УДК 539.3

В.О.Ліхачов, Н.П.Флейшман

ОСЕСИМЕТРИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНОГО ШАРУ ПІД ДІЄЮ ДВОХ ШТАМПІВ

Розглянемо осесиметричну контактну задачу двостороннього тиснення двох коротких гладких штампів на пружний шар завтовшки H .

Граничні умови задачі в безрозмірних циліндричних координатах (r, z) приймаємо такими:

$$u_z(r,0) = f_1(ar) \quad \text{при} \quad r < 1; \qquad /1/$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = 0 \quad \text{при} \quad r > 1; \qquad /2/$$

$$\tau_{zr}(r,0) = 0 \quad \text{при} \quad r > 0; \qquad /3/$$

$$u_z(r,h) = f_2(ar) \quad \text{при} \quad r < R; \qquad /4/$$

$$\sigma_{zz}(r,h) = 0 \quad \text{при} \quad r > R; \qquad /5/$$

$$\tau_{zr}(r,h) = 0 \quad \text{при} \quad r > 0, \qquad /6/$$

де

$$r = \frac{\rho}{a}, \quad R = \frac{b}{a}, \quad h = \frac{H}{a}, \quad z = \frac{\zeta}{a}, \quad a, b -$$

відповідно радіуси областей контакту; $f_1(ar)$, $f_2(ar)$ - функції, що характеризують форму профілів підошв штампів.

Згідно з працею [1], функції напружень вибираємо у вигляді

$$\Psi(r,z) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\left[A(\lambda)\,sh\lambda z + B(\lambda)\,ch\lambda z\right] J_0(\lambda r)\,d\lambda; \qquad /7/$$

$$\Psi_1(r,z) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\left[A_1(\lambda)\,sh\lambda z + B_1(\lambda)\,ch\lambda z\right] J_0(\lambda r)\,d\lambda. \qquad /8/$$

З крайових умов /1/-/6/ отримуємо рівняння для визначення функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$.

$$\sigma_{zz}(r,0) = \left.\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2}\right|_{z=0} = \int_0^\infty \lambda B_1(\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda = 0 \quad (r > 1); \qquad /9/$$

$$\tau_{zr}(r,0) = \left.\frac{\partial}{\partial z}(\Psi + \Psi_1)\right|_{z=0} = \int_0^\infty \left[A + A_1\right] J_0(\lambda r)\,d\lambda = 0 \quad (r > 0); \qquad /10/$$

$$2\mu u_z(r,0)=\int_0^\infty [A_1-(1-2\nu)A]J_0(\lambda r)d\lambda=2\mu f_1(ar) \quad (r<1); \qquad /11/$$

$$\sigma_{zz}(r,h)=\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}+h\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}\Big|_{z=h}=\int_0^\infty \lambda[A sh\lambda h+$$
$$+B_1 ch\lambda h+\lambda h(A ch\lambda h+B sh\lambda h)]J_0(\lambda r)d\lambda=0 \quad (r>R); \qquad /12/$$

$$\tau_{zr}(r,h)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\Psi_1+h\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right]_{z=h}=\int_0^\infty[A_1 ch\lambda h+B_1 sh\lambda h+$$
$$+A ch\lambda h+B sh\lambda h+\lambda h(A sh\lambda h+B ch\lambda h)J_0(\lambda r)d\lambda=0 \quad (r>0); \qquad /13/$$

$$2\mu u_z(r,h)=\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}-(1-2\nu)\frac{\partial\Psi}{\partial z}+h\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\Big|_{z=h}=\int_0^\infty[A_1 ch\lambda h+$$
$$+B_1 sh\lambda h+\lambda h(A sh\lambda h+B ch\lambda h)-(1-2\nu)(A ch\lambda h+B sh\lambda h)]J_0(\lambda r)d\lambda= \qquad /14/$$
$$=2\mu f_2(ar). \qquad (r<R).$$

Система /9/–/14/ зводиться до парних інтегральних рівнянь, які служать для визначення шуканих контактних напружень $\sigma_{zz}(r,0)$ при $r<1$ та $\sigma_{zz}(r,h)$ при $r<R$:

$$\int_0^\infty A J_0(\lambda r)d\lambda=\frac{a\mu}{1-\nu}f_1(ar) \qquad (r<1); \qquad /15/$$

$$-\int_0^\infty \lambda[1+\Phi]AJ_0(\lambda r)d\lambda-\int_0^\infty \lambda H\Phi_1 J_0(\lambda r)d\lambda=0 \quad (r>1); \qquad /16/$$

