УДК 539.3:517.958

Н.М.Паук

ЗАСТОСУВАННЯ ОБ"ЄДНАНОГО ГРАНИЧНО-СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Розглянемо задачу про плоску деформацію ізотропного однорідного пружного тіла, поперечний переріз якого займає область $\Omega < R^2$ /рис. 1/. Нехай область Ω складається з двох частин $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 – довільна двовимірна область з ліпшицевою межею $\Gamma_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Gamma_1^{(i)}$; Ω_2 – область вигляду

$$\Omega_2 = \{\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^0 \le \alpha_1 \le \alpha_1^e, \ -\frac{h}{2} \le \alpha_2 \le \frac{h}{2}\}.$$

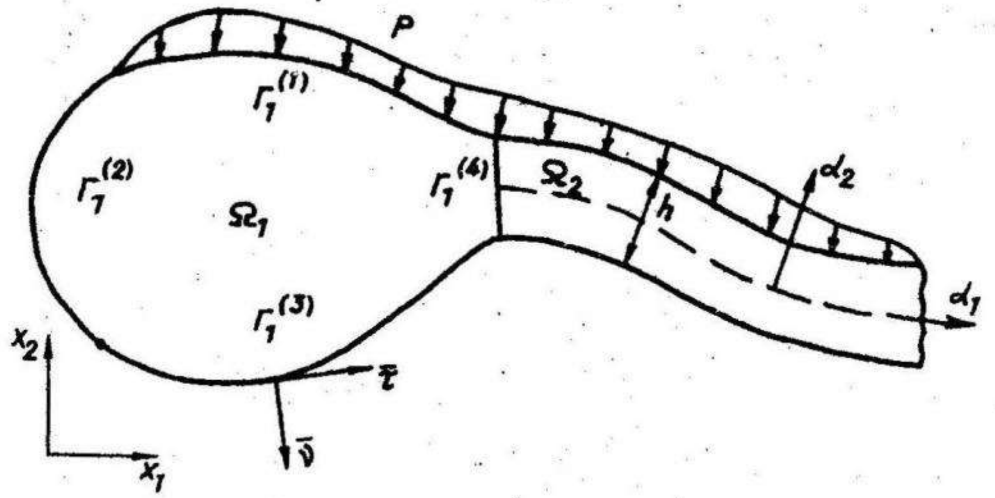

Рис. 1.

Припустимо, що розмір h області Ω_2 значно менший від інших розмірів оболонки і визначає її товщину. Припустимо також, що частина межі $\Gamma_1^{(4)}$ є прямолінійною і перпендикулярною до лінії $\alpha_2 = const$.

Нехай напружено-деформівний стан тіла, що займає область Ω, описується комбінованою математичною моделлю, основні співвідношення якої в області Ω_1 є рівняннями двовимірної задачі теорії пружності в переміщеннях [2]:

$$\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\mu}\psi_i^{(1)} = 0, \qquad /1/$$

де $\mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$ – модуль зсуву; $i, j = 1,2$, а в області Ω_2 – рівняннями теорії оболонок типу Тимошенка [1]:

$$\frac{B}{A_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{d^2 u_1^{(2)}}{d\alpha_1^2} + K_1\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1}\right) + GK_1\left(-K_1 u_1^{(2)} + \frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)}\right) + p_1^{(2)} = 0,$$

$$\frac{G}{A_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{d^2 w^{(2)}}{d\alpha_1^2} - K_1\frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1} + \frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1}\right) - BK_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + K_1 w^{(2)}\right) + p_n^{(2)} = 0,$$

$$\frac{D}{A_1}\frac{1}{A_1}\frac{d^2\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1^2} - G\left(-K_1 u_1^{(2)} + \frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)}\right) + m_1^{(2)} = 0. \qquad /2/$$

Тут $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$ – переміщення точок тіла в декартовій системі координат x_1, x_2; $u_1^{(2)}, w^{(2)}$ – переміщення точок серединної площини в напрямку осей α_1 і α_2 відповідно; $\gamma_1^{(2)}$ – кут повороту нормалі до серединної площини; $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$ – густини масових сил, прикладених до частини тіла, що займає область Ω_1; $p_1^{(2)}, p_n^{(2)}, m_1^{(2)}$ – густини приведених зовнішніх сил і моменту, які виражаються через густину масових та поверхневих сил [1]; A_1 – коефіцієнт Ламе; K_1 – кривизна оболонки; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; B, G, D – константи, що характеризують пружні властивості оболонки:

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad G = K'G'h, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

для ізотропних оболонок $G' = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $K' = \frac{5}{6}$.

