1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 2. Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М., 1987. 3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 4. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л., 1951.

Стаття надійшла до редколегії 09.04.93

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ

Сингулярно збурені задачі для параболічних рівнянь другого порядку вивчені достатньо, а от для псевдодиференціальних рівнянь – у літературі не описані.

Розглянемо випадок повного виродження псевдодиференціального рівняння. А саме, в області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l,\ \ 0\leq t\leq T\}$ маємо задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+a(x,t)u=f(x,t); \qquad /1/$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad u(x,0)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1. $a(x,t)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі в D функції.
2. $a(x,t)>0$ у D.
3. $\dfrac{\partial^{i+j}f(0,0)}{\partial x^i\partial t^j}=\dfrac{\partial^{i+j}f(l,0)}{\partial x^i\partial t^j}=0\ \ (i+j=0,\dots,N)$, де N – точність побудованої нижче асимптотики.

За цих припущень існує єдиний класичний розв"язок задачі /1/-/2/ [5].

Методом примежового шару [2] побудуємо асимптотику до деякого порядку N розв"язку задачі /1/-/2/ за степенями малого параметру ε. Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar u_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^iQ_i^1(\xi,t)+ \qquad /3/$$
$$+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^iQ_i^2(\eta,t)+R_N(x,t,\varepsilon),$$

де $\tau = t/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\eta = \dfrac{l-x}{\varepsilon}$.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у /3/. Вони визначаються стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ обчислюємо рекурентно зі співвідношень

$$a(x,t)\bar{u}_i = f_i(x,t) \qquad (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t) \equiv f(x,t)$, $f_i(x,t) = \dfrac{\partial^2 \bar{u}_{i-2}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^3 \bar{u}_{i-3}}{\partial x^2 \partial t} - \dfrac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t}$.

Тут і надалі вважаємо, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулю. Функції $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ не задовольняють початкові і граничні умови /2/. Цій меті служать Π-, Q^1-, Q^2-функції розвинення /3/.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / x-параметр/:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} + a(x,0)\Pi_i = \psi_i(x,\tau); \qquad /5/$$

$$\Pi_i(x,0) = -\bar{u}_i(x,0), \qquad /6/$$

де $\psi_0(x,\tau) \equiv 0$, $\psi_i(x,\tau)$ $(i=1,\dots,N)$ легко виписуються явно і лінійно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$ та їхні похідні.

Функції примежового шару в околі $(x=0)$ $Q_i^1(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / t-параметр/:

$$-\frac{\partial^2 Q_i^1}{\partial \xi^2} + a(0,t)Q_i^1 = \Psi_i^1(\xi,t); \qquad /7/$$

$$Q_i^1(0,t) = -\bar{u}_i(0,t), \quad Q_i(\xi,t) \xrightarrow[\xi]{} \frac{0}{\infty}, \qquad /8/$$

де $\Psi_0^1(\xi,t) \equiv 0$, $\Psi_i^1(\xi,t)$ $(i=1,\dots,N)$ явно виражаються через $Q_j^1(\xi,t)$ $(j<i)$ та їхні похідні.

Нарешті, функції примежового шару в околі $(x=l)$ $Q_i^2(\eta,t)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / t-параметр/

$$-\frac{\partial^2 Q_i^2}{\partial \eta^2} + a(l,t)Q_i^2 = \Psi_i^2(\eta,t); \qquad /9/$$

$$Q_i^2(0,t) = -\bar{u}_i(l,t), \quad Q_i(\eta,t) \xrightarrow[\eta]{} \frac{0}{\infty}, \qquad /10/$$

де $\Psi_0^2(\eta,t)\equiv 0$, $\Psi_i^2(\eta,t)$ $(i=1,\dots,N)$ явно виражаються через $Q_j^2(\eta,t)$ $(j<i)$ та їхні похідні.

Якщо визначені рекурентно усі $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,1,\dots,N)$ з /4/, то $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно з /5/, /6/, $Q_i^1(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно з /7/, /8/, а $Q_i^2(\eta,t)$ $(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно з /9/, /10/. Елементарно можна довести, що $\Pi-$, Q^1-, Q^2- є функціями примежового шару. Слід врахувати також, що з умови 3 випливає

$$\Pi_i(x,\tau)\Big|_{x=0}=\Pi_i(x,\tau)\Big|_{x=1}=0,\quad Q_i^1(\xi,t)\Big|_{t=0}=Q_i^2(\eta,t)\Big|_{t=0}=0\quad (i=0,\dots,N).$$

Це дає змогу виконати рекурентні процеси і визначити функції, які входять у /3/.

Методом інтегралів енергії [4] одержуємо оцінку

$$\|R_N(x,t,\varepsilon)\|_{L_2(D)}\leq C\varepsilon^{N+1},$$

де константа C не залежить від ε. Отже, доведена асимптотична коректність розвинення /3/.

Результат роботи оформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов 1–3 розв"язок задачі /1/ – /2/ допускає асимптотичне зображення 3, де $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно зі скінченних рівнянь /4/; функції звичайних примежових шарів $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$, $Q_i^1(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N)$, $Q_i^2(\eta,t)$ $(i=0,\dots,N)$ рекурентно визначаються як розв"язки відповідно задач /5/ і /6/, /7/ і /8/, /9/ і /10/.

Зауваження 1. Аналогічний випадок виродження для рівняння у частинних похідних третього порядку вивчений у праці [3].

Зауваження 2. Результат роботи одержано при виконанні надзвичайно обтяжливої умови 3. Можливо за рахунок уведення в асимптотику функцій кутового примежового шару [1] цієї умови можна позбутися.

1. Бутузов Ф.П., Нестеров А.В. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. математики и кибернетики. 1978. № 2. С.49-56. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 3. Дудзяний І.М., Цимбал В.М. Асимптотичний розв"язок змішаної задачі для деякого рівняння третього порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1982. Вип.19. С.14-17. 4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 5. Bohm M., Showalter R.E. A nonlinear pseudoparabolic diffusion equation // SIAM J. Math. Anal. 1985. Vol. 16. P. 980-999.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.93