1. Г о р л а ч В.М. Акустическое взаимодействие упругого тела с жидкостью в замкнутой области: Выбор модели. Львов, 1987. 24 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.06.1988, № 1583-Ук88. 2. Г о р л а ч В.М. Численное моделирование акустических колебаний упругого тела с жидкостью: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1990. 3. Г о р л а ч В.М., Ш и н к а р е н к о Г.А. Численное моделирование акустических волн в упругих телах с жидкостью: динамические процессы. Львов, 1987. 33 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.12.87, № 3256-Ук87. 4. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 5. Ф л е т ч е р К. Численные методы на основе метода Галеркина. М., 1988. 6. Ш и н к а р е н к о Г.А. Проекційно-сіткові методи розв"язування початково-крайових задач. К., 1991. 7. *Boujot J. Mathematical formulation of fluid-structure interaction problems // M²AN: Model. math. et anal. numer. 1987. Vol.21. N.2. P.239-260.*

Стаття надійшла до редколегії 05.03.93

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач

ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО ТІЛА З РІДИНОЮ.

2. СЕРЕДОВИЩА З ДИСИПАЦІЄЮ

У праці [1] проаналізовані /з погляду застосування проекційно-сіткових методів/ математичні моделі процесу нестаціонарної акустичної взаємодії пружного тіла та ідеальної стисливої рідини для випадку нехтування втратами енергії /дисипацією/. Однак будь-які рухи реальних механічних систем супроводжуються дисипацією енергії, що, як правило, суттєво ускладнює математичне моделювання таких процесів. Спробуємо побудувати та проаналізувати математичну модель акустичної взаємодії пружного тіла та в"язкої стисливої рідини [2].

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай пружне тіло /відповідно рідина/ займає область Ω_S /відп. Ω_F / точок $x=(x_1,x_2,x_3)$ евклідового простору $\mathbb{R}^3$ з межею Γ_S /відп. Γ_F /. Контакт тіла та рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_C=\Gamma_S\cap\Gamma_F$. Позначимо через $\nu^S=(\nu_1^S,\nu_2^S,\nu_3^S)$ /відп. ν^F / одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_S /відп. Γ_F /; t – час $0\le t\le T\le +\infty$.

Рух пружного тіла описується вектором переміщень $u=(u_1, u_2, u_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_S u_i'' - \sigma^S_{ij,j} = f_i \qquad \text{в } \Omega_S \times (0,T]; \qquad /1/$$

$$\sigma^S_{ij}(u) = a_{ijkm}\,\varepsilon_{km}(u) + c_{ijkm}\,\varepsilon_{km}(u') \qquad \text{в } \Omega_S \times (0,T]; \qquad /2/$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \qquad \text{в } \Omega_S \times (0,T], \qquad /3/$$

де ρ_S – густина; $\{a_{ijkm}\}$ і $\{c_{ijkm}\}$ – модулі пружності та в"язкості; $f=(f_1, f_2, f_3)$ – відома інтенсивність розподілених джерел звуку в тілі. Тут та надалі маємо на увазі підсумовування від 1 до 3 за індексами, що повторюються, а також $(\circ)' = \frac{\partial}{\partial t}(\circ)$; $(\circ)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x}(\circ)$.

Рух рідини описується вектором переміщень $v=(v_1, v_2, v_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_F v_i'' - \sigma^F_{ij,j} = 0 \qquad \text{в } \Omega_F \times (0,T]; \qquad /4/$$

$$\sigma^F_{ij}(v) = [\rho_F c^2 v_{k,k} + (\lambda + \eta - 2\mu/3) v'_{m,m}]\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(v) \qquad \text{в } \Omega_F \times (0,T], \qquad /5/$$

де ρ_F – густина; c – швидкість звуку; η і μ – відповідно коефіцієнти зсувної та об"ємної в"язкості; $\lambda = \varkappa(1/C_V - 1/C_p)$ [3], де $\varkappa$ – коефіцієнт теплопровідності; C_V та C_p – питомі теплоємності рідини при сталих об"ємі й тиску відповідно.

Надалі позначатимемо індексами U – нерухомі /жорсткі/, P – вільні /або з заданим тиском/ частини меж Γ_S та Γ_F, так що

$$\Gamma_S = \Gamma_{SU} \cup \Gamma_{SP} \cup \Gamma_C \quad \text{та} \quad \Gamma_F = \Gamma_{FU} \cup \Gamma_{FP} \cup \Gamma_C,$$

причому Γ_{SU}, Γ_{FU} і Γ_C – не порожні множини точок. Розглядаємо граничні умови, що відповідають цим поверхням:

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_{SU}, \qquad \sigma^S_{ij}\nu^S_j = \hat{\sigma}^S_i \quad \text{на } \Gamma_{SP}; \qquad /6/$$

$$v_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_{FU}, \qquad \sigma^F_{ij}\nu^F_j = \hat{\sigma}^F_i \quad \text{на } \Gamma_{FP}; \qquad /7/$$

$$u_i = v_i, \qquad (\sigma^S_{ij} - \sigma^F_{ij})\nu^S_j = 0 \quad \text{на } \Gamma_C. \qquad /8/$$

Для визначеності розв"язку задаємо початкові умови:

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \text{ в } \Omega_S, \quad v(0) = v^0, \qquad /9/$$
$$v'(0) = v^1 \text{ в } \Omega_F.$$

Таким чином, сформульована задача /1/–/9/ є найбільш загальною математичною моделлю процесу акустичної взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною.