Співвідношення /1/, /1.2/ є диференціальними рівняннями задачі, яку слід розв"язувати за певних граничних умов. Нехай на межі області Ω_1 задані умови:

$$\sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\nu_j = \bar{p}_\nu^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\tau_j = \bar{p}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(1)}, \qquad /3/$$

$$u_i^{(1)}\nu_i = \bar{u}_\nu^{(1)}, \quad u_i^{(1)}\tau_i = \bar{u}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)},$$

$$u_i^{(1)}\nu_i = \bar{u}_\nu^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\tau_j = \bar{p}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(3)},$$

де ν_i, τ_i – напрямні косинуси зовнішньої нормалі ν і дотичної τ ;

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}^{(1)} + 2\mu\varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_i^{(1)}}{dx_j} + \frac{du_i^{(1)}}{dx_i}\right),$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

При $\alpha_1 = \alpha_1^e$ – умови одного з типів:

– жорстке защемлення $u_1^{(2)} = w^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = 0$;

– шарнірно опертий край $u_i^{(2)} = w^{(2)} = 0,\ M_i^{(2)} = 0$;

– вільний край $Q_i^{(2)} = M_i^{(2)} = T_i^{(2)} = 0$;

– симетрія $u_i^{(2)} = \gamma_i^{(2)} = 0, \quad Q_i^{(2)} = 0,$ /4/

де
$$T_1^{(2)} = B\left(\frac{1}{A_i}\frac{du_i^{(2)}}{d\alpha_1} + K_1 w^{(2)}\right),$$

$$Q_1^{(2)} = G\left(-K_i u_i^{(2)} + \frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_i^{(2)}\right), \quad M_i^{(2)} = \frac{D}{A_1}\frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1}.$$

На ділянці межі $\Gamma_1^{(4)} = \left\{\alpha_1 = 0,\ -\frac{h}{2} < \alpha_2 < \frac{h}{2}\right\}$ – задані умови спряження:

– геометричні /нерозривності переміщень/

$$u_i^{(1)}\tau_i = w^{(2)}(0), \qquad u_i^{(1)}\nu_i = u_1^{(2)}(0) + \gamma_1^{(2)}(0)\alpha_2; \qquad /5/$$

– статичні /умови статичної рівноваги/

$$\int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\nu_j\, d\alpha_2 = T_i^{(2)}(0), \qquad \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\tau_j\, d\alpha_2 = Q_i^{(2)}(0),$$

$$\int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\nu_j\alpha_2\, d\alpha_2 = M_1^{(2)}(0). \qquad /6/$$

Отже, для запропонованої комбінованої математичної моделі "пружне тіло-оболонка типу Тимошенка" крайовою задачею є система рівнянь /I/, /2/ з граничними умовами /3/ – /6/.

Для чисельної реалізації запропонованої комбінованої моделі використовують прямий метод граничних елементів для задачі теорії пружності і метод скінченних елементів – для задачі теорії оболонок типу Тимошенка.

Чисельний розв"язок задач теорії пружності методом граничних елементів є вартою уваги альтернативою і доповненням до методу скінченних елементів та інших методів, які застосовують у теорії пружності для розрахунку напружень. В МГЕ розмірність задачі зменшується на одиницю і невідомі величини визначаються відразу на межі області. МГЕ має явні переваги як для областей великих розмірів, так і для областей з високою концентрацією напружень. З іншого боку, скінченні елементи зручніше використовувати під час розгляду інших частин тіла. Відповідні комбіновані розв"язки майже необмежено розширюють область застосування обох методів, і такий підхід інтенсивно розвивається [3-6].

У даному випадку для з"єднання моделей використовуємо метод комбінування, суть якого полягає у тому, що для кожної з моделей, які розраховують за теорією пружності і теорією оболонок типу Тимошенка, розв"язується послідовність систем лінійних алгебраїчних рівнянь зі спеціальними правими частинами. Ці праві частини містять N_1+1, N_2+1 стовпців, де N_1, N_2 – число ступенів свободи на поверхні спряження для кожної з моделей. У випадку, коли на поверхні спряження маємо три вузли для пружного тіла і один – для оболонки, то $N_1=6$, $N_2=3$.

Остаточно розв"язок зображаємо у вигляді суми часткових розв"язків, домножених на поки що невідомі константи c_i, b_j, $i=\overline{1,6}$, $j=\overline{1,3}$. Для невідомих переміщень він має вигляд

$$u_1^{(1)}=\sum_{i=1}^{N_1} c_i u_1^{(1)(i)}+u_1^{(1)(0)},\quad u_2^{(1)}=\sum_{i=1}^{N_1} c_i u_2^{(1)(i)}+u_2^{(1)(0)},$$

$$u_1^{(2)}=\sum_{j=1}^{N_2} b_j u_1^{(2)(j)}+u_i^{(2)(0)},\quad w^{(2)}=\sum_{j=1}^{N_2} b_j w^{(2)(j)}+w^{(2)(0)},$$

$$\gamma_1^{(2)}=\sum_{j=1}^{N_2} b_j \gamma_1^{(2)(j)}+\gamma_1^{(2)(0)}.$$

Змінні з нульовим індексом відповідають розв"язку задачі з заданими нульовими переміщеннями на спільній межі. Індекси i та j позначають змінні, що виникають при одиничних переміщеннях у вузлах спряження. Аналогічні вирази маємо для напружень, зусиль і моментів.

