УДК 519.6

Р.С.Хапко

МЕТОД КВАДРАТУР ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ З ЛОГАРИФМІЧНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ В ЯДРАХ

Нехай на площині R^2 задана замкнена крива L, яка має параметричне зображення

$$x=(x_1(t),\ x_2(t)),\quad \text{де}\quad 0\le t\le 2\pi,\ [x_1']^2+[x_2']^2>0.$$

Розглянемо систему ІР Фредгольма першого роду

$$\int_L \mu_n(P)\varphi_0(P,M)\,dL(P)=f_n(M)-\sum_{m=0}^{n-1}\int_L \mu_m(P)\varphi_{n-m}(P,M)\,dL(P), \qquad /1/$$

де $\varphi_n(R)=K_0(\gamma R)\sum\limits_{i=0}^{n_1}R^{2i}D_{2i}^{(n)}+K_1(\gamma R)\sum\limits_{i=0}^{n_2}R^{2i+1}D_{2i+1}^{(n)}$,

$D_i^{(n)}$ – постійні, що визначаються за відомими рекурентними формулами [2]; $K_i(z)$ – функція Макдональда i-го порядку; $n_1=\left[\frac{n}{2}\right]$; $n_2=\left[\frac{n-1}{2}\right]$; $R=|MP|$ – відстань; $\mu_n(P)$ – невідомі функції густини; $\gamma>0$ – постійна.

Систему /1/ одержуємо внаслідок застосування до першої крайової задачі для телеграфного рівняння на площині інтегрального перетворення Чебишова-Лагерра по часу та методу ІР у просторі зображень [2, 3]. У даній праці метод квадратур, розроблений для ІР першого роду [4], поширюється на випадок системи ІР.

1. Параметризація системи ІР. З урахуванням параметричного зображення кривої L перетворимо систему /1/ до вигляду

$$\int_0^{2\pi}\mu_n(\tau)\varphi_0(t,\tau)\,d\tau=f_n(t)-\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^{2\pi}\mu_m(\tau)\varphi_{n-m}(t,\tau)\,d\tau, \qquad /2/$$
$$0\le t\le 2\pi.$$

де $\mu_n(t)=\mu_n(x(t))$; $f_n(t)=f_n(x(t))$,

та ядра, задані формулою

$$\varphi_n(t,\tau)=K_0(\gamma z(t,\tau))\sum_{m=0}^{n_1}D_{2m}^{(n)}z^{2m}(t,\tau)+K_1(\gamma z(t,\tau))\sum_{m=0}^{n_2}D_{2m+1}^{(n)}z^{2m+1}(t,\tau).$$

Тут відстань $z(t,\tau)$ обчислюємо за формулою

$$z(t,\tau)=\left\{(x_1(t)-x_1(\tau))^2+(x_2(t)-x_2(\tau))^2\right\}^{1/2}.$$

Відомо [I], що функції Макдональда $K_0(z)$ і $K_1(z)$ мають такі розклади в ряди:

$$K_0(z) = -\ln z/2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k},$$

$$K_1(z) = 1/z + \ln z/2 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k z^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k z^{2k+1},$$

де a_k, b_k, $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$ – відомі коефіцієнти.

З урахуванням цього, бачимо, що ядра в /2/ мають логарифмічні особливості і можуть бути записані у вигляді

$$\varphi_n(\gamma z(t,\tau)) = \tilde{F}_1^{(n)}(\gamma z(t,\tau)) \ln \frac{\gamma z(t,\tau)}{2} + \tilde{F}_2^{(n)}(\gamma z(t,\tau)),$$

де

$$\tilde{F}_1^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k z^{2k+1} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m+1}^{(n)} z^{2m+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m}^{(n)} z^{2m},$$

$$F_2^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m}^{(n)} z^{2m} + \sum_{m=0}^{n_2} D_{2m+1}^{(n)} z^{2m} - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k z^{2k+1} \sum_{m=0}^{n_2} D_{2m+1}^{(n)} z^{2m+1}.$$