2. Варіаційна /слабка/ постановка задачі. Детальніше методика побудови таких постановок описана у праці [6].

Введемо простори

$$Z=\{z\in \mathcal{H}^1(\Omega_S)^3 \mid z=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{SU}\}, \quad H_S=L^2(\Omega_S)^3,$$

$$R=\{z\in \mathcal{H}^1(\Omega_F)^3 \mid z=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{FU}\}, \quad H_F=L^2(\Omega_F)^3,$$

де $\mathcal{H}^k(\Omega)$ – простір Соболєва функцій, інтегрованих із квадратом в області Ω разом з усіма узагальненими похідними до k-го порядку включно.

Варіаційна постановка задачі має вигляд

$$\begin{cases} \text{Задано } l^S\in L^2(0,T;Z'),\ l^F\in L^2(0,T;R'),\ u^0\in Z,\ u^1\in H_S,\ v^0\in R,\ v^1\in H_F. \\ \text{Знайти таку пару } (u,v)\in L^2(0,T;Z\times R) \text{, що} \\ m_S(u'',z)+c_S(u,z')+a_S(u,z)=<l^S,z>_S, \\ m_F(u'',z)+c_F(u',z)+a_F(v,z)=<l^F,z>_F, \\ a_S(u(0)-u^0,z)=0, \quad m_S(u'(0)-u^1,z)=0, \quad \forall z\in Z, \\ a_F(v(0)-v^0,z)=0, \quad m_F(v'(0)-v^1,z)=0, \quad \forall z\in R, \end{cases} \qquad /10/$$

де вжиті позначення:

$$m_S(u,z)=\int_{\Omega_S}\rho_S u_i z_i\,dx, \quad a_S(u,z)=\int_{\Omega_S}a_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(z)\,dx,$$

$$c_S(u,z)=\int_{\Omega_S}c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(z)\,dx,$$

$$m_F(v,z)=\int_{\Omega_F}\rho_F v_i z_i\,dx, \quad a_F(v,z)=\int_{\Omega_F}\rho_F c^2 v_{i,i} z_{j,j}\,dx,$$

$$c_F(v,z)=\int_{\Omega_F}[(\lambda+\mu-2\mu/3)v_{i,i}z_{j,j}+2\mu\varepsilon_{km}(v)\varepsilon_{km}(z)]\,dx,$$

$$<l^S,z>_S=\int_{\Omega_S}f_i z_i\,dx+\int_{\Gamma_{SP}}\hat{\sigma}_i^S z_i\,d\gamma, \quad <l^F,z>_F=\int_{\Gamma_{FP}}\hat{\sigma}_i^F z_i\,d\gamma.$$

Введемо норми, квадрати яких пов'язані з білінійними формами задачі /10/ таким чином:

$$\|u\|_Z^2=a_S(u,u), \quad \|u\|_{HS}^2=m_S(u,u), \quad |u|_Z^2=c_S(u,u),$$

$$\|v\|_R^2=a_F(v,v), \quad \|v\|_{HF}^2=m_F(v,v), \quad |v|_R^2=c_F(v,v).$$

Нехай $w=(u,v)\in W=Z\times R$ і тоді

$$\|w\|_W^2=\|u\|_Z^2+\|v\|_R^2,\quad \|w\|_H^2=\|u\|_{HS}^2+\|v\|_{HF}^2,\quad |w|_W^2=|u|_Z^2+|v|_R^2,$$

причому $\|w\|_W^2$, $\|w'\|_H^2$ та $\|w'\|_V^2$ дають змогу обчислювати подвоєні значення відповідно потенціальної та кінетичної енергій, а також інтенсивність дисипації енергії гідропружної системи. Доцільно ввести також ще одну фізично виправдану норму, квадрат якої є подвоєним значенням повної енергії системи в момент часу t :

$$\|w(t)\|^2=\|w(t)\|_W^2+\|w'(t)\|_H^2 .$$

За умови існування розв"язку з /10/ можна отримати вираз закону збереження енергії гідропружної системи:

$$\|w\|^2+\int_0^t\|w'\|_W^2d\tau=\|w^0\|_W^2+\|w^1\|_H^2+2\int_0^t[<l^S,u'>_S+<l^F,v'>_F]d\tau. \qquad /11/$$

