УДК 539.3

Н.П.Флейшман, В.О.Ліхачов

ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Розглянемо круглу ізотропну пластинку сталої товщини h, край якої підкріплений тонким пружним опорним ребром з іншого матеріалу. На конструкцію діють зовнішні нормальні динамічні напруження $q(t)$. Математичною моделлю цієї осесиметричної задачі стійкості служить рівняння [1].

$$D\Delta\Delta w + hp(t)\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad /1/$$

де $w(r,t)$ – прогин; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – циліндрична жорсткість; ρ – густина матеріалу пластинки; t – час; Δ – оператор Лапласа в полярних координатах; $p(t)$ – динамічні напруження, які діють з боку ребра на пластинку. Якщо нехтуємо масою ребра, маємо [2]

$$p(t) = q(t)/\delta, \qquad /2/$$

де $\delta = 1 + (1-\nu)E_1(F + JR^{-2})/ERh$; E_1 – модуль Юнга матеріалу ребра; R – радіус його осі; F – площа його нормального перетину; J – момент інерції перетину відносно осі, яка збігається з радіусом пластинки.

До рівняння /1/ необхідно додати умови спряження [2]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu + \delta_1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \qquad /3/$$

де $\delta_1 = E_1 J/RD$, та умови в центрі пластинки:

$$|w| < \infty, \quad \partial w/\partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \qquad /4/$$

Розв"язок задачі шукаємо у вигляді

$$w(r,t) = W(r)\cdot T(t),$$

де функції $W(r)$ та $T(t)$ є розв"язками рівнянь:

$$\Delta W + \beta^2 W = 0; \qquad /5/$$

$$\ddot{T} + \varphi(t)T = 0. \qquad /6/$$

З рівняння /I/ одержуємо

$$\varphi(t) = \beta^2 \left[D\beta^2 - hp(t)\right] / \rho h. \qquad /7/$$

Розв"язком рівняння Бесселя нульового порядку /5/ з урахуванням умов /4/ є

$$W(r) = C J_0(\beta r), \qquad /8/$$

де C - довільна стала; J_0 - функція Бесселя дійсного аргументу першого роду. Параметр β визначається з першої умови /3/ як корінь трансцендентного рівняння

$$J_0(\beta R) = 0. \qquad /9/$$

Друга умова /3/, очевидно, тотожно задовольняється лише якщо

$$\delta_1 = 1 - \nu. \qquad /10/$$

Умова /10/ накладає обмеження на фізико-механічні параметри підкріплювального ребра, для якого функція /8/ є точним розв"язком задачі. Проте зауважимо, що співвідношення /13/ задовольняє досить широкий клас підкріплювальних ребер, фізико-механічні характеристики яких можуть змінюватися в широкому діапазоні. Крім цього, якщо врахувати, що при збільшенні динамічності навантаження умови закріплення краю пластинки мало впливають на її стійкість [3, 4], то розв"язок /8/ можна застосувати й тоді, коли величина δ_1 незначно відрізняється від $(1-\nu)$. Побудований точний розв"язок можна використати як еталон для оцінки точності наближених розв"язків задач динамічної стійкості.

Отже, задача стійкості круглої пластинки з крайовим ребром жорсткості зводиться до дослідження обмеженості розв"язків рівняння /6/-/7/, яке можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 T(\hat{t})}{d\hat{t}^2} + \left[f - q\varphi_1(\hat{t})\right] T(\hat{t}) = 0, \qquad /11/$$

де

$$\hat{t} = t/t_0; \quad f = \frac{t_0^2 \beta^2}{\rho h}\left(D\beta^2 - \frac{h}{\delta} q_0\right); \quad q = \frac{t_0^2 \beta^2}{\rho h \delta} q_1;$$

$$q(t) = q_0 + q_1 \varphi_1(\hat{t}); \qquad /12/$$

β - найменший корінь рівняння /9/.