Після нескладних перетворень остаточно маємо

$$\varphi_n(t,\tau) = \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} F_1^{(n)}(t,\tau) + F_2^{(n)}(t,\tau),$$

де функції

$$F_1^{(n)}(t,\tau) = \sin^{-2} \frac{t-\tau}{2} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\gamma z(t,\tau))^{2k+1} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m+1}^{(n)} (\gamma z(t,\tau))^{2m+1} -$$

$$- a_0 \sum_{m=1}^{n_1} D_{2m}^{(n)} (\gamma z(t,\tau))^{2m} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\gamma z(t,\tau))^{2k} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m}^{(n)} (\gamma z(t,\tau))^{2m},$$

$$F_2^{(n)}(t,\tau) = \ln \frac{16 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 z^2(t,\tau)} \tilde{F}_1^{(n)}(\gamma z(t,\tau)) + 2\tilde{F}_2^{(n)}(\gamma z(t,\tau))$$

є аналітичними за обома аргументами.

Таким чином, система /2/ зведена до вигляду

$$\int_0^{2\pi} \mu_n(\tau) \Big[\ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} F_1^{(0)}(t,\tau) + F_2^{(0)}(t,\tau) \Big] d\tau =$$

$$= f_n(t) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \mu_m(\tau) \Big[\ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} + \qquad /3/$$

$$+ \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} F_1^{(n-m)}(t,\tau) + F_2^{(n-m)}(t,\tau) \Big] d\tau,$$

або в операторній формі

$$\left(S + A^{(0)} + B^{(0)}\right) \mu_n = f_n - \sum_{m=0}^{n-1} \left(S + A^{(n-m)} + B^{(n-m)}\right) \mu_m, \qquad /4/$$

де $$(S\mu)(t)=\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}d\tau;$$
$$(A^{(K)}\mu)(t)=\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin^2\frac{t-\tau}{2}\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}F_1^{(K)}(t,\tau)d\tau$$
$$(B^{(K)}\mu)(t)=\int_0^{2\pi}\mu(\tau)F_2^{(K)}(t,\tau)d\tau -$$
оператори, що діють із $C^{0,\alpha}[0;2\pi]\longrightarrow C^{1,\alpha}[0;2\pi]$, $0<\alpha\leq 1$.

2. <u>Метод квадратур</u>. Розбиваємо відрізок $[0;2\pi]$ на $2N$-частин точками $t_K^{(N)}=\frac{\pi K}{N}$ і розглядаємо три інтерполяційні квадратурні формули:
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt\approx\frac{1}{2N}\sum_{K=0}^{2N-1}f(t_K^{(N)}), \qquad /5/$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}d\tau\approx\sum_{K=0}^{2N-1}f(t_K^{(N)})R_K^{(N)}(t), \qquad /6/$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\sin^2\frac{t-\tau}{2}\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}d\tau\approx\sum_{K=0}^{2N-1}f(t_K^{(N)})P_K^{(N)}(t), \qquad /7/$$
де $$P_K^{(N)}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}L_K^{(N)}(\tau)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}d\tau,$$
$$P_K^{(N)}(t)=\frac{1}{\pi}\int^{2\pi}L_K^{(N)}(t)\sin^2\frac{t-\tau}{2}\ln\frac{}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}d\tau,$$
$$L_K^{(N)}(t)=\frac{1}{2N}\left\{1+2\sum_{i=1}^{N-1}\cos i(t-t_K)+\cos N(t-t_K)\right\}.$$

