УДК 519.6

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ГІДРОДИНАМІКИ В"ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ МЕТОДОМ ε-АПРОКСИМАЦІЇ *

У чисельному моделюванні течій в"язкої нестисливої рідини виникає проблема задоволення умови соленоїдальності вектором швидкості потоку u :

$$div\, u = 0. \qquad /1/$$

Один із відомих підходів до вирішення цієї проблеми полягає у застосуванні ε-апроксимації умови /1/:

$$\varepsilon p^{\varepsilon} + div\, u^{\varepsilon} = 0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, що дає змогу будувати схеми почергового знаходження апроксимацій вектора швидкості u^{ε} і тиску p^{ε} рідини. Стосовно широкого спектра стаціонарних задач гідродинаміки в"язкої нестисливої рідини цей підхід розвинутий у працях [1-4, 6, 7]. У пропонованому дослідженні зроблена спроба узагальнити цей підхід на випадок нестаціонарної лінеаризованої системи рівнянь Нав"є-Стокса з граничними умовами типу "прилипання". Зокрема, з використанням варіаційного підходу досліджене питання коректності ε-задачі, що відповідає рівнянню /2/, а також збіжності розв"язків ε-задачі при $\varepsilon \to 0$.

I. Постановка початково-крайової задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2$ або 3/ – обмежена ліпшицева область із межею Γ . Для заданих вектор-функцій $f: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ $(T>0)$ та $u_0: \Omega \times \to \mathbb{R}$ розглянемо задачу знаходження вектора швидкості $u: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ і тиску $p: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ рідини:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + grad\, p = f & \text{в} \quad \Omega \times [0,T], \\ div\, u = 0 & \text{в} \quad \Omega \times [0,T], \\ u = 0 & \text{на} \quad \Gamma \times [0,T], \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{в} \quad \Omega, \end{cases} \qquad /3/$$

де $\nu > 0$ – кінематичний коефіцієнт в"язкості рідини.

* Робота виконана в межах Програми № 8 Міністерства освіти України "Математичні методи дослідження детермінованих та стохастичних еволюційних систем".

Одна з можливих узагальнених постановок задачі /1/ має вигляд

$$\begin{cases} \text{Задано } f \in L^2(0,T,V'), \quad u_0 \in V; \\ \text{знайти пару } (u,p) \in L^2(0,T;\, V \times Q_0) \text{ таку, що} \\ \frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) - (p(t), div\, v) = \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in V, \\ \qquad (q, div(t)) = 0 \qquad \forall q \in Q, \\ \qquad (u(0) - u_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V, \end{cases} \qquad /4/$$

де $V = H_0^1(\Omega)^n$, $Q_0 = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : (1, q) = 0\}$,

$$a(u,v) = \nu \sum_{i,j=0}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right), \quad \langle f, v\rangle = (f, v).$$

Тут і далі використовуємо позначення, запозичені в працях [5, 7]: $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток простору $Q = L^2(\Omega)$; $\|\cdot\|_0$ – його норма; $\|\cdot\|_1$ та $|\cdot|_1$ – відповідно норма та напівнорма простору Соболєва $H^1(\Omega)$.

Відомо [5], що існує один і тільки один розв"язок задачі /4/.

2. Постановка регуляризованої задачі. Існування та єдиність розв"язку. Застосовуючи ε-апроксимацію /2/, наближуємо задачу /4/ ε-задачею

$$\begin{cases} \text{Задано } \varepsilon > 0; \text{ знайти пару } (u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in L^2(0,T;\, V \times Q) \text{ таку, що} \\ \frac{d}{dt}(u^\varepsilon(t), v) + a(u^\varepsilon(t), v) - (p^\varepsilon(t), div\, v) = \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in V, \\ \qquad \varepsilon \cdot (q, p^\varepsilon(t)) + (q, div\, u^\varepsilon(t)) = 0 \qquad \forall q \in Q, \\ \qquad (u^\varepsilon(0) - u_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V. \end{cases} \qquad /5/$$

Теорема /про коректність регуляризованої задачі/. Існує один і тільки один розв"язок задачі /5/.

