,t)\,d\Gamma(x)\,dt=k\int_0^T\int_\Gamma q(x,t)u^*(\xi,x,T,t)\times$$
$$\times\,d\Gamma(x)\,dt+\int_\Omega u_0(x)u^*(\xi,x,T,0)\,d\Omega(x), \qquad /5/$$

де u^* і q^* – відповідно фундаментальний розв"язок і його нормальна похідна. Для двовимірного випадку

$$u^*(\xi,x,T,t)=\frac{1}{4\pi k(T-t)}\exp\left[-\frac{r^2}{4k(T-t)}\right];$$

$$q^*(\xi,x,T,t)=\frac{1}{8\pi k^2(T-t)^2}\exp\left[-\frac{r^2}{4k(T-t)}\right],$$

де $r^2=z_i z_i,\quad z_i=x_i(\xi)-x_i(x),\quad d=z_i n_i(x),\quad i=1,2;$

$c(\xi)$ – кутовий коефіцієнт у точці $\xi=\xi(\xi_1,\xi_2)$, який для гладкої межі дорівнює I/2.

Зображаємо межу області Ω у вигляді об"єднання N граничних елементів, які апроксимуються лінійними відрізками або криволінійними параболами. Проміжок часу інтегрування $[0,T]$ розбиваємо на F інтервалів, область Ω – на S скінченних елементів. Шукані значення u і q подаємо у вигляді

$$u(x,t)=\varphi(x)^T\psi(t)u^n,$$
$$q(x,t)=\varphi(x)^T\psi(t)q^n, \qquad /6/$$

де $\varphi(x),\psi(t)$ – базисні функції відповідно просторових і часової змінних; u^n, q^n – вектори невідомих вузлових значень u і q.

Для інтегрування /5/ найчастіше використовують схеми:

$$c_i u_F^i+k\sum_{j=1}^{N}\sum_{f=1}^{F}\left(\int_{\Gamma_j}\varphi^T\int_{t_{f-1}}^{t_f}q^*\psi\,dt\,d\Gamma\right)u^n=$$
$$=k\sum_{j=1}^{N}\sum_{f=1}^{F}\left(\int_{\Gamma_j}\varphi^T\int_{t_{f-1}}^{t_f}u^*\psi\,dt\,d\Gamma\right)q^n+\sum_{s=1}^{S}\int_{\Omega_s}u^*u_0\,d\Omega; \qquad /7/$$

$$c_i u_F^i+k\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}\varphi^T\int_{t_{F-1}}^{t_F}q^*\psi\,dt\,d\Gamma\right)u^n=$$
$$=k\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}\varphi^T\int_{t_{F-1}}^{t_F}u^*\psi\,dt\,d\Gamma\right)q^n+\sum_{s=1}^{S}\int_{\Omega_s}u^*u_{F-1}\,d\Omega. \qquad /8/$$

У схемі /7/ інтегрування за часом завжди починається з початкового моменту $t_0=0$ і не вимагає обчислення значення функції u у внутрішніх точках на кожному часовому кроці. Граничні значення функцій u та q з попереднього кроку по часу використовуємо при отриманні розв"язку на даному кроці шляхом сумування граничних інтегралів. У схемі /8/ в об"ємному інтегралі необхідні значення функцій u у внутрішніх вузлах з попереднього кроку за часом. Тобто у цій схемі кожний крок по часу розглядається як нова задача.

Вважаємо, що інтерполююча функція $\psi(t)\equiv 1$, тобто значення u та q, постійні на кожному часовому кроці.

Записуємо рівняння /7/ для всіх вибраних на межі точок. Отримуємо систему рівнянь

$$\sum_{f=1}^{F} H_{fF} U_f = \sum_{f=1}^{F} G_{fF} Q_f + B_0 \bar{U}_0 , \qquad /9/$$

де елементи матриць $\hat{H}$ і G визначаються за формулами

$$h^m_{fFij} = k \int_{\Gamma_j} \varphi_m \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* \, dt \, d\Gamma,$$

$$g^m_{fFij} = k \int_{\Gamma_j} \varphi_m \int_{t_{f-1}} u^* \, dt \, d\Gamma , \qquad /10/$$

де $H_{fFij} = \hat{H}_{fFij} + c_i \delta_{fF} \delta_{ij}$, δ_{fF}, δ_{ij} – символи Кронекера.

