

МАТЕМАТИЧНА
БІБЛІОТЕКА

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

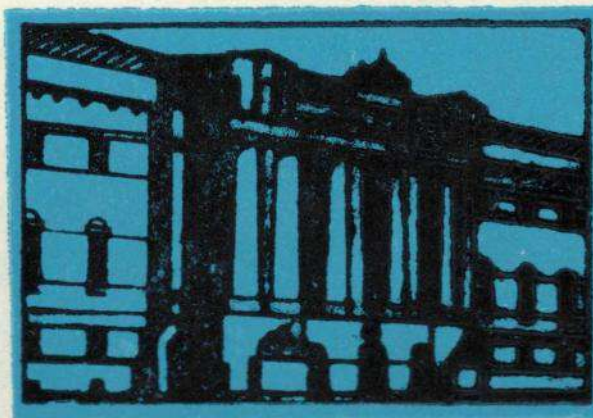
ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

39

1993



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

**ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА**

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 39

**ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ**

**ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО «СВІТ»
1993**

У Віснику містяться статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язування рівнянь математичної фізики і задач оптимізації.

Для наукових працівників, викладачів і студентів старших курсів.

Бібліограф. у кінці статей.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. Я.Г.Савула /відп. ред./, канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Я.Бергін, канд. фіз.-мат. наук, доц. В.С.Височанський, канд. фіз.-мат. наук, доц. І.І.Чулик, канд.фіз.-мат. наук, доц. Ю.М.Щербина /відп. секр./.

Відповідальний за випуск доц. Ю.М.Щербина

Адреса редколегії: 290000 Львів, вул.Університетська, 1.
Університет, кафедра теорії оптимальних процесів. Тел.: 79-47-91.

М.Я.Бертіш, С.М.Шахно

ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ
НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Нелінійні задачі найменших квадратів виникають при оцінюванні параметрів і перевірці гіпотез у математичній статистиці, параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, в керуванні різними об'єктами, процесами тощо.

У цій праці пропонується метод для розв'язування систем нелінійних рівнянь у сенсі найменших квадратів, тобто рівняння

$$F'(x)^T F(x) = 0, \quad /1/$$

де $F: D \subset R^n \rightarrow R^m$ ($m \geq n$).

Ітераційна формула цього методу має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k)]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F(\bar{x}_k), \quad /2/$$

$$\bar{x}_k = (1-\mu)x_k + \mu\psi(x_k), \quad k=0,1,\dots; \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

де $\psi: R^n \rightarrow R^m$ - деякий допоміжний оператор, для якого

$$x^* = \psi(x^*). \quad /3/$$

Легко бачити, що при $\mu = 0$ отримуємо відомий метод Гауса-Ньютона [1]. За допомогою параметра μ можна вибрати метод із найбільшою швидкістю збіжності серед методів класу /2/.

Розглянемо деякі варіанти вибору оператора $\psi(x)$.

I. Випадок з нульовою нев'язкою: $F(x_*) = x_* - \psi(x_*) = 0$.

Умови і швидкість збіжності ітерацій /2/ встановлюються теоремою.

Теорема I. Нехай $F: R^n \rightarrow R^m$ ($m \geq n$) і функція $f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$ двічі неперервно диференційовна на відкритій випуклій множині $D \subset R^n$. Припустимо, що $F''(x) \in Lip_\mu(D)$, $\|\psi'(x)\| \leq \alpha$, $\|\psi''(x)\| \leq L$ іх $x \in D$, а також що існують $x_* \in D$ і $\lambda \geq 0$ такі, що $F'(x_*)^T F(x_*) = 0$, λ - найменше власне число для $F'(x_*)^T F'(x_*)$.

