1. З у б о в В.Н. Численное исследование течений вязкой несжимаемой жидкости методом конечных элементов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1990. 2. Л и т в и н о в В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М., 1982. 3. С м а г у л о в Ш. Математические вопросы приближенных методов для уравнений Навье-Стокса: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1988. 4. С о б о л е в с к и й П.Е., В а с и л ь е в В.В. Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса // Числен. методы механики сплошной среды. 1978. Т.9. № 5. С.115-139. 5. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 6. Т е м а м Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981. 7. Girault V., Raviart P.A. Finite element approximation of the Navier-Stokes equation // Lect. Notes. Math. 1979. N 749.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.93

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО ТІЛА З РІДИНОЮ.

I. ІДЕАЛЬНІ СЕРЕДОВИЩА

Розглянемо процес нестаціонарної акустичної взаємодії ідеального пружного тіла з нев"язкою стисливою рідиною. Терміном "ідеальне середовище" користуватимемося у зв"язку з нехтуванням втратами енергії /дисипацією/ в досліджуваних середовищах.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай пружне тіло /відповідно рідина/ займає область Ω_S /відп. Ω_F / точок $x=(x_1,x_2,x_3)$ евклідового простору $\mathbb{R}^3$ з межею Γ_S /відп. Γ_F /. Контакт тіла й рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_C=\Gamma_S\cap\Gamma_F$. Позначимо через $\nu^S=(\nu_1^S,\nu_2^S,\nu_3^S)$ /відп. ν^F / одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_S /відп. Γ_F /; t – час, $0\le t\le T\le +\infty$.

Рух пружного тіла описується вектором переміщень $u=(u_1,u_2,u_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_S u_i'' - \sigma_{ij,j}^S = f_i \qquad \text{в } \Omega_S \times (0,T]; \qquad /1/$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^S(u) = a_{ijkm}\,\varepsilon_{km}(u) \\ \varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j}+u_{j,i})/2 \end{cases} \qquad \text{в } \Omega_S \times (0,T]. \qquad /2/$$

де ρ_S – густина; $\{a_{ijkm}\}$ – модулі пружності; $f=(f_1, f_2, f_3)$ – відома інтенсивність розподілених джерел звуку в тілі. Тут і надалі маємо на увазі підсумовування від I до 3 за індексами, що повторюються, а також $(\ldots)' = \frac{\partial}{\partial t}(\ldots)$; $(\ldots)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ldots)$.

Акустичні хвилі в рідині описуються потенціалом швидкостей [1], що задовольняє хвильове рівняння:

$$\varphi''/(\rho_F c^2) - (\varphi_{,i}/\rho_F)_{,i} = 0 \quad \text{в } \Omega_F \times (0,T], \qquad /3/$$

де ρ_F – густина; c – швидкість звуку в рідині; потенціал φ пов"язаний з компонентами вектора швидкостей рідини v_i та акустичним тиском p співвідношеннями:

$$\varphi_{,i}/\rho_F = v_i; \qquad /4/$$

$$\varphi' = -p. \qquad /5/$$

Позначатимемо надалі індексами U – нерухомі /жорсткі/, p – вільні /або із заданим тиском/ частини меж Γ_S та Γ_F, так що

$$\Gamma_S = \Gamma_{SU} \cup \Gamma_{Sp} \cup \Gamma_C \quad \text{та} \quad \Gamma_F = \Gamma_{FU} \cup \Gamma_{Fp} \cup \Gamma_C,$$

причому Γ_{SU}, Γ_{Fp} та Γ_C – не порожні множини точок. Розглянемо відповідні цим поверхням граничні умови:

$$u_i = 0 \ \text{ на } \Gamma_{SU} \times [0,T], \quad \sigma_{ij}^s \nu_j^s = \hat{\sigma}_i^s \ \text{ на } \Gamma_{Sp} \times [0,T]; \qquad /6/$$

$$\varphi_{,i}/\rho_F = \hat{v}_i \ \text{ на } \Gamma_{FU} \times [0,T], \quad \varphi = 0 \ \text{ на } \Gamma_{Fp} \times [0,T]; \qquad /7/$$

$$u_i' = \varphi_{,i}/\rho_F, \quad \sigma_{ij}^s \nu_j^s = \varphi' \nu_i^s \ \text{ на } \Gamma_C \times [0,T]. \qquad /8/$$