Доведення. Нехай $\{V_h\}$ та $\{Q_h\}$ – послідовності скінченновимірних підпросторів V і Q, що мають властивість

$$\begin{cases} \bigcup_{h>0} V_h \text{ щільно вкладене у } V, \ dim\, V_h = N(h) = N \xrightarrow[h \to 0]{} \infty, \\ \bigcup_{h>0} Q_h \text{ щільно вкладене у } Q, \ dim\, Q_h = M(h) = M \xrightarrow[h \to 0]{} \infty. \end{cases} \qquad /6/$$

Використовуючи метод Гальоркіна, апроксимуємо задачу /5/ задачею

$$\begin{cases} \text{Задано } h>0; \text{ знайти пару } (u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon) \in L^2(0,T;V\times Q) \text{ таку, що} \\ \dfrac{d}{dt}(u_h^\varepsilon(t), v_h) + a(u_h^\varepsilon(t), v_h) - (p_h^\varepsilon(t), \mathrm{div}\, v_h) = \langle f, v_h\rangle \;\forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon\cdot(q_h, p_h^\varepsilon(t)) + (q_h, \mathrm{div}\, u_h^\varepsilon(t)) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \\ (u_h^\varepsilon(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{7}$$

У просторах V_h та Q_h вводимо бази $\{v_i\}_{i=1}^N$ і $\{q_i\}_{i=1}^M$. Тоді задача /7/ еквівалентна відшуканню коефіцієнтів лінійних комбінацій

$$u_h^\varepsilon = \sum_{l=1}^N U_l(t) v_l(x), \quad p_h^\varepsilon = \sum_{l=1}^M P_l(t) q_l(x),$$

що задовольняють задачу Коші:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^N \{m_{ij} U_j'(t) + a_{ij} U_j(t)\} - \sum\limits_{k=1}^M b_{ki} P_k(t) = F_i(t), \\ \sum\limits_{k=1}^M \varepsilon r_{nk} P_k(t) + \sum\limits_{j=1}^N b_{nj} U_j(t) = 0, \quad t \in (0,T], \\ U_l(0) = u_{h0}^l, \quad i, l = 1,\dots,N; \quad n = 1,\dots,M, \end{cases} \tag{8}$$

де

$m_{ij} = (v_i, v_j)$, $a_{ij} = a(v_i, v_j)$, $b_{ki} = (q_k, \mathrm{div}\, v_i)$, $r_{nk} = (q_n, q_k)$, $i, j = 1,\dots,N$, $n, k = 1,\dots,M$, а $u_{h0}^1, \dots, u_{h0}^N$ визначаються з умов

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} u_{h0}^j = (u_0, v_i), \quad i = 1,\dots,N.$$

Оскільки матриці $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^M$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $R = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^M$ симетричні та додатно визначені, задача Коші /8/ має єдиний розв"язок. Отже, існує єдина пара $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)$, що задовольняє задачу /7/. З огляду не рівняння задачі /7/ маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h^\varepsilon(t)\|_0^2 + \nu |u_h^\varepsilon(t)|_0^2 + \varepsilon \|p_h^\varepsilon(t)\|_0^2 \le \|f(t)\|_* |u_h^\varepsilon(t)|_1.$$

Інтегруючи від 0 до t та застосовуючи нерівності

$$\|u_{0h}\|_0 \le \|u_0\|_0, \quad ab \le \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2 \;\; \forall a, b, \delta \in R, \; \delta > 0,$$

знаходимо

$$\frac{1}{2}\|u_h^\varepsilon(t)\|_0^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t \|u_h^\varepsilon(\tau)\|_1^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|p_h^\varepsilon(\tau)\|_0^2 d\tau \le \frac{1}{2}\|u_0\|_0^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|f(\tau)\|_* d\tau.$$

З останньої оцінки випливає, що послідовності $\{u_h^\varepsilon\}$, $\{p_h^\varepsilon\}$ при $h \to 0$ обмежені відповідно в $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;Q)$ та в $L^2(0,T;Q)$. Отже, з послідовності $\{(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)\}$ (ε фіксоване !) можна вибрати підпослідовність $\{(u_\Delta^\varepsilon, p_\Delta^\varepsilon)\}$ таку, що $u_\Delta^\varepsilon \to u_*$ слабко в $L^2(0,T;V)$, $p_\Delta^\varepsilon \to p_*$ слабко в $L^2(0,T;Q)$, $\Delta \to 0$, з $u_* \in L^2(0,T;V)$, $p_* \in L^2(0,T;Q)$, Покажемо, що пара (u_*, p_*) є розв"язком задачі /5/. З цією метою домножуємо перше рівняння задачі /7/ на довільну функцію $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi(T) = 0$ та інтегруємо частинами:

$$-\int_0^T (u_\Delta^\varepsilon(t), v_h)\varphi'(t)dt + \int_0^T a(u_\Delta^\varepsilon(t), v_h)\varphi(t)dt - \int_0^T (p_\Delta^\varepsilon(t), div\, v_h)\varphi(t)dt =$$

$$= (u_{0h}, v_h)\,\varphi(0) + \int_0^T \langle f(t), v_h\rangle \varphi(t)dt \quad \forall v_h \in V_h.$$

Звідси, переходячи до межі при $\Delta \to 0$, а також користуючись властивістю /6/, знаходимо

$$\frac{d}{dt}(u_*, v) + a(u_*, v) - (p_*, div\, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V.$$

З огляду на /6/ граничним переходом при $\Delta \to 0$ в рівності

$$\varepsilon \cdot (q_h, p_\Delta^\varepsilon) + (q_h, div\, u_\Delta^\varepsilon) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

одержуємо, що

$$\varepsilon(q, p_*) + (q, div\, u_*) = 0 \qquad \forall q \in Q.$$

Початкова умова $u_*(0) = u_0$ є наслідком того, що $u_{0\Delta} \to u_0$, $\Delta \to 0$. Отже, (u_*, p_*) є розв"язком задачі /7/. Єдиність цього розв"язку легко доводиться від супротивного.

3. <u>Збіжність розв"язків регуляризованої задачі.</u> Розв"язок $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ задачі /5/ при будь-якому $\varepsilon > 0$ задовольняє рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)\|_0^2 + \nu|u^\varepsilon(t)|_1^2 + \varepsilon\|p^\varepsilon(t)\|_0^2 = \langle f(t), u^\varepsilon\rangle.$$

Звідси за аналогією з попереднім пунктом знаходимо

$$\frac{1}{2}\|u^\varepsilon(t)\|_0^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t |u^\varepsilon(\tau)|_1^2 d\tau + \varepsilon\int_0^t \|p^\varepsilon(\tau)\|_0^2 d\tau \le \frac{1}{2}\|u_0\|_0^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|f(\tau)\|_* d\tau.$$

З отриманої оцінки випливає існування такої підпослідовності $\{(u^\xi, p^\xi)\}$, що $u^\xi \to u$ слабко в $L^2(0,T;V)$, $\sqrt{\xi}\,p^\xi \to \pi$ слабко в $L^2(0,T;Q)$ з $u \in L^2(0,T;V)$, $\pi \in L^2(0,T;Q)$. Граничним переходом при $\xi \to 0$ встановлюється тотожність $div\, u = 0$ у Q. Тоді, використовуючи позначення $\mathcal{V} = \{v \in V : div\, v = 0 \text{ в } Q\}$, записуємо

$$\frac{d}{dt}(u^\xi, v) + a(u^\xi, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}. \qquad /9/$$

Домножуючи /9/ на довільну функцію $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi(T) = 0$ та інтегруючи частинами, у межі при $\xi \to 0$ одержуємо, що вектор u є розв"язком задачі

$$\begin{cases} \text{Знайти вектор } u \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \text{ такий, що} \\ \dfrac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad /10/$$

Легко бачити, що цей вектор задовольняє задачу /4/. З огляду на единість розв"язку задачі /10/ довільна підпослідовність послідовності $\{u^\varepsilon\}$ збігається слабко в $L^2(0,T;V)$ до u. Отже, вся послідовність також є збіжною в тому ж сенсі.