<u>Теорема</u> /про коректність варіаційної задачі/. Існує один і лише один розв"язок w задачі /10/, такий, що

$$w\in L^\infty(0,T;Z\times R),\quad w'\in L^\infty(0,T;H_S\times H_F),\quad w''\in L^\infty(0,T;Z'\times R')$$

і, крім цього, розв"язок w неперервно залежить від вихідних даних, тобто знайдеться $K=const>0$ така, що

$$\|w\|^2+\int_0^t\|w'\|_W^2\,d\tau\le K\left\{\|w^0\|_W^2+\|w^1\|_H^2+\int_0^t\|l(\tau)\|_*^2\,d\tau\right\}. \qquad /12/$$

<u>Доведення</u> теореми виконаємо конструктивним шляхом.

3. <u>Напівдискретизація Гальоркіна.</u> Нехай $\{W_h=Z_h\times R_h\}$ – послідовність скінченновимірних підпросторів із простору W така, що $\bigcup_{h>0}W_h$ щільна в W та $\dim Z_h=N_h\underset{0}{\to}\infty$, $\dim R_h=M_h\underset{0}{\to}\infty$. Для кожного фіксованого $h>0$ розв"язок $w_h\in L^2(0,T;W_h)$ задачі /10/ при $(z,z)\in W_h$ називаємо півдискретною апроксимацією Гальоркіна розв"язку $w\in L^2(0,T;W)$. Знаходимо w_h у вигляді розкладів [5]

$$w_h(t)=\left(\sum_{i=1}^{N}U_i(t)z_i,\ \sum_{i=1}^{M}V_i(t)z_i\right) \qquad /13/$$

за базою $z_1,\dots,z_N$, $z_1,\dots,z_M$ простору W_h з невідомим вектором коефіцієнтів $Y=\{U,V\}$. Підставляючи /13/ в рівняння напівдискретизованої задачі та послідовно приймаючи $z=z_i\ (i=1,2,\dots,N)$ і $z=z_i\ (i=1,2,\dots,M)$, приходимо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} MY''(t)+CY'(t)+AY(t)=L(t) & \forall\, t\in(0,T),\\ MY'(0)=Y^1, \\ AY(0)=Y^0, \end{cases} \qquad /14/$$

де матриці M, C, A та вектори L, Y^0, Y^1 мають таку структуру

$$M=\begin{bmatrix} M_S & 0 \\ 0 & M_F \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} C_S & 0 \\ 0 & C_F \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & A_F \end{bmatrix},\ L=\begin{pmatrix} L_S \\ L_F \end{pmatrix},\dots$$

Розв"язок задачі /I4/ /а він існує і єдиний через додатну визначеність матриць $M_S=\{m_S(z_i,z_j)\}_{i,j=1}^{N}$, $M_F=\{m_F(z_i,z_j)\}_{i,j=1}^{N}$ як матриць Грамма систем лінійно незалежних функцій/ внаслідок /I3/ однозначно визначає на інтервалі часу $[0,T]$ напівдискретну апроксимацію w_h. Рівняння балансу енергії /II/ залишається справедливим і для напівдискретизованої задачі, з чого випливає, що послідовність розв"язків w_h має обмежену енергію /оцінка /I2//, і тому з неї можна вибрати збіжну підпослідовність, межа якої є розв"язком [6] варіаційної задачі /I0/.

Таким чином, визначені існування та неперервна залежність від вихідних даних розв"язку варіаційної задачі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. За допомогою оцінки /I2/ та міркувань від супротивного легко переконатися в єдиності розв"язку задачі /I0/, і отже, завершити доведення теореми про коректність.

4. <u>Апріорна оцінка напівдискретних апроксимацій.</u>

<u>Теорема</u> /про збіжність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна/. Нехай w – розв"язок варіаційної задачі /I0/, причому існує $k \geqslant 1$, для якого справедливі включення:

$$w, w', w'' \in L^2[0,T; W \cap H^{k+1}(\Omega_S \cup \Omega_F)^3],\ w^1 \in H^{k+1}(\Omega_S \cup \Omega_F)^3.$$

Якщо як простір W_h використовувати простір апроксимацій методу скінченних елементів [4], тоді послідовність напівдискретних апроксимацій w_h збігається /відносно енергетичної норми $\|w\| + \int_0^t |w'(\tau)|_W^2\,d\tau$/ при $h \to 0$ до розв"язку w і при цьому виконується апріорна оцінка швидкості збіжності

$$\|w_h(t) - w(t)\|^2 + \int_0^t |w_h'(\tau) - w'(\tau)|_W^2\,d\tau \leqslant K h^{2k} F(t), \qquad /I5/$$

де $K > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять, а функціонал F має вигляд

$$F(t) = |w^1|^2 + |w(t)|^2 + |w'(t)|^2 + \int_0^t \left[|w'(\tau)|^2 + |w''(\tau)|^2\right] d\tau,$$

де $|w| = \|w\|_{k+1,\Omega_S \cup \Omega_F}$.