Для визначеності розв"язку задачі акустичної взаємодії задамо початкові умови

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi'(0) = \varphi', \quad \text{в } \Omega_F, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u' \ \text{ в } \Omega_S. \qquad /9/$$

З погляду застосування проекційно-сіткових методів [1] сформульована задача /I/–/9/ є найбільш вдалою математичною моделлю процесу акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною.

2. Варіаційна /слабка/ постановка задачі. Детальніше методика побудови таких постановок описана у праці [6].

Введемо такі простори допустимих функцій:

$$Z=\{z\in\mathcal{H}^1(\Omega_S)^3 \mid z=0 \quad \text{на } \Gamma_{SU}\},\quad H=L^2(\Omega_S)^3;$$

$$\Phi=\{\psi\in\mathcal{H}^1(\Omega_F) \mid \psi=0 \quad \text{на } \Gamma_{FP}\},\quad G=L^2(\Omega_F),$$

де $\mathcal{H}^k(\Omega)$ – простір Соболева функцій, інтегрованих із квадратом в області Ω разом з усіма узагальненими похідними до k-го порядку включно.

Варіаційна постановка задачі має вигляд [2]:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Задано } \ell^S\in L^2(0,T;Z'),\ \ell^F\in L^2(0,T;\Phi'),\ u^0\in Z,\ u^1\in H,\ \psi^0\in\Phi,\\
\psi^1\in G;\\
\text{знайти таку пару } (u,\psi)\in L^2(0,T;Z\times\Phi), \text{ що}\\
m_S(u'',z)-b(z,\psi')+a_S(u,z)=<\ell^S,z>_S,\\
d_F(\psi'',\psi)+b(u',\psi)+g_F(\psi,\psi)=<\ell^F,\psi>_F,\\
a_S(u(0)-u^0,z)=0,\ m_S(u'(0)-u^1,z)=0,\quad \forall z\in Z,\\
g_F(\psi(0)-\psi^0,\psi)=0,\ d_F(\psi'(0)-\psi^1,\psi)=0,\quad \forall\psi\in\Phi.
\end{array}\right. \qquad /10/$$

де вжиті позначення:

$$m_S(u,z)=\int_{\Omega_S}\rho_S u_i z_i\,dx;\quad a_S(u,z)=\int_{\Omega_S}a_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(z)\,dx;$$

$$d_F(\psi,\psi)=\int_{\Omega_F}\psi\psi/(\rho_F c^2)\,dx;\quad g_F(\psi,\psi)=\int_{\Omega_F}\psi_{,i}\psi_{,i}/\rho_F\,dx;$$

$$b(z,\psi)=\int_{\Gamma_C}z_i\psi\nu_i^S\,d\gamma;\qquad <\ell^S,z>_S=\int_{\Omega_S}f_i z_i\,dx+\int_{\Gamma_{SP}}\hat{\sigma}_i z_i\,d\gamma;$$

$$<\ell^F,\psi>_F=\int_{\Gamma_{FP}}\hat{v}_i\psi\nu_i^F\,d\gamma.$$

У праці [3] показана можливість введення норм, квадрати яких пов"язані з білінійними формами задачі /10/ таким чином:

$$\|u\|_Z^2=a_S(u,u),\quad \|u\|_H^2=m_S(u,u),\quad \|u\|_S^2=\|u\|_Z^2+\|u'\|_H^2,$$

$$\|\psi\|_\Phi^2=g_F(\psi,\psi),\quad \|\psi\|_G^2=d_F(\psi,\psi),\quad \|\psi\|_F^2=\|\psi\|_\Phi^2+\|\psi'\|_G^2,$$

причому $\|u\|_S^2$ і $\|\psi\|_F^2$ дають змогу обчислювати подвоєні значення повних енергій пружного тіла та рідини відповідно.