Невідомі величини c_i, b_j, $i=\overline{1,6}$, $j=\overline{1,3}$ знаходимо, розв"язуючи систему рівнянь, яку одержуємо підставляючи записані вирази для змінних у співвідношення для кінематичних та статичних умов спряження /5/, /6/.

Наведений алгоритм реалізований у вигляді комплексу програм на мові Фортран 77 для ПЕОМ типу IBM PC/AT.

Приклад. Розглянемо тестову задачу про плоску деформацію циліндра під дією нормального тиску інтенсивністю P, рівномірно розподіленого по зовнішній поверхні. Ця задача також відома як задача Ляме [2]. Для розрахунку обрано фрагмент конструкції, поперечний переріз якого поданий на рис. 2. На межах фрагменту задавані умови симетрії.

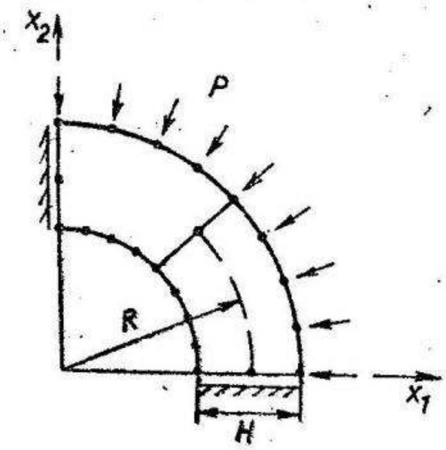

Рис. 2.

Дослідимо задачу Ляме з використанням розглянутої комбінованої моделі. Зобразимо конструкцію у вигляді об"єднання двох рівних частин, одна з яких моделюється рівняннями теорії пружності, друга – рівняннями теорії оболонок типу Тимошенка.

Числові розв"язки одержані для модуля Юнга $E/P = 2\cdot 10^4$ та коефіцієнта Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Результати, отримані на основі запропонованої комбінованої моделі, порівнювали з аналітичним розв"язком задачі Ляме. Відносну похибку наближеного розв"язку обчислювали за формулою

$$e(u) = \frac{u_{ан} - u_{набл}}{\max u_{ан}}\, 100\,\% .$$

Для відношення $H/R = 0{,}1$ використовували розбиття сіткою по довжині на вісім і по товщині – на два лінійних граничних елементи для оболонки. Це привело до результатів з відносною похибкою максимальних радіальних переміщень u_r до 0,6 %. Використання сітки 4x1 квадратичних граничних елементів для тіла і чотирьох скінченних елементів для оболонки дало змогу одержати розв"язок з відносною похибкою для u_r до 0,46 %. Слід зауважити, що ці максимальні похибки припадають на точки, що лежать на поверхні спряження комбінованої моделі.

"Сплеск" похибок при визначенні переміщень біля лінії спряження, що виникає внаслідок реалізації умов пружного спряження комбінованої моделі, є невеликим для оболонок середньої товщини. Це пояснюється, з одного боку, непридатністю теорії оболонок для розрахунку товстих оболонок, а з іншого, необхідністю вводити у розгляд додаткові вузли зв"язку під час розрахунку тонких тіл методом граничних елементів. Проте якісна картина напружено-деформівного стану залишається незмінною, що підтверджує придатність і перспективність використання об"єднаного гранично-скінченноелементного підходу до розглянутої комбінованої моделі.

І. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. К., 1972. 3. Савула Я.Г., Дубовик А.В., Паук Н.М. Крайова і варіаційна задачі зі штрафом комбінованої моделі плоскої теорії пружності // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С.3-9. 4. *Beer G. BEFE - A combined boundary element finite element computer program // Advances in Engineering Software. 1984. Vol. 6. P. 103-109.* 5. *Li H.B., Han G.M., Mang H.A., Torzicky P. A new method for coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies // Comput. Methods Appl. Mech. & Eng. 1986. Vol. 54. P. 161-185.* 6. *Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution methods // Int. J. Numer. Methods Eng. 1977. Vol. 11(2). P. 355-375.*

Стаття надійшла до редколегії І4.0І.93

УДК 537.2І2:62І.3І.027

В.А.Пучка

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КРАЙОВОЇ ОСОБЛИВОСТІ РОЗІМКНУТОЇ ПОВЕРХНІ НА РОЗВ"ЯЗОК ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

Задача електростатики в $\mathbb{R}^3$ для кусково-однорідного діелектричного середовища зводиться [6] до знаходження розв"язку інтегрального рівняння /ІР/

$$\int_S \Phi(x,y)\varphi(y)\,dS(y) = f(x), \quad x \in S, \qquad /1/$$

де S - поверхня електроду, на якій заданий потенціал поля $f(x)$, $\varphi(y)$ - шукана густина розподілу зарядів на S; $\Phi(x,y) = 1/|x-y|$ - потенціал поля точкового заряду.