Тоді існує z_0 таке, що для всіх $x_0 \in \Omega(x_*, z_0)$ послідовність, породжена методом /2/, коректно визначена, збігається до x_* і задовольняє нерівності

$$z_n = \|x_n - x_*\| \leq (h_0 z_0)^{2^n - 1} z_0, \quad /4/$$

$$\text{де } h_0 = \frac{1+\alpha}{2\lambda} \left[\frac{N}{3} z_0 \mu^2 (1+\alpha)^2 + L(|2\mu-1| + 2\mu\alpha) \right] < \frac{1}{z_0},$$

$$z_0 = \|x_0 - x_*\|, \quad \Omega(x_*, z_0) = \{x: \|x - x_*\| < z_0\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доведення. Виходячи з /2/, шляхом тотожних перетворень отримуємо

$$\begin{aligned} x_1 - x_* &= x_0 - x_* - [F'(x_0)^T F'(x_0)]^{-1} F'(x_0)^T F(x_0) = -[F'(x_0)^T F'(x_0)]^{-1} \times \\ &\times F'(\bar{x}_0)^T \left[\int_0^1 (F''(\bar{x}_0 + \tau(x_0 - \bar{x}_0)) - F''(\bar{x}_0 + \tau(x_* - \bar{x}_0))) (1-\tau) d\tau (x_0 - \bar{x}_0)^2 + \right. \\ &\left. + \int_0^1 F''(\bar{x}_0)^T \tau(x_* - \bar{x}_0) (1-\tau) d\tau (x_0 - x_*) (x_0 - 2\bar{x}_0 + x_*) \right]. \end{aligned} \quad /5/$$

Оцінюємо норми виразів $\|x_0 - \bar{x}_0\|$, $\|\bar{x}_0 - x_*\|$, $\|x_0 - 2\bar{x}_0 + x_*\|$:

$$\|x_0 - \bar{x}_0\| = \|x_0 - (1-\mu)x_0 - \mu\psi(x_0)\| = \|\mu(\psi(x_0) - x_0)\| =$$

$$= \|\mu(\psi(x_0) - \psi(x_*) + x_* - x_0)\| \leq \mu(1+\alpha)\|x_0 - x_*\|; \quad /6/$$

$$\|x_0 - x_*\| \leq (1-\mu + \mu\alpha)\|x_0 - x_*\|; \quad /7/$$

$$\|x_0 - 2\bar{x}_0 + x_*\| \leq (|2\mu-1| + 2\mu\alpha)\|x_0 - x_*\|. \quad /8/$$

Із /5/ за допомогою оцінок /6/-/8/ запишемо

$$\|x_1 - x_*\| \leq \frac{1+\alpha}{2\lambda} \left[\frac{N}{3} \|x_0 - x_*\|^3 \mu^2 (1+\alpha)^2 + L(|2\mu-1| + 2\mu\alpha) \|x_0 - x_*\|^2 \right].$$

Далі шляхом математичної індукції отримуємо оцінку /4/.

Теорема доведена.

Дослідимо вплив параметра μ на швидкість збіжності ітераційного процесу /2/. Швидкість збіжності можна підвищувати двома шляхами: збільшенням порядку збіжності і зменшенням знаменника збіжності $h_0 z_0$. У знаменник $h_0 z_0$ входить величина $\lambda(\mu) = |2\mu-1| + 2\mu\alpha$, найменше значення якої досягається при $\mu = 0,5$ у випадку $\alpha < 1$ і при $\mu = 0$ у протилежно-

му випадку. Тоді ітераційний процес матиме найбільшу швидкість збіжності і найменш короткі умови на вибір початкового наближення x_0 /ширша область збіжності/. Як бачимо з /4/, при достатньо малих значеннях z_0 процес /2/ із значенням $\mu=0,5$ і $\alpha < 1$ має вищу швидкість збіжності, ніж метод Гауса-Ньютона.

2. Випадок $F(x_*) \neq 0$. Умову /3/ задовольняє оператор

$$\varphi(x) = x - \beta F'(x)^T F(x), \quad \beta > 0,$$

який відповідає градієнтному методу мінімізації функціоналу

$$f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x).$$

Теорема 2. Нехай виконуться умови теореми 1 і $\|F'(x)\| \leq \alpha$,

$$\|(F'(x) - F'(x_*))^T F(x_*)\| \leq \zeta \|x - x_*\| \quad /9/$$

для всіх $x_0 \in D$, причому $\lambda > \zeta(1+\delta) \geq 0$, $\delta = \mu\beta(\alpha^2 + \zeta)$.