Зауважимо, що інтеграли по часу можна обчислити в явному вигляді:

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt = \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{d}{8\pi k^2 (t_F - t)^2} exp\left[-\frac{r^2}{4k(t_F-t)}\right] dt = \int_{t_F-t_f}^{t_F-t_{f-1}} \frac{d}{8\pi k^2 \tau^2} exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau}\right] d\tau =$$

$$= \frac{d}{2\pi k r^2} \int_{t_F-t_f}^{t_F-t_{f-1}} \frac{r^2}{4k\tau^2} exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau}\right] d\tau = \frac{d}{2\pi k r^2}\left[exp(-a_{f-1}) - exp(-a_f)\right], \qquad /11/$$

де $a_f = \dfrac{r^2}{4k(t_F - t_f)}$,

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt = \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{1}{4\pi k (t_F - t)} exp\left[-\frac{r^2}{4k(t_F-t)}\right] dt = \int_{t_F-t_f}^{t_F-t_{f-1}} \frac{1}{4\pi k\tau} exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau}\right] d\tau = \qquad /12/$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \int_{t_F-t_f}^{t_F-t_{f-1}} \frac{r^2}{4k\tau} exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau}\right] d\tau = \frac{1}{4\pi k} \int_{a_{f-1}}^{a_f} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{1}{4\pi k} \times$$

$$\times \left[E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)\right],$$

де $E_1(z)$ – інтегрально-показникова функція, що обчислюється як
$$E_1(z) = \int_{z} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = -C - \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n \cdot n!}.$$
Для обчислення інтеграла /I2/ використана заміна $x = \frac{r^2}{4k\tau}$.
Із вигляду a_f випливає, що у формулі /II/ $exp(-a_F) = 0$, тому що
$$\lim_{f \to F} exp\left[-\frac{r^2}{4k(t_F - t_f)}\right] = 0,$$
а в формулі /I2/ $E_1(a_F) = 0$.

Для обчислення граничних інтегралів інтерполюючі функції по просторових змінних вибираємо лінійними або квадратичними. Граничні інтеграли визначаємо за допомогою квадратурних формул Гаусса.

Рівняння /8/ у випадку другої крокової схеми для всіх вибраних граничних вузлів подаємо у вигляді
$$HU_F = GQ_F + BU_{F-1}, \qquad /I3/$$
де елементи матриць H і G визначаємо за допомогою /I0/ при $f = F$.

У випадку одновимірної задачі нестаціонарної теплопровідності $\Omega = [0, L]$, тепловий потік обчислюємо як
$$q(x) = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$
Фундаментальний розв"язок для одномірної задачі
$$u^*(\xi, x, T, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}}\, exp - \left[\frac{r^2}{4(T-t)}\right], \qquad /I4/$$
і "направлений" потік
$$q^*(\xi, x, T, t) = -\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{r\, sgn\, r}{4\sqrt{\pi}\,(T-t)^{3/2}}\, exp\left[-\frac{r^2}{4(T-t)}\right]. \qquad /I5/$$
Інтегральне співвідношення ПМГЕ для одновимірної задачі у будь-якій точці $\xi \in \Omega$ має вигляд
$$u(\xi, T) = -k\left[\int_0^T u^* q\,dt - \int_0^T q^* u\,dt\right]\Bigg|_0^L + \int_0^L u_0 u^*\,dx. \qquad /I6/$$
Вважаючи, що початкова температура $u_0(x) = const = \theta$, $x \in \Omega$, останній член у /I6/ можна обчислити в явному вигляді
$$\int_0^L \theta u^* dx = \int_{-\xi}^{L-\xi} \theta\, \frac{exp[-r^2/(4t_F)]}{2\sqrt{\pi t_F}}\, dr = \frac{1}{2}\,\theta \left[erf\left(\frac{L-\xi}{2\sqrt{t_F}}\right) + erf\, \frac{\xi}{2\sqrt{t_F}}\right],$$