$$\int_0^\infty H J_0(\lambda r)d\lambda=-\frac{a\mu}{1-\nu}f_2(ar) \qquad (r<R); \qquad /17/$$

$$-\int_0^\infty \lambda[1+\Phi]HJ_0(\lambda r)d\lambda-\int_0^\infty \lambda A\Phi_1 J_0(\lambda r)d\lambda=0 \quad (r>R); \qquad /18/$$

$$2(1-\nu)H(\lambda)=\lambda h(A_1 sh\lambda h+B ch\lambda h)+(1-2\nu)(B sh\lambda h-$$
$$-A_1 ch\lambda h)-A_1 ch\lambda h+B_1 sh\lambda h; \qquad /19/$$

$$\Phi(\lambda)=\frac{sh\lambda h\, ch\lambda h-sh^2\lambda h+\lambda h}{sh^2\lambda h}; \quad \Phi_1(\lambda)=\frac{sh\lambda h+\lambda h\, ch\lambda h}{sh^2\lambda h}.$$

Розглянемо парні інтегральні рівняння /15/, /16/. Приймаємо, що

$$A(1+\Phi)=\int_0^1 \alpha_1(t)\cos\lambda t\,dt; \qquad /20/$$

$$H\Phi_1 = \int_0^1 \beta_1(t)\cos\lambda t\,dt, \qquad /21/$$

де $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$ – нові невідомі функції.

Рівняння /16/ при /20/ та /21/ виконується при довільних функціях $\alpha_1(t)$ та $\beta_1(t)$. При $z<1$ з того ж рівняння маємо

$$a^2\sigma_{zz}(z,0) = -\frac{\alpha_1(t)+\beta_1(t)}{\sqrt{1-z^2}} + \int_z^1 \frac{\alpha_1'(t)+\beta_1'(t)}{\sqrt{t^2-z^2}}dt \quad (z<1). \qquad /22/$$

Рівняння /15/ зводиться до рівняння Фредгольма, з якого визначається функція $\alpha_1(t)$:

$$\alpha_1(z) - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \alpha_1(t)dt\int_0^\infty \frac{\Phi(\lambda)}{1+\Phi}\cos\lambda t\cos\lambda z\,d\lambda = F(z), \qquad /23/$$

де

$$Z = z\sin\theta,$$

$$\int_0^{\pi/2} F(z\sin\theta)d\theta = \frac{a\mu}{1-\nu} f_1(az) \quad (z<1). \qquad /24/$$

Розв"язок рівняння Фредгольма /23/ визначаємо в рядах. Наприклад, нехай функція $f_1(az)$ в /15/ задається як

$$f_1(az) = \delta_{2n} - \varepsilon_{2n} z^{2n} a^{2n}. \qquad /25/$$

Тоді з /24/ одержуємо функцію $F(Z)$

$$F(Z) = \frac{a\mu}{1-\nu}\left[\frac{2}{\pi}\delta_{2n} - \frac{\varepsilon_{2n}}{R_{2n}} a^{2n} Z^{2n}\right], \qquad /26/$$

де

$$R_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,d\theta.$$

Функцію $\alpha_1(Z)$ шукаємо у вигляді ряду

$$\alpha_1(Z) = \sum_{K=0}^\infty \frac{\alpha_1^{(K)}(0)}{K!} Z^K \qquad /27/$$

за умови $\alpha_1(1)=0$ у випадку обмежених контактних напружень /22/.

Підставляючи /27/ в /23/, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення величини $\alpha_1^{(K)}(0)$;

$$\alpha_1(0) = \frac{2}{\pi}\sum_{K=0}^\infty \frac{\alpha_1^{(K)}(0)}{K!}\int_0^N \frac{\Phi}{1+\Phi}d\lambda\int_0^1 t^K\cos\lambda t\,dt + F(0); \qquad /28/$$

$$\alpha_1^{(2P)}(0) = (-1)^P\frac{2}{\pi}\sum_{K=0}^\infty \frac{\alpha_1^{(K)}(0)}{K!}\int_0^N \lambda^{2P}\frac{\Phi}{1+\Phi}d\lambda\int_0^1 t^K\cos\lambda t\,dt + F^{(2P)}(0); \qquad /29/$$

$$\alpha_1^{(2P-1)}(0) = F^{(2P-1)}(0) = 0. \qquad /30/$$

Верхню межу інтегрування N визначаємо з урахуванням поведінки підінтегральної функції для великих значень λ :

$$\lambda^{2P}\frac{\Phi(\lambda)}{1+\Phi(\lambda)} \approx \frac{\lambda^{2P}}{e^{2\lambda h}} \qquad N \geqslant \frac{6}{h}:$$

При $h = 3$, $N = 2$ і в системі /28/ $P = 4$, тобто визначаються $\alpha_1(0)$, $\alpha_1^{II}(0)$, $\alpha_1^{IV}(0)$, $\alpha_1^{VI}(0)$, $\alpha_1^{VIII}(0)$, а останні величини дорівнюють нулю. При $h = 2$, $N = 3$ і в системі /28/ $P = 6$.

