а/ виконувати обчислення зі змінним кроком інтегрування Δt ;
б/ без труднощів задовольняти початкові умови задачі Коші /І4/.

І. Г о р л а ч В.М. Акустическое взаимодействие упругого тела с жидкостью в замкнутой области: выбор модели. Львов, 1987. 24 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.06.1988, № 1583-Ук88. 2. Г о р л а ч В.М. Акустические волны в жидких средах с диссипацией, контактирующих упругими телами // Динам. задачи механики сплошной среды, теорет. и прикл. вопр. вибрационного просвечивания Земли: Материалы докл. регион. конф. Краснодар, 1992. С.53. 3. К р а с и л ь н и к о в В.А., К р ы л о в В.В. Введение в физическую акустику. М., 1984. 4. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 5. Ф л е т ч е р К. Численные методы на основе метода Галеркина. М., 1988. 6. Ш и н к а р е н к о Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К., 1991. 7. *Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. 1959. Vol. 85. P. 67-94.*

Стаття надійшла до редколегії І6.02.93

УДК 5І7.944.947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко, Х.С.Басьюні

ПОСЛІДОВНІ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ МІШАНОЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай D – обмежена область евклідового простору $\mathbb{R}^n$, ∂D – її межа. Розглянемо в D таку мішану задачу:

$$u'_t - Au + f(x,t,u) = F(x,t), \quad x \in D, \quad t \in [0,T]; \qquad /1/$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D; \qquad /2/$$

$$u(x,t)\Big|_{x \in \partial D} = \varphi(x,t), \quad t \in [0,T], \qquad /3/$$

де

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left[a_{ij}(x) \partial_j u(x,t) \right], \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \qquad /4/$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq C_0^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad a_{ij} = a_{ji} \in C'(\bar{D}), \quad C_0^2 = const. \qquad /5/$$

Припустимо, що функції f, F, u_0, ψ задовольняють умови існування та єдиності класичного розв"язку задачі /I/–/3/ [I]. Зокрема, функція $f(x,t,u)$ задовольняє умову Ліпшиця по змінній u рівномірно щодо x,t зі сталою L, а $|u_0(x)|>0$ $\forall x \in D$.

Позначимо через $\tilde{u}(x,t)$ – розв"язок такої лінійної мішаної параболічної задачі:

$$\tilde{u}_t' - A\tilde{u} + \kappa(x,t)\tilde{u} = F(x,t), \quad x \in D, \quad t \in [0,T]; \qquad /6/$$

$$\tilde{u}(x,0) = u_0(x), \quad x \in D; \qquad /7/$$

$$\tilde{u}(x,t)\Big|_{x \in \partial D} = \varphi(x,t), \quad t \in [0,T], \qquad /8/$$

де

$$\kappa(x,t) = \frac{f(x,t,u_0(x))}{u_0(x)}. \qquad /9/$$

Близькість розв"язків задач /I/–/3/ та /6/–/8/ дають такі нерівності:

$$\|v\|^2 + B_1\int_0^t \|v\|_A^2\,d\tau \le \frac{L+\mathbb{K}}{\alpha}\int_0^t \|\tilde{u}-u_0\|^2 d\tau; \qquad /10/$$

$$B_1 = 2 - C^2\left[2L + \alpha(L+\mathbb{K})\right] > 0;$$

$$\|v\|^2 + B_2\int_0^t \|v\|^2 d\tau \le \frac{L+\mathbb{K}}{\alpha}\int_0^t \|\tilde{u}-u_0\|^2 d\tau; \qquad /11/$$

$$B_2 = 2C^{-2} - \left[2L + \alpha(L+\mathbb{K})\right] > 0; \qquad /12/$$

$$\|v\|^2 \le g(t) + B_3\int_0^t g(\tau)\exp\{B_3(t-\tau)\}\,dt;$$

$$B_3 = 2L + \alpha(L+\mathbb{K}) - 2C^{-2} > 0,$$

де $g(t) = \frac{L+\mathbb{K}}{\alpha}\int_0^t \|\tilde{u}-u_0\|^2 d\tau,$

$$v = u - \tilde{u}, \quad \|v\|^2 \overset{df}{=\!=} \int_D v^2(x,t)\,dx; \qquad /13/$$

$$\|v\|_A^2 \overset{df}{=\!=} \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\left[\partial_i v(x,t)\right]\left[\partial_j v(x,t)\right]dx; \qquad /14/$$

$$\mathbb{K} \overset{df}{=\!=} \max_{x \in D,\, t \in [0,T]} |\kappa(x,t)|; \qquad /15/$$

C – стала вкладення [I]; α – довільна стала, яку вибирають з умови $B_i > 0$ для кожної з відповідних нерівностей.

Наближений розв"язок $\tilde{u}$ можна уточнити за допомогою такого процесу послідовних наближень:

$$u^{(0)}(x,t) = \tilde{u}(x,t),$$

$$u_t^{(n)} - Au^{(n)} + f(x,t,u^{(n-1)}(x,t)) = F(x,t), \quad x \in D, \; t \in [0,T]; \qquad /16/$$

$$u^{(n)}(x,0) = u_0(x), \quad x \in D,$$

$$u^{(n)}(x,t)\Big|_{x \in \partial D} = \varphi(x,t), \quad t \in [0,T], \quad n \geq 1.$$

Для різниці двох суоідніх наближень $v^{(n)} = u^{(n)} - u^{(n-1)}$ маємо такі рекурентні оцінки:

$$\|v^{(n)}\|^2 + \int_0^t \|v^{(n)}\|_A^2 \, d\tau \leq L^2 C^2 \int_0^t \|v^{(n-1)}\|^2 d\tau; \qquad /17/$$

$$\|v^{(n)}\|^2 + C^{-2} \int_0^t \|v^{(n)}\|^2 d\tau \leq L^2 C^2 \int_0^t \|v^{(n-1)}\|^2 d\tau; \qquad /18/$$

$$\|v^{(n)}\|^2 \leq g_{n-1}(t) + (L\alpha - 2C^{-2}) \int_0^t g_{n-1}(t) \exp\{(L\alpha - 2C^{-2}) \times (t-\tau)\} d\tau; \qquad /19/$$

$$g_{n-1}(t) = \frac{L}{\alpha} \int_0^t \|v^{(n-1)}\|^2 d\tau.$$

Запропонована ітераційна процедура може бути узагальнена також у випадку, коли $f(x, t, u, u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_n})$.

Теоретично ця стаття пов"язана з працями [2, 3].

I. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1973. 2. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 3. Мартиненко М.Д., Басьюні Х. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С.69-72. 4. Мартиненко М.Д., Басьюні Х.С. Лінеаризація для однієї задачі Дарбу другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.36. С.84-85.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.93