Неважко перевірити, що розв"язок u задачі /4/, а також розв"язок u^ε задачі /5/ перетворюють такі рівності у тотожності

$$\frac{d}{dt}(u^\varepsilon - u, v) + a(u^\varepsilon - u, v) - (p^\varepsilon - p, \operatorname{div} v) = 0 \quad \forall v \in V, \qquad /11/$$

$$\varepsilon(q, p^\varepsilon) + (q, \operatorname{div} u^\varepsilon) = 0 \quad \forall q \in Q. \qquad /12/$$

Звідси знаходимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon - u\|_0^2 + \nu|u^\varepsilon - u|_1^2 + \varepsilon\|p^\varepsilon\|_0^2 = (p, \operatorname{div}(u - u^\varepsilon)).$$

Отже, $u^\varepsilon \to u$ сильно в $L^2(0,T;V)$ при $\varepsilon \to 0$. Застосовуючи до /11/ нерівність Ладиженської-Бреззі-Бабушки /7/:

$$\sup_{v \in V}\frac{q, \operatorname{div} v}{|v|_1} \geq L\, q_0 \quad \forall q \in Q,\ L = const > 0,$$

одержуємо
$$\|p^\varepsilon - p\|_0 \leq C|u^\varepsilon - u|_1,\ C = const > 0. \qquad /13/$$

Таким чином, $p^\varepsilon \to p$ сильно в $L^2(0,T;Q)$.

З метою отримання оцінок швидкості збіжності u^ε та p^ε по ε до u, p окомбінуємо /11/ і /12/ таким чином

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon - u\|_0^2 + \nu|u^\varepsilon - u|_1^2 = \varepsilon(p - p^\varepsilon, p^\varepsilon). \qquad /14/$$

Перетворюючи праву частину /14/ до вигляду
$-\varepsilon\|p^\varepsilon - p\|_0^2 + \varepsilon(p, p - p^\varepsilon)$, знаходимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon - u\|_0^2 + \nu|u^\varepsilon - u|_1^2 = \varepsilon(p, p - p^\varepsilon).$$

З останньої нерівності випливає оцінка

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_1\varepsilon, \quad C_1 = const > 0. \qquad /15/$$

Об"єднуючи /13/ із /15/, остаточно записуємо

$$\|p^\varepsilon - p\|_{L^2(0,T;Q)} \leq C_2\varepsilon, \quad C_2 = const > 0. \qquad /16/$$

Отже, доведена справедливість такої теореми.

<u>Теорема</u> /про збіжність розв"язків регуляризованої задачі/. Послідовність $\{(u^\varepsilon, p^\varepsilon)\}$ розв"язків задачі /5/ при $\varepsilon \to 0$ збігається до розв"язку (u, p) задачі /4/ в просторі $L^2(0,T;V \times Q)$. При цьому виконуються оцінки швидкості збіжності /15/, /16/.

1. З у б о в В.Н. Численное исследование течений вязкой несжимаемой жидкости методом конечных элементов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1990. 2. Л и т в и н о в В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М., 1982. 3. С м а г у л о в Ш. Математические вопросы приближенных методов для уравнений Навье-Стокса: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1988. 4. С о б о л е в с к и й П.Е., В а с и л ь е в В.В. Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса // Числен. методы механики сплошной среды. 1978. Т.9. № 5. С.115-139. 5. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 6. Т е м а м Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981. 7. Girault V., Raviart P.A. Finite element approximation of the Navier-Stokes equation // Lect. Notes. Math. 1979. N 749.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.93

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО ТІЛА З РІДИНОЮ.

I. ІДЕАЛЬНІ СЕРЕДОВИЩА

Розглянемо процес нестаціонарної акустичної взаємодії ідеального пружного тіла з нев"язкою стисливою рідиною. Терміном "ідеальне середовище" користуватимемося у зв"язку з нехтуванням втратами енергії /дисипацією/ в досліджуваних середовищах.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай пружне тіло /відповідно рідина/ займає область Ω_S /відп. Ω_F / точок $x=(x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору $\mathbb{R}^3$ з межею Γ_S /відп. Γ_F /. Контакт тіла й рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_C=\Gamma_S \cap \Gamma_F$. Позначимо через $\nu^S=(\nu_1^S, \nu_2^S, \nu_3^S)$ /відп. ν^F / одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_S /відп. Γ_F /; t - час, $0 \le t \le T \le +\infty$.

Рух пружного тіла описується вектором переміщень $u=(u_1,u_2,u_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_S u_i'' - \sigma_{ij,j}^S = f_i \quad \text{в } \Omega_S \times (0,T]; \qquad /1/$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^S(u) = a_{ijkm}\,\varepsilon_{km}(u) \\ \varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \end{cases} \quad \text{в } \Omega_S \times (0,T]. \qquad /2/$$