де $erf(z)$ – функція ймовірності [4], яка визначається як

$$erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\tau^2}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Припускаючи, що функції u та q є постійними за часом на кожному часовому кроці, зі схеми /7/ отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{Bmatrix}u_F^1\\u_F^2\end{Bmatrix}+k\sum_{f=1}^{F}\left(\int_{t_{f-1}}^{t_f}\begin{bmatrix}q_1^* & -q_2^*\\ q_2^* & -q_1^*\end{bmatrix}dt\right)\begin{Bmatrix}u_f^1\\u_f^2\end{Bmatrix}=$$

$$=k\sum_{f=1}^{F}\left(\int_{t_{f-1}}^{t_f}\begin{bmatrix}u_1^* & -u_2^*\\u_2^* & -u_1^*\end{bmatrix}dt\right)\begin{Bmatrix}q_f^1\\q_f^2\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}\theta\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}erf\left(\frac{L}{2\sqrt{t_F}}\right), \qquad /18/$$

де $u_1^*=u^*(0^+,0,t_F,t);\ u_2^*=u^*(0^+,L,t_F,t);\ q_1^*=q^*(0^+,0,t_F,t);\ q_2^*=q^*(0^+,L,t_F,t)$, які внаслідок симетричності u^* та q^* збігаються з $u^*(L^-,L,t_F,t)$, $u^*(L^-,0,t_F,t)$, $q^*(L^-,L,t_F,t)$, $q^*(L^-,0,t_F,t)$ відповідно.

Інтегрування по часу у /18/ також можна виконати аналітично

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^*dt=r\,sgn\,r\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{exp[-r^2/\{4(t_F-t)\}]}{4\sqrt{\pi}(t_F-t)^{3/2}}dt=\frac{1}{2}sgn\,r\left(erf|b_f|-erf|b_{f-1}|\right), \qquad /19/$$

де $b_f=r/(2\sqrt{t_F-t})$;

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} u^*dt=\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{exp[-r^2/\{4(t_F-t)\}]}{2\sqrt{\pi}(t_F-t)^{1/2}}dt=\sqrt{\frac{t_F-t_{f-1}}{\pi}}exp(-b_{f-1}^2)-$$

$$-\sqrt{\frac{t_c-t_f}{\pi}}exp(-b_f^2)-\frac{|r|}{2}\left(erf|b_f|-erf|b_{f-1}|\right). \qquad /20/$$

Враховуючи позначення b_f [4], приймаємо $erf|b_F|=1$ у /19/ і /20/, $exp(-b_F^2)=0$ у /20/.

Повертаючись до системи рівнянь /18/, зауважимо, що ця система розв'язується для моменту часу $t=t_F$, а значення векторів $\begin{Bmatrix}u_f^1\\u_f^2\end{Bmatrix}$ та $\begin{Bmatrix}q_f^1\\q_f^2\end{Bmatrix}$ при $f=1,2,\ldots,F-1$ є задані або обчислені на попередніх кроках по часу.

Важливо відзначити, що якщо в процесі чисельної реалізації задається постійний крок по часу Δt, то на кожному часовому кроці необхідно визначити тільки дві нові матриці:

$$\int_0^{\Delta t}\begin{vmatrix}q_1^* & -q_2^*\\ q_2^* & -q_1^*\end{vmatrix}dt,\qquad \int_0^{\Delta t}\begin{vmatrix}u_1^* & -u_2^*\\ u_2^* & -u_1^*\end{vmatrix}dt.$$

усі інші відомі з попередніх кроків.

Розв"язуючи систему /I8/, знаходимо в момент часу $t=t_F$ граничні значення функцій u та q, яких не вистачало. І при необхідності, користуючись співвідношенням /I6/, шукаємо значення функції температури у деяких внутрішніх вузлах одновимірної області.