Для доведення теореми розглянемо похибку напівдискретизації Гальоркіна /I6/ та її декомпозицію /I7/:

$$e_h = w_h - w; \qquad /16/$$

$$e_h = \varepsilon_h - E_h. \qquad /17/$$

де E_h – похибка проектування розв"язку w на W_h; $\varepsilon_h = u_h - \Pi_h u$. Тут оператор $\Pi_h : W \to W_h$ здійснює ортогональне /відносно скалярних добутків $a_S(\circ,\circ)$ та $a_F(\circ,\circ)$/ проектування W на W_h відповідно.

Із варіаційної задачі /10/ та її напівдискретизованого аналога, враховуючи означення /16/ і /17/, отримуємо оцінку

$$\|\varepsilon_h(t)\|^2 + \int_0^t |\varepsilon_h'(\tau)|_W^2 d\tau \le K\left\{\|E_h'(0)\|_H^2 + \int_0^t \left[|E_h'(\tau)|_W^2 + |E_h''(\tau)|_W^2\right] d\tau\right\}. \qquad /18/$$

Врешті, враховуючи, що підпростір W_h є простором апроксимацій методу скінченних елементів, вдається оцінити похибки проектування в правій частині нерівності /18/ і, таким чином, отримати оцінку /15/.

5. Дискретизація в часі. Розв"язування задачі Коші /14/ для дискретизованої за просторовими змінними варіаційної задачі /10/ побудоване на базі однокрокової рекурентної схеми, яка з використанням матричних позначень допускає таке алгебраїчне зображення [6]:

Задано $\Delta t, \beta, \gamma = const > 0$; $\{U^j\}, \{V^j\} \subset R^{N\times M}$.

Знайти $\{U^{j+1}\}, \{V^{j+1}\} \subset R^{N\times M}$ такі, що

$$\left\{M + \Delta t\gamma A + \frac{1}{2}\Delta t^2 \beta C\right\} V^{j+1/2} =$$

$$= \Delta t\left\{L_{j+1/2} - CU^j\right\} + \left\{M + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta - 2\gamma^2)C\right\}V^j, \qquad /19/$$

де

$$U^{j+1} = U^j + \Delta t V^{j+1/2}, \quad V^{j+1} = 2V^{j+1/2} - V^j, \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Тут U^m, V^m є наближеннями до $Y(t_m)$ і $Y'(t_m)$ відповідно; $t_m = m\Delta t$ $(m = 1, 2, \ldots)$, де Δt – крок дискретизації за часом; γ, β – параметри схеми. Застосування енергетичних оцінок дає змогу, за аналогією до попереднього, дослідити стійкість та збіжність рекурентної схеми. З"ясовано, що оптимальний порядок збіжності досягається вибором параметрів схеми у вигляді $\gamma = 1/2 + c_* \Delta t$, $\beta \ge \gamma$, де c_* – деяка додатна константа.

Наведена тут рекурентна схема /19/ має ряд переваг порівняно з класичною схемою Ньюмарка [7], зокрема дає змогу:

а/ виконувати обчислення зі змінним кроком інтегрування Δt ;
б/ без труднощів задовольняти початкові умови задачі Коші /14/.

1. Горлач В.М. Акустическое взаимодействие упругого тела с жидкостью в замкнутой области: выбор модели. Львов, 1987. 24 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.06.1988, № 1583-Ук88. 2. Горлач В.М. Акустические волны в жидких средах с диссипацией, контактирующих упругими телами // Динам. задачи механики сплошной среды, теорет. и прикл. вопр. вибрационного просвечивания Земли: Материалы докл. регион. конф. Краснодар, 1992. С.53. 3. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М., 1984. 4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М., 1988. 6. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К., 1991. 7. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. 1959. Vol. 85. P. 67-94.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.93

УДК 517.944.947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко, Х.С.Басьюні

ПОСЛІДОВНІ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ МІШАНОЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай D - обмежена область евклідового простору $\mathbb{R}^n$, ∂D - її межа. Розглянемо в D таку мішану задачу:

$$u'_t - Au + f(x,t,u) = F(x,t), \quad x \in D, \quad t \in [0,T]; \qquad /1/$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D; \qquad /2/$$

$$u(x,t)\Big|_{x \in \partial D} = \varphi(x,t), \quad t \in [0,T], \qquad /3/$$

де

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left[a_{ij}(x) \partial_j u(x,t) \right], \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \qquad /4/$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant C_0^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{D}), \quad C_0^2 = const. \qquad /5/$$