За умови існування розв"язку з /10/ можна отримати вираз закону збереження енергії гідропружної системи

$$\|u\|_S^2+\|\psi\|_F^2=\|u^1\|_H^2+\|u^0\|_Z^2+\|\psi^1\|_G^2+\|\psi^0\|_\Phi^2+2\int_0^t[<\ell^S,u'>_S+<\ell^F,\psi'>_F]\,d\tau. \quad /11/$$

Теорема /про коректність варіаційної задачі/. Існує один і лише один розв"язок (u,ψ) задачі /10/ такий, що

$$(u,\psi)\in L^\infty(0,T;Z\times\Phi),\ (u',\psi')\in L^\infty(0,T;H\times G),\ (u'',\psi'')\in L^\infty(0,T;Z'\times\Phi').$$

причому знайдеться $c = const > 0$ така, що

$$\|u\|_S^2 + \|\psi\|_F^2 \le c\left\{\|u^1\|_M^2 + \|u^0\|_Z^2 + \|\psi^1\|_G^2 + \|\psi^0\|_\Phi^2 + \int_0^t \left[\|l^S\|_{Z'}^2 + \|l^F\|_{\Phi'}^2\right] d\tau\right\}. \qquad /12/$$

Доведення теореми здійснемо конструктивним шляхом.

3. Напівдискретизація Гальоркіна. Нехай $\{Z_h\}$ /відп. $\{\Phi_h\}$/ - послідовність скінченновимірних підпросторів із простору Z /відп. Φ /, така, що $\bigcup_{h>0} Z_h$ /відп. $\bigcup_{h>0} \Phi_h$/ щільна в Z /відп. Φ/ та $\dim Z_h = N \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$, $\dim \Phi_h = M \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$. Для кожного фіксованого $h > 0$ розв"язок $(u_h, \psi_h) \in L^2(0,T; Z_h \times \Phi_h)$ задачі /10/ при $z \in Z_h, \psi \in \Phi_h$ називаємо напівдискретною апроксимацією Гальоркіна розв"язку $(u,\psi) \in L^2(0,T; Z \times \Phi)$. Знайдемо (u_h, ψ_h) у вигляді розкладів [5]:

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} U_i(t) z_i, \quad \psi_h(t) = \sum_{i=1}^{M} \Psi_i(t)\psi_i, \qquad /13/$$

за базами $z_1, \dots, z_N$ /відп. $\psi_1, \dots, \psi_M$ / просторів Z_h /відп. Φ_h/ з невідомими векторами коефіцієнтів $U(t)$ та $\Psi(t)$. Підставляючи /13/ у рівняння напівдискретизованої задачі та послідовно приймаючи $z = z_i$ $(i = 1, \dots, N)$ та $\psi = \psi_i$ $(i = 1, \dots, M)$, приходимо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} M_S & 0 \\ 0 & D_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}''(t) + \begin{bmatrix} 0 & -B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}'(t) + \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} L_S \\ L_F \end{pmatrix}(t),$$

$$\forall t \in (0,T) \qquad /14/$$

$$\begin{bmatrix} M_S & 0 \\ 0 & D_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}'(0) = \begin{pmatrix} U^1 \\ \Psi^1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} U^0 \\ \Psi^0 \end{pmatrix},$$

розв"язок якої /а він існує і єдиний через додатну визначеність матриць $M_S = \{m_S(z_i, z_j)\}_{i,j=1}^N$, $D_F = \{m_F(\psi_i, \psi_j)\}_{i,j=1}^M$ як матриць Грамма систем лінійно незалежних функцій/ внаслідок /13/ однозначно визначає на інтервалі $[0,T]$ напівдискретну апроксимацію (u_h, ψ_h). Рівняння балансу енергії /11/ залишається справедливим і для напівдискретизованої задачі, з чого випливає, що послідовність розв"язків (u_h, ψ_h) має обмежену енергію /оцінка /12//, тому з неї можна вибрати збіжну підпослідовність, межа якої є розв"язком варіаційної задачі /10/ [3].

