

"Сплеск" похибок при визначенні переміщень біля лінії спряження, що виникає внаслідок реалізації умов пружного спряження комбінованої моделі, є невеликим для оболонок середньої товщини. Це пояснюється, з одного боку, непридатністю теорії оболонок для розрахунку товстих оболонок, а з іншого, необхідністю вводити у розгляд додаткові вузли зв'язку під час розрахунку тонких тіл методом граничних елементів. Проте якісна картина напружено-деформованого стану залишається незмінною, що підтверджує придатність і перспективність використання об'єднаного гранично-скінченноелементного підходу до розглянутої комбінованої моделі.

1. П е л ь х Б.Д. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978.
2. Т и м о ш е н к о С.П. Курс теории упругости. К., 1972.
3. С а в у л а Я.Г., Д у б о в и к А.В., П а у к Н.М. Крайова і варіаційна задачі зі штрафом комбінованої моделі плоскої теорії пружності // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С.3-9.
4. Beez G. BEFE - A combined boundary element finite element computer program // Advances in Engineering Software. 1984. Vol. 6. P. 103-109.
5. Li H.B., Han G.M., Ma H.A., Tozzick P. A new method for coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies // Comput. Methods Appl. Mech. & Eng. 1986. Vol. 54. P. 161-185.
6. Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution methods // Int. J. Numer. Methods Eng. 1977. Vol. 11(2). P. 355-375.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.93

УДК 537.212:621.31.027

В.А.Пучка

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КРАЙОВОЇ ОСОБЛИВОСТІ РОЗІМКНУТОЇ ПОВЕРХНІ НА РОЗВ'ЯЗОК ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

Задача електростатики в $\mathbb{R}^3$ для кусково-однорідного діелектричного середовища зводиться [6] до знаходження розв'язку інтегрального рівняння /1/

$$\int_S \Phi(x, y) \psi(y) dS(y) = f(x), \quad x \in S, \quad /1/$$

де S - поверхня електроду, на якій заданий потенціал поля $f(x)$, $\psi(y)$ - шукана густина розподілу зарядів на S ; $\Phi(x, y) = 1/|x-y|$ - потенціал поля точкового заряду.

© Пучка В.А., 1993

У праці [8] показана еквівалентність /1/ відповідній крайовій задачі у випадку однозв'язної гладкої відкритої поверхні S з гладкою граничною кривою, що не перетинає саме себе. Крім цього, у агаданій праці отримана поведінка $\varphi(x)$ при підході до краю S .

Наша мета — чисельне дослідження ефективності врахування поведінки $\varphi(x)$ при знаходженні значень електростатичного поля методом граничних елементів [2, 7].

Припустимо, що існує розвиття конфігурації S на криволінійні чотирикутні граничні елементи S^q таке, що $S = \cup S^q$, $S^i \cap S^j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тоді ІР можна звести до вигляду

$$\sum_q \int_{S^q} \Phi(x, y) \varphi(y) dS(y) = \sum_q T^q(x) = f(x). \quad /2/$$

Виконаємо перетворення $T^q(x)$ для апроксимації шуканої функції. Для цього здійснимо відображення S^q на $\square = [-1, 1] \times [-1, 1]$ згідно з

$$\xi_i^q = \sum_k N_k(\eta_1, \eta_2) x_{ik}^q, \quad i = 1, 2, 3, \quad /3/$$

де функції $N_k(\eta_1, \eta_2)$ вибирають залежно від порядку і типу апроксимації [4]; $(x_{ik}^q, x_{2k}^q, x_{3k}^q)$ координати точки x_k на q -му елементі. Якоб'ян такого перетворення має вигляд

$$J^q(\eta_1, \eta_2) = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)^{1/2}, \quad /4/$$

$$\text{де } d_1 = \frac{\partial(\xi_2, \xi_3)}{\partial(\eta_1, \eta_2)}, \quad d_2 = \frac{\partial(\xi_3, \xi_1)}{\partial(\eta_1, \eta_2)}, \quad d_3 = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\eta_1, \eta_2)}.$$