Застосовуємо формули /5/–/7/ до системи ІР /4/, внаслідок чого отримуємо систему апроксимаційних рівнянь:
$$\sum_{K=0}^{2N-1}\mu_n(t_K^{(N)})\left\{R_K^{(N)}(t)+P_K^{(N)}(t)F_1^{(0)}(t,t_K^{(N)})+F_2^{(0)}(t,t_K^{(N)})\right\}=f_n(t)- \qquad /8/$$
$$-\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{K=0}^{2N-1}\mu_m(t_K^{(N)})\left[R_K^{(N)}(t)+P_K^{(N)}(t)F_1^{(n-m)}(t,t_K^{(N)})+F_2^{(n-m)}(t,t_K^{(N)})\right],$$
або в операторній формі
$$\left(S+A_N^{(0)}+B_N^{(0)}\right)\mu_n=f_n-\sum_{m=0}^{n-1}\left(S+A_N^{(n-m)}+B_N^{(n-m)}\right)\mu_m, \qquad /9/$$
де $$\left(A_N^{(K)}\mu_i\right)(t)=\sum_{j=0}^{2N-1}\mu_i(t_j^{(N)})P_j^{(N)}(t)F_1^{(K)}(t,t_j^{(N)}),$$
$$\left(B_N^{(K)}\mu_i\right)(t)=\sum_{j=0}^{2N-1}\mu_i(t_j^{(N)})F_2^{(K)}(t,t_j^{(N)}) -$$
оператори із $C^{0,\alpha}[0;2\pi]\longrightarrow C^{1,\alpha}[0;2\pi]$, $0<\alpha\leq 1$.

Розглядаючи співвідношення /8/ в $2N$ точках колокації, одержуємо послідовність систем лінійних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \mu_n(t_k^{(N)})\left\{R_{|k-i|}^{(N)} + P_{|k-i|}^{(N)} F_1^{(0)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)}) + F_2^{(0)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)})\right\} = f_n(t_i^{(N)}) - \tag{10}$$

$$- \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \mu_m(t_k^{(N)})\left\{R_{|k-i|}^{(N)} + P_{|k-i|}^{(N)} F_1^{(n-m)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)}) + F_2^{(n-m)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)})\right\},$$

яка, зрозуміло, еквівалентна системі

$$(P_N S + P_N A_N^{(0)} + P_N B_N^{(0)})\mu_n = P_n f_n - \sum_{m=0}^{n-1} (P_N S + P_N A_N^{(n-m)} + P_N B_N^{(n-m)})\mu_m,$$

де $P_N f = \sum_{i=0}^{2N-1} f(t_i^{(N)}) L_i^{(N)}(t)$ – оператор тригонометричного інтерполювання;

$$P_j^{(N)} = R^{(N)}(t_j) = -\frac{1}{N}\left\{\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} \cos\frac{mj\pi}{N} - \frac{(-1)^j}{2N}\right\};$$

$$p_j^{(N)} = p^{(N)}(t_j) = \frac{1}{2N}\left\{\sum_{m=2}^{N-1} \frac{1}{m(m^2-1)} \cos\frac{mj\pi}{N} + 0{,}5 - 0{,}75\cos\frac{j\pi}{N} + \frac{(-1)^j}{2N(N^2-1)}\right\}.$$

3. <u>Аналіз похибки</u> виконаний на базі теорії колективно-компактних операторів [5].

<u>Теорема I.</u> а/ Послідовності операторів $(A_N^{(i)})$ і $(B_N^{(i)}): C^{0,\alpha}[0;2\pi] \to C^{1,\alpha}[0;2\pi], 0<\alpha<0{,}5$ є колективно-компактними і поточково збігаються до операторів $A^{(i)}$ і $B^{(i)}$ відповідно для $i = 0, 1, \ldots$ при $N \to \infty$. б/ Послідовності операторів $(P_N A_N^{(i)})$ і $(P_N B_N^{(i)})$: $C^{0,\alpha}[0;2\pi] \to C^{1,\alpha}[0;2\pi], 0<\alpha<0{,}5$ є колективно-компактними і поточково збігаються до операторів $A^{(i)}$ і $B^{(i)}$ відповідно для $i = 0, 1, \ldots$ при $N \to \infty$.