Приклад. Розглянемо випадок, коли функція навантаження $\varphi_1(\hat{t})$ є періодичною функцією кусково-лінійного типу:

$$\varphi_1(\hat{t}) = \begin{cases} 2\hat{t} - (4n+1), & \hat{t} \in [2n, 2n+1] \\ (4n+3) - 2\hat{t}, & \hat{t} \in [2n+1, 2n+2] \end{cases} \qquad /13/$$

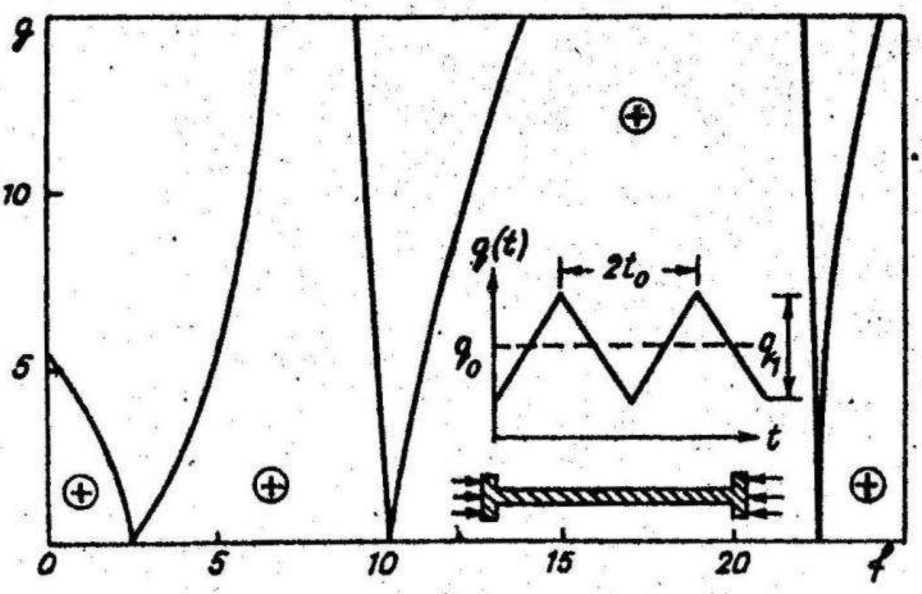
$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для дослідження обмеженості розв"язку $T(\hat{t})$ рівняння /11/ залежно від параметрів f та q використаємо теорему Флоке [5]. Можна довести, що в цьому випадку, згідно з теоремою Флоке, функція $T(\hat{t})$ обмежена, якщо виконується умова

$$-1 < T_2(1) \cdot T_2'(1) < 0, \qquad /14/$$

де $T_1(\hat{t})$ і $T_2(\hat{t})$ – розв"язки рівняння /11/, /13/, які задовольняють початкові умови

$$T_1(0) = 1, \quad T_1'(0) = 0; \quad T_2(0) = 0, \quad T_2'(0) = 1. \qquad /15/$$



(же, дослідження обмеженості функції $T(\hat{t})$ зводиться до розв"язування задач Коші /11/, /15/ для визначення функцій $T_1(\hat{t})$ і $T_2(\hat{t})$ на відрізку $\hat{t} \in [0, 1]$ та до перевірки виконання умови /14/.

Результати обчислень /методом степеневих рядів/ подані на рисунку. для перших трьох областей нестійкості. Лінії, що обмежують ці області, близькі до прямих. Області стійкості відмічені знаком плюс. Для значень $q < 0$ області стійкості, очевидно, симетричні відносно осі Of. Для невеликих значень параметра q, тобто для малих амплітуд q_1, коливання пластинки стійкі за винятком околів точок $f = (\pi h/2)^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Для значень $f < 0$, тобто коли статична частина навантаження перевищує мінімальне критичне навантаження, коливання пластинки, очевидно, будуть нестійкими.

1. Агамиров В.Л. Динамические задачи нелинейной теории оболочек. М., 1990. 2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. 3. Огибалов П.М., Грибанов В.Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. М., 1968. 4. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., 1964. 5. *Azi-Gur J., Singer J., Weller T. Dynamic buckling of plates under longitudinal impact // Isr. J. Technol. 1981. Vol. 19. N 1/2. P. 57-64.*

Стаття надійшла до редколегії 11.06.92