Позначимо через S^* об'єднання тих елементів квадратування конфігурації, які виходять або на вільний край поверхні S , або на лінію зламу. Для зображення невідомої густини розподілу зарядів виконуємо кусково-поліноміальну апроксимацію її на $\square$:

$$\varphi(\eta_1, \eta_2) = \sum_k N_k(\eta_1, \eta_2) a_k^q, \quad /5/$$

де a_k^q — невідомі значення φ у вузлах q -го елемента;

$$\tilde{N}_k(\eta_1, \eta_2) = \begin{cases} N_k(\eta_1, \eta_2) & , \text{ якщо } S^q \notin S^*, \\ N_k(\eta_1, \eta_2) / \omega(\eta_1, \eta_2) & , \text{ якщо } S^q \in S^*, \end{cases} \quad /6/$$

$\omega(\eta_1, \eta_2)$ — функція, що модулює сингулярний характер розподілу густини зарядів при наближенні до краю поверхні:

$$\omega(\eta_1, \eta_2) = (1 - \eta_1)^{1/4} (1 + \eta_1)^{1/4} (1 - \eta_2)^{1/4} (1 + \eta_2)^{1/4}, \quad /7/$$

де γ_i - порядок особливості. Якщо особливість на i -й стороні елемента відсутня, то $\gamma_i = 0$. У решті випадків, включаючи також вільний край, порядок особливості обчислюємо як [1]

$$\gamma_i = (\Pi - \omega_i) / (2\Pi - \omega_i),$$

де ω_i - двогранний кут, що отримується при переході з i -ї сторони елемента на сусідній елемент іншого фрагмента.

Кількість вузлів при відображенні граничного елемента та кількість невідомих при апроксимації густини φ можуть не збігатися. Надалі вважатимемо, що вони збігаються, а це відповідає так званому ізопараметричному випадку.

Враховуючи виконані перетворення [3]-[5], можна записати

$$T^q(x) = \sum_k a_k F_k^q(x), \quad /8/$$

$$\text{де } F_k^q(x) = \int_{\Omega} \tilde{N}_k(\eta_1, \eta_2) \Phi(x, \xi^q(\eta_1, \eta_2)) J^q(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2.$$

Підставляємо [8] у [2], припускаючи неперервність функції φ , та здійснюючи глобальну перенумерацію всіх вузлів, отримуємо

$$\sum_{i=1}^n a_i F_i(x) = f(x), \quad i = x(q, k), \quad /9/$$

де $x(q, k)$ - таблична функція, що зв'язує локальний номер k на q -му елементі з глобальним вузлом i . Подібний процес складання рівнянь збігається з добре відомою процедурою ансамблювання в методі скінченних елементів [4].

Обираючи вузли граничних елементів x_j за точки колокації, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Fa = f, \quad /10/$$

де елементи матриці і вектора правої частини визначаються як

$$F_{ij} = F_i(x_j), \quad f_j = f(x_j), \quad j = x(q, k).$$

Побудована система рівнянь має повністю заповнену матрицю, визначення елементів якої вимагає обчислення інтегралів

$$W = \int_{\Omega} \tilde{N}_k(\eta_1, \eta_2) \Phi(x_j, \xi^q(\eta_1, \eta_2)) J^q(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2. \quad /11/$$

Виникає при цьому складність - наявність особливостей на краях і типу $1/R$ у підінтегральній функції при збігу аргументів. Перша особливість ігнорується шляхом вибору кубатурної формули Гаусса, точки інтегрування якої не потрапляють на край. Особливість типу $1/R$ виникає у випадку, коли точка x_j розміщена на еле-

менті q . Відомо [3], що такого типу особливості є слабкими, тобто інтегровними. В основі методики їх виділення лежить перехід до локальної полярної системи координат [5].

Таким чином, розв'язуючи систему рівнянь /10/, добру зумовленість матриці якої забезпечує властивість ядра інтегрального оператора /1/, отримуємо a_i - значення φ у вузлах елементів. Використовуючи зображення /5/, розв'язок задачі електростатики та його похідні до порядку α для $\forall x \in R^3 \setminus S$ обчислюємо за формулою

$$\frac{\partial^\alpha U(x)}{\partial x_i^\alpha} = \int_S \varphi(y) \frac{\partial^\alpha \Phi(x, y)}{\partial x_i^\alpha} dS(y), \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad /12/$$

Зауважимо, що знаходження теоретичних оцінок збіжності та похибки використаного тут методу колокації в R^3 є на даний час відкритою проблемою [9].