Доведення теореми аналогічне доведенням у праці [1].

<u>Теорема 2.</u> При достатньо великих N для наближених розв'язків $\mu_n^{(N)}(t)$ і точних $\mu_n(t)$ виконується оцінка похибки

$$\|\mu_N^{(N)} - \mu_n\|_{0,\alpha} \le C_n \Big(\|P_N f_N - f_n\|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n} \|(P_N A_N^{(m)} +$$

$$+ P_N B_N^{(m)} - A^{(m)} - B^{(m)})\mu_{n-m}\|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n-1} \|\mu_m^{(N)} - \mu_m\|_{0,\alpha}\Big), \tag{11}$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

Доведення. При $n=0$ із /I/ маємо

$$\| \mu_0^{(N)} - \mu_0 \|_{0,\alpha} \le C_0 \left(\| P_N f_0 - f_0 \|_{1,\alpha} + \| (P_N A_N^{(0)} + P_N B_N^{(0)} - A^{(0)} - B^{(0)}) \mu_0 \|_{1,\alpha} \right).$$

Нехай нерівність /II/ виконується. Покажемо, що з цього випливає справедливість її також для $n+1$. Справді

$$\| \mu_{n+1}^{(N)} - \mu_{n+1} \|_{0,\alpha} \le C_0 \Big(\| P_N f_{n+1} - \sum_{m=0}^{n} (P_N S + P_N A^{(n-m+1)} + P_N B_N^{(n-m+1)}) \mu_m^{(N)} -$$

$$- f_{n+1} + \sum_{m=0}^{n} (S + A^{(n-m+1)} + B^{(n-m+1)}) \mu_m \|_{1,\alpha} + \| (P_N A_N^{(0)} + P_N B_N^{(0)} - A^{(0)} -$$

$$- B^{(0)}) \mu_{n+1} \|_{1,\alpha} \le C \Big(\| P_N f_{n+1} - f_{n+1} \|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n+1} \| (P_N A_N^{(m)} + P_N B_N^{(m)} - A^{(m)} -$$

$$- B^{(m)}) \mu_{n-m} \|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n} \| (P_N A_N^{(n-m+1)} + P_N B_N^{(n-m+1)}) (\mu_m^{(N)} - \mu_m) \|_{1,\alpha} \le$$

$$\le C_{n+1} \Big(\| P_N f_{n+1} - f_{n+1} \|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n+1} \| (P_N A_N^{(m)} + P_N B_N^{(m)} - A^{(m)} -$$

$$- B^{(m)}) \mu_{n-m} \|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n} \| \mu_m^{(N)} - \mu_m \|_{0,\alpha} \Big).$$

Зауважимо, що оцінку /II/ можна записати також у вигляді

$$\| \mu_n^{(N)} - \mu_n \|_{0,\alpha} \le \widetilde{C}_n \Big(\sum_{i=0}^{n} \| P_N f_i - f_i \|_{1,\alpha} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \| P_N A_N^{(j)} +$$

$$+ P_N B_N^{(j)} - A^{(j)} - B^{(j)}) \mu_{n-i} \|_{1,\alpha} \Big).$$

Викладений метод без принципових змін переноситься й на випадок системи IP на розімкненій кривій /I/.

I. Справочник по специальным функциям /Под ред. Абрамовица Н.А., Стиган Н. М., 1979. 2. Хапко Р.С. Про інтегральне представлення та фундаментальні розв"язки деяких систем еліптичних рівнянь // Доп. АН УРСР. 1991. № 5. С.35-37. 3. Хапко Р.С. Численное решение первой краевой задачи для телеграфного уравнения на незамкнутых контурах // Вычисл. и прикл. математика. Вып. 72. 1990. С.57-62. 4. Kress R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind //World Scientific Series in Applicable Analysis. 1993. P.32-46. 5. Kress R. Linear Integral Equations. Springer-Velag. Berlin; Heidelberg; New-York, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.93