Парні рівняння /I7/, /I8/ розв"язуємо аналогічно, як і рівняння /I5/, /I6/.

Приймаємо, що

$$H(1+\Phi) = \int_0^R \alpha_2(t)\cos\lambda t dt; \qquad /3I/$$

$$\Lambda\Phi_1 = \int_0^R \beta_2(t)\cos\lambda t dt, \qquad /32/$$

де $\alpha_2(t)$, $\beta_2(t)$ – нові шукані функції.

Рівняння /I8/ виконується при довільних функціях $\alpha_2(t)$ та $\beta_2(t)$. При $z<R$ маємо вираз для контактних напружень

$$a^2\sigma_{zz}(z,h) = -\frac{\alpha_2(R)+\beta_2(R)}{\sqrt{R^2-z^2}} + \int_z^R \frac{\alpha_2'(t)+\beta_2'(t)}{\sqrt{t^2-z^2}}dt. \qquad /33/$$

Рівняння /I7/ можна звести до розв"язку рівняння Фредгольма:

$$\alpha_2(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^R \alpha_2(t)dt\int_0^\infty \frac{\Phi_1}{1+\Phi}\cos\lambda t\cos\lambda z d\lambda + E(z), \qquad /34/$$

де

$$\int_0^{\pi/2} E(z\sin\theta)d\theta = -\frac{a\mu}{1-\nu} f_2(az). \qquad /35/$$

Наприклад, при

$$f_2(az) = \delta_n^* - \varepsilon_n^* a^n z^n \quad E(z) = -\frac{a\mu}{1-\nu}\left[\frac{2}{\pi}\delta_n^* - \frac{\varepsilon_n^*}{R_n}a^n z^n\right] \qquad /36/$$

Рівняння Фредгольма /34/ розв"язується методом рядів, як і рівняння /23/:

$$\alpha_2(z) = \sum_{K=0}^\infty \frac{\alpha_2^{(K)}(0)}{K!}z^K, \quad \alpha_2(R) = 0.$$

Щоб знайти контактні напруження за формулами /22/ та /33/, потрібно визначити функції $\beta_1(t)$ та $\beta_2(t)$ за умови, що $\beta_1(1)$ та $\beta_2(R)$ дорівнюють нулю у випадку обмежених контактних напружень. З /20/ та /32/, з /21/ та /31/ отримуємо рівняння для визначення $\beta_1(t)$ та $\beta_2(t)$ за умов, що $\beta_1(1)=\beta_2(R)=0$:

$$\int_0^1 \beta_1(t)\cos\lambda t\,dt=\frac{\Phi_1}{1+\Phi}\int_0^R \alpha_2(t)\cos\lambda t\,dt; \qquad /37/$$

$$\int_0^R \beta_2(t)\cos\lambda t\,dt=\frac{\Phi_1}{1+\Phi}\int_0^1 \alpha_1(t)\cos\lambda t\,dt. \qquad /38/$$

Інтегральні рівняння/ /37/, /38/ розв"язуємо методом колокації, зображаючи $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ у вигляді рядів і враховуючи, що $0<\lambda<N$:

$$\beta_1(t)=\sum_{K=1}^{m}\frac{\beta_1^{(K)}(0)}{K!}(t^{2K}-1),\quad \beta_2(t)=\sum_{K=1}^{n}\frac{\beta_2^{(K)}(0)}{K!}(t^{2K}-R^{2K}), \qquad /39/$$

де величини m та n залежать від товщини шару h $(\lambda h<6)$.

Для визначення радіусів a, b областей контакту використовуємо умови рівноваги штемпів:

$$-\frac{P}{2\pi}=a^2\int_0^1 \sigma_{zz}(z,0)\rho\,d\rho; \qquad /40/$$

$$-\frac{P}{2\pi}=a^2\int_0^R \sigma_{zz}(z,h)\rho\,d\rho, \qquad /41/$$

де P – величина стискуючих сил.

1. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Об одной из форм решений уравнений теории упругости // Динамика и прочность машин. 1974. Вып. 19. С.37-42. 2. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Общее представление решений уравнений теории упругости в цилиндрических координатах // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1975. С.35-41. 3. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 11.06.92