Запропонований алгоритм розрахунку електростатичних полів реалізований для IBM PC/AT у середовищі *Turbo Pascal*. Роботу програми можна розбити на чотири етапи: побудова сітки граничних елементів $\{S^q\}$, обчислення елементів матриці $\{F_{ij}\}$ системи лінійних рівнянь /10/, розв'язування системи рівнянь та розрахунок необхідних характеристик поля /потенціалу, вектора напружень, ліній одного рівня тощо/.

Характерною особливістю даної реалізації є діалоговий опис геометричних об'єктів з наступною візуалізацією сітки граничних елементів. У програмі за основу взяті квадратичні базисні функції сім'ї середипових елементів [4].

Для аналізу ефекту врахування крайової особливості розраховане поле зарядженого диску, що має аналітичний розв'язок, у двох випадках: з врахуванням особливості /ВО/ при $\omega(\eta_1, \eta_2) \neq 1$ та без врахування /БВ/ при $\omega(\eta_1, \eta_2) = 1$. Диск радіусом $Z = 1$ лежить у площині $Z = 0$ з центром у початку координат. Враховуючи це, розбиття побудоване лише для 1/4 диску.

На рис. 1 подана залежність відносної похибки ($E_{zz}, \%$) при розрахунку поля вздовж лінії, що з'єднує точки $/0, 0, h / i / R, 0, h /$ при $h = 0, 1$. Криві 1, 2 отримані за методикою БВ при $N = 49$ та $N = 169$ відповідно. Методиці ВО відповідають криві 3, 4 при аналогічній кількості точок колокації. Отримані результати збігаються з очікуваними. Тобто, порівнюючи криві 2 і 3, можна стверджувати, що необхідно значно збільшувати N у методиці БВ для отримання результатів, що порівнюватимуться з результатами

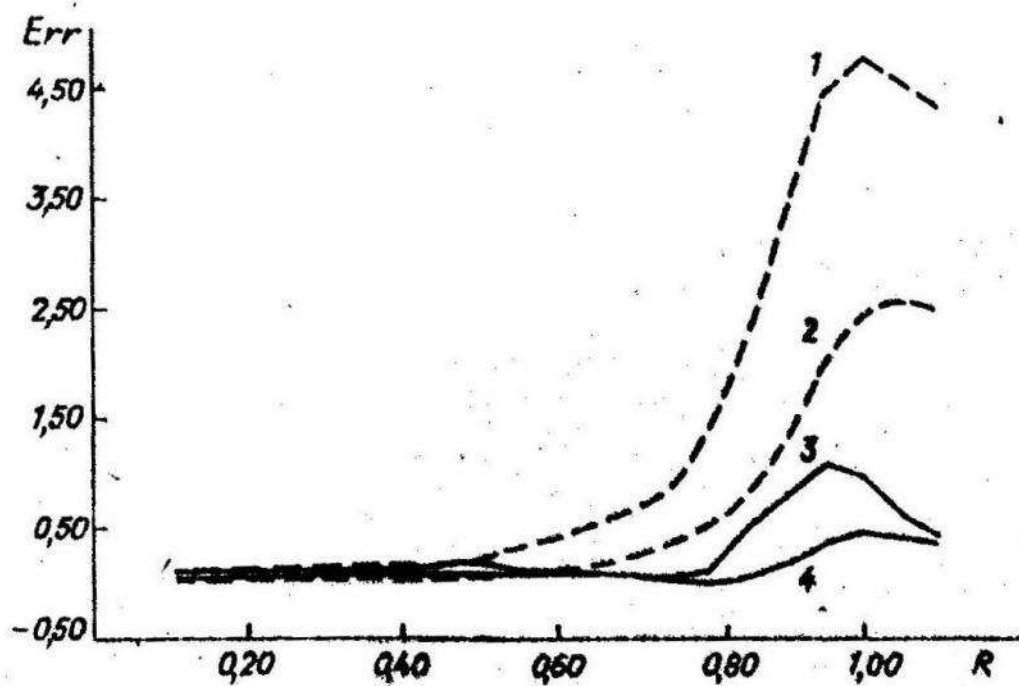


Рис. 1.