Із схеми /8/ для двох граничних вузлів отримуємо систему

$$1/2\, u(\xi^p, t_F) = k \sum_{j=1}^{2} \left(\int_{t_{F-1}}^{t_F} q^*(\xi^p, x^j, t_F, t)\,dt \right) u(x^j, t_F) - \qquad /2I/$$

$$-k \sum_{j=1}^{2} \left(\int_{t_{F-1}} u^*(\xi^p, x^j, t_F, t)\,dt \right) q(x^j, t_F) + \sum_{s=1}^{S} \left(\int_{x_{s-1}}^{x_s} u^*(\xi^p, x^s, t_F, t_{F-1}) M(x^s) \right) dx_s u_{F-1}, \quad p=1,2,$$

де $M(x^s)$ – базисна функція на S-му проміжку, яка може бути лінійною, квадратичною; u_{F-1} – вектор вузлових значень функції u в момент часу $t=t_{F-1}$.

Для апробації розроблених схем розглянута задача про нагрівання необмеженої пластинки завтовшки $2R(-R \le x \le R)$ з початковою температурою T_0 [3]. Нагрівання відбувається з обох сторін однаково від джерела з постійним тепловим потоком, тобто

$$-\lambda \frac{\partial u(R,t)}{\partial x} + q_c = 0.$$

У таблиці наведені значення температури /u × 100/ в різних точках пластини в момент часу $t_F = 1$ для різних кроків інтегрування та аналітичний розв"язок [3]. Максимальна відносна похибка обчислення значення температури на основі схеми /7/ становить для вищенаведених часових кроків I,2; 0,6 і 0,3 % відповідно, а для схеми /8/ – I,7; I,I і 0,8 %.

x	Аналітичний розв"язок	Схема /7/			Схема /8/		
		$\Delta t=0,1$	$\Delta t=0,05$	$\Delta t=0,025$	$\Delta t=0,1$	$\Delta t=0,05$	$\Delta t=0,025$
0,0	24I7	2435	2436	242I	2459	2443	2435
0,2	2427	2453	244I	2434	2468	2452	2443
0,4	2457	2486	247I	2464	2500	2482	2473
0,6	2507	2535	252I	25I4	2550	2532	2523
0,8	2577	2603	2590	2584	26I8	260I	2593
I,0	2667	2684	2675	267I	2709	2693	2686

Примітка: Δt – крок за часом.

Таким чином, застосування схеми /7/ є ефективнішим, оскільки і час розв"язання задачі на ПЕОМ у цьому випадку удвічі менший порівняно зі схемою /8/.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 2. Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М., 1987. 3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 4. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л., 1951.

Стаття надійшла до редколегії 09.04.93

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ

Сингулярно збурені задачі для параболічних рівнянь другого порядку вивчені достатньо, а от для псевдодиференціальних рівнянь – у літературі не описані.

Розглянемо випадок повного виродження псевдодиференціального рівняння. А саме, в області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l,\ \ 0\leq t\leq T\}$ маємо задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+a(x,t)u=f(x,t); \qquad /1/$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad u(x,0)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1. $a(x,t)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі в D функції.
2. $a(x,t)>0$ у D.
3. $\dfrac{\partial^{i+j}f(0,0)}{\partial x^i\partial t^j}=\dfrac{\partial^{i+j}f(l,0)}{\partial x^i\partial t^j}=0$ $(i+j=0,\dots,N)$, де N – точність побудованої нижче асимптотики.

За цих припущень існує єдиний класичний розв"язок задачі /1/–/2/ [5].

Методом примежового шару [2] побудуємо асимптотику до деякого порядку N розв"язку задачі /1/–/2/ за степенями малого параметра ε. Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i^1(\xi,t)+ \qquad /3/$$
$$+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i^2(\eta,t)+R_N(x,t,\varepsilon),$$

© Дудзяний І.М., Цимбал В.М., 1993