Таким чином, визначені існування та неперервна залежність від вихідних даних розв"язку варіаційної задачі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. За допомогою оцінки /I2/ та міркувань від супротивного легко переконатися в єдиності розв"язку задачі /IO/, і отже, завершити доведення теореми про коректність.

4. Апріорна оцінка напівдискретних апроксимацій. Теорема /про збіжність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна/. Нехай (u,φ) – розв"язок варіаційної задачі /IO/, причому існує $k \geqslant 1$, для якого справедливі включення:

$$u, u', u'' \in L^2(0,T; Z \cap H^{k+1}(\Omega_S)^3), \quad u' \in H^{k+1}(\Omega_S)^3;$$
$$\varphi, \varphi', \varphi'' \in L^2(0,T; \Phi \cap H^{k+1}(\Omega_F)), \quad \varphi' \in H^{k+1}(\Omega_F).$$

Якщо як підпростори Z_h і Φ_h використовувати простори апроксимацій методу скінченних елементів [6], то послідовність напівдискретних апроксимацій (u_h, φ_h) збігається /відносно енергетичних норм $\|\circ\|_S$, $\|\circ\|_F$ / при $h \to 0$ до розв"язку (u,φ) і при цьому виконується апріорна оцінка швидкості збіжності

$$\|u_h(t) - u(t)\|^2_\Phi + \|\varphi_h(t) - \varphi(t)\|^2_F \leqslant c h^{2k} F(t), \qquad /I5/$$

де $c > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять, а функціонал F має вигляд

$$F(t) = |u(t)|^2_S + |u'(t)|^2_S + |u'|^2_S + |\varphi(t)|^2_F + |\varphi'(t)|^2_F + |\varphi'|^2_F +$$
$$+ \int_0^t \left[|u''(\tau)|^2_S + |\varphi''(\tau)|^2_F \right] d\tau, \qquad |u|_S = \|u\|_{k+1,\Omega_S}, \quad |\varphi|_F = \|\varphi\|_{k+1,\Omega_S}.$$

Для доведення теореми розглянемо похибки напівдискретизації Гальоркіна /I6/ та їх декомпозиції /I7/:

$$e_h = u_h - u, \qquad z_h = \varphi_h - \varphi, \qquad /I6/$$

$$e_h = \varepsilon_h - E_h, \qquad z_h = \rho_h - R_h, \qquad /I7/$$

де E_h та R_h – похибки проектування розв'язку (u,φ) на Z_h та Φ_h; $\varepsilon_h = u_h - \Pi_h u$, $\rho_h = \varphi_h - \Pi_h \varphi$.
Тут оператори $\Pi_h : Z \to Z_h$ та $\Pi_h : \Phi \to \Phi_h$ здійснюють ортогональне /відносно скалярних добутків $a_S(\circ,\circ)$ та $g_F(\circ,\circ)$ /проектування Z і Φ на Z_h і Φ_h відповідно.

Із варіаційної задачі /IO/ та її напівдискретизованого аналога, враховуючи означення /I6/ та /I7/, отримуємо оцінку

$$\|e(t)\|^2_S + \|z(t)\|^2_F \leqslant$$
$$\leqslant c\left\{ \|E'(0)\|^2_Z + \|R'(0)\|^2_\Phi + \|E(t)\|^2_S + \|R(t)\|^2_F + \int_0^t \left[\|E''(\tau)\|^2_Z + \|R''(\tau)\|^2_\Phi \right] d\tau \right\}. \qquad /I8/$$

Урешті, враховуючи, що підпростори Z_h та Φ_h є просторами апроксимацій методу скінченних елементів, вдається оцінити похибки проектування у правій частині нерівності /I8/ і таким чином отримати оцінку /I5/.