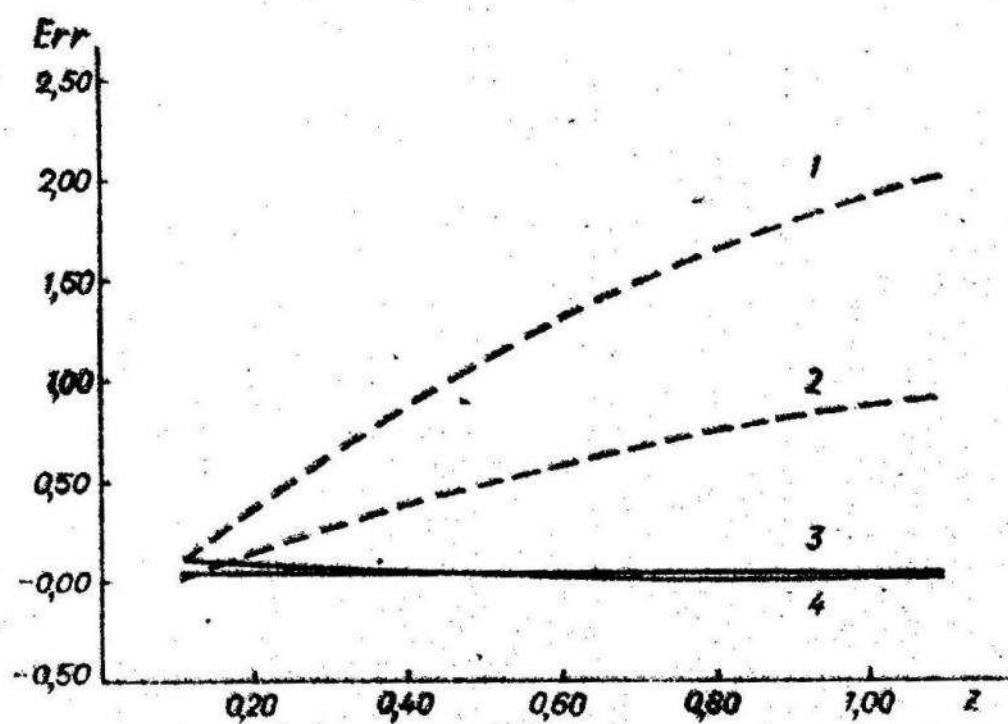


Рис. 2.

за методикою ВО при невеликих N . Крім цього, за рахунок зменшення h визначена межа застосовності /12/ при обчисленні поля поблизу електрода без виділення особливостей, у ядрі інтегрального оператора. При $h \leq z/100$ розв'язок задачі був несталим.

Несподівані результати отримані під час розрахунку поля по осі Z . На рис. 2, як і в попередньому випадку, криві 1, 2 відповідають методиці БВ, криві 3, 4 - методиці ВО. При розрахунках поля вздовж осі при збільшенні Z очевидним є зростання точності. На жаль, методика БВ навіть при $N = 169$ /крива 2/ не дає таких результатів. Таким чином, ефективність методики ВО безсумнівна.

І. Антоненко О.Ф. Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения // Вычисл. системы. 1964. Вып. 12. С. 79-97. 2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубель Л. Методы граничных элементов. М., 1987. 3. Васильев Е.Н. Алгоритмизация задач дифракции на основе интегральных уравнений // Прикл. электродинамика. М., 1977. Вып. 1. С. 65-98. 4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимации. М., 1986. 5. Иванов В.Я. Методы автоматизированного проектирования приборов электродинамики: В 2 ч. Новосибирск, 1986. Ч. 1. 6. Лядкевич И.В., Гордийчук В.Н., Бакалец В.А., Маринин Л.О. Численное решение пространственных задач теории потенциала. Львов, 1979. 7. Чухлебов А.Н., Пучка В.А. Моделирование электростатических полей в пакете программ решения граничных задач теории потенциала // Лучевая технология электрон. техники: теория и эксперимент. М., 1988. С. 15-22. 8. Stephan E.P. Boundary integral equations for screen problems in R^3 // Integral Equations and Operator Theory. 1987. Vol. 10. P. 236-257. 9. Wendland W.L. On the numerical analysis of boundary element methods // Boundary Element Techniques in Computer Aided Eng., Martinus Nijhoff Publ. Dordrecht. 1989. Vol. 1. P. 417-436.

Стаття надійшла до редколегії 11.01.93