5. Дискретизація в часі. Розв"язування задачі Коші /I4/ для дискретизованої за просторовими змінними варіаційної задачі /I0/ побудоване на базі регуляризованої відповідно до дискретного аналогу закону збереження енергії /II/ однокрокової рекурентної схеми:

Задано $\Delta t, \beta, \gamma = const > 0;\ \{U^j, \psi^j\}, \{V^j, P^j\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

Знайти пари $\{U^{j+1}, \psi^{j+1}\}, \{V^{j+1}, P^{j+1}\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ такі, що

$$\begin{bmatrix} 2M_s + \Delta t^2 \beta A_s & \Delta t B^T \\ \Delta t B^T & 2D_F + \Delta t^2 \beta G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V^{j+1/2} \\ P^{j+1/2} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} L_s^{j+1/2} \\ L_F^{j+1/2} \end{pmatrix} -$$

$$-2\begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^j \\ \psi^j \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2M_s + \Delta t^2(\beta - \gamma) A_s & 0 \\ 0 & 2D_F + \Delta t^2(\beta-\gamma) G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V^j \\ P^j \end{pmatrix},$$

де

$$U^{j+1} = U^j + \Delta t\, V^{j+1/2}, \quad \psi^{j+1} = \psi^j + \Delta t\, P^{j+1/2},$$

$$V^{j+1} = 2V^{j+1/2} - V^j, \quad P^{j+1} = 2P^{j+1/2} - P^j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Тут U^m, V^m, ψ^m, P^m є наближеннями до $U(t_m), V'(t_m), \psi(t_m)$ та $\psi'(t_m)$ відповідно, $t_m = m\Delta t \quad (m = 1, 2, \ldots)$, де Δt – крок дискретизації за часом; γ, β – параметри схеми. Застосування енергетичних оцінок дає змогу, за аналогією до попереднього, дослідити стійкість та збіжність такої рекурентної схеми. З"ясовано, що оптимальний порядок збіжності досягається вибором параметрів схеми у вигляді $\gamma = 1/2 + c_* \Delta t$, $\beta > \gamma/2$, де c_* – деяка додатна константа.

6. Заключні зауваження. Доведення існування та єдиності узагальненого розв"язку задачі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною в термінах вектора пружних переміщень і потенціалу переміщень рідини виконане /з використанням дещо іншої техніки доведення/ у праці [7].

Отримані результати дають змогу впевнено застосовувати побудовані чисельні схеми на практиці, хоча й не звільняють від необхідності апостеріорного дослідження точності та збіжності отримуваних результатів.

1. Горлач В.М. Акустическое взаимодействие упругого тела с жидкостью в замкнутой области: Выбор модели. Львов, 1987. 24 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.06.1988, № 1583-Ук88. 2. Горлач В.М. Численное моделирование акустических колебаний упругого тела с жидкостью: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1990. 3. Горлач В.М., Шинкаренко Г.А. Численное моделирование акустических волн в упругих телах с жидкостью: динамические процессы. Львов, 1987. 33 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.12.87, № 3256-Ук87. 4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М., 1988. 6. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв"язування початково-крайових задач. К., 1991. 7. *Boujot J. Mathematical formulation of fluid-structure interaction problems // M^2AN: Model. math. et anal. numer. 1987. Vol. 21. N. 2. P. 239-260.*

Стаття надійшла до редколегії 05.03.93

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач

ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО ТІЛА З РІДИНОЮ.

2. СЕРЕДОВИЩА З ДИСИПАЦІЄЮ

У праці [1] проаналізовані /з погляду застосування проекційно-сіткових методів/ математичні моделі процесу нестаціонарної акустичної взаємодії пружного тіла та ідеальної стисливої рідини для випадку нехтування втратами енергії /дисипацією/. Однак будь-які рухи реальних механічних систем супроводжуються дисипацією енергії, що, як правило, суттєво ускладнює математичне моделювання таких процесів. Спробуємо побудувати та проаналізувати математичну модель акустичної взаємодії пружного тіла та в"язкої стисливої рідини [2].

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай пружне тіло /відповідно рідина/ займає область Ω_S /відп. Ω_F / точок $x=(x_1,x_2,x_3)$ евклідового простору $\mathbb{R}^3$ з межею Γ_S /відп. Γ_F /. Контакт тіла та рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_C=\Gamma_S\cap\Gamma_F$. Позначимо через $\nu^S=(\nu_1^S,\nu_2^S,\nu_3^S)$ /відп. ν^F / одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_S /відп. Γ_F /; t - час $0\le t\le T<+\infty$.