Тоді для довільного $c \in (1, \lambda/(\zeta(1+\delta)))$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $x_0 \in \Omega(x_*, \varepsilon)$ послідовність /2/ коректно визначена, збігається до x_* і задовольняє нерівності

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{c\zeta(1+\delta)}{\lambda} \|x_k - x_*\| + \frac{c\alpha}{2\lambda} \left[\frac{N}{3} \|x_k - x_*\| \delta^2 + L(1+2\delta) \right] \|x_k - x_*\|^2; \quad /10/$$

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{c\zeta(1+\delta) + \lambda}{2\lambda} \|x_k - x_*\| < \|x_k - x_*\|. \quad /11/$$

Доведення. Нехай c - фіксована константа з інтервалу $(1, \lambda/(\zeta(1+\delta)))$. Тоді існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що

$$\|[F'(\bar{x}_0)^T F'(\bar{x}_0)]^{-1}\| \leq \frac{c}{\lambda} \quad \text{для всіх } x_0 \in \Omega(x_*, \varepsilon_1).$$

/12/

Нехай

$$\varepsilon = \min \left\{ \varepsilon_1, \frac{\lambda - c\zeta(1+\delta)}{c\alpha \left[\frac{N}{3} \|x_0 - x_*\| \delta^2 + L(1+2\delta) \right]} \right\}. \quad /13/$$

Тоді на першому кроці x_1 коректно визначене і справедлива рівність

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_* &= [F'(\bar{x}_n)^T F'(\bar{x}_n)]^{-1} F'(\bar{x}_n)^T \left[\int_0^1 (F''(\bar{x}_n + \tau(x_n - \bar{x}_n)) - \right. \\ &\quad \left. - F''(\bar{x}_n + \tau(x_* - \bar{x}_n))) (1-\tau) d\tau (x_n - \bar{x}_n)^2 + \int_0^1 F''(\bar{x}_n + \tau(x_* - \bar{x}_n)) \right. \\ &\quad \left. \cdot (1-\tau) d\tau (x_n - x_*) (x_n - 2\bar{x}_n + x_*) \right] + (F'(\bar{x}_n) - F'(x_*))^T F(x_*), \end{aligned} \quad /14/$$

де $n=0$.

Оскільки

$$F'(x)^T F(x) = F'(x)^T F(x) - F'(x_*)^T F(x_*) = F'(x)^T F'(\tilde{x})^T (x - x_*) + \\ + (F'(x)^T - F'(x_*)^T) F(x_*), \quad (\tilde{x} = x + \theta(x - x_*), \quad 0 \leq \theta \leq 1), \\ \text{то } \|F'(x)^T F(x)\| \leq (\alpha^2 + \beta) \|x - x_*\| \quad \text{для всіх } x \in \Omega(x_*, \varepsilon).$$

Тепер отримуємо оцінки:

$$\|\bar{x}_n - x_n\| \leq \mu\beta(\alpha^2 + \beta) \|x_n - x_*\| = \delta \|x_n - x_*\|; \quad /15/$$

$$\|\bar{x}_n - x_*\| \leq (1 + \mu\beta(\alpha^2 + \beta)) \|x_n - x_*\| = (1 + \delta) \|x_n - x_*\|; \quad /16/$$

$$\|x_n - 2\bar{x}_n + x_*\| \leq (1 + 2\mu\beta(\alpha^2 + \beta)) \|x_n - x_*\| = (1 + 2\delta) \|x_n - x_*\|. \quad /17/$$

Із рівності /14/, враховуючи оцінки /12/, /15/-/17/, отримуємо для $n = 0$

$$\|x_1 - x_*\| \leq \frac{c\beta(1+\delta)}{\lambda} \|x_0 - x_*\| + \frac{c\alpha}{2\lambda} \left[\frac{N}{3} \|x_0 - x_*\|^3 \delta^2 + \right. \\ \left. + L \|x_0 - x_*\|^2 (1 + 2\delta) \right], \quad /18/$$

що доводить /10/ для $k=0$.

Із /13/ і /18/ маємо

$$\|x_1 - x_*\| \leq \|x_0 - x_*\| \left\{ \frac{c\beta(1+\delta)}{\lambda} + \frac{c\alpha}{2\lambda} \left[\frac{N}{3} \|x_0 - x_*\| \delta^2 + L(1+2\delta) \right] \right\} \leq \\ \leq \|x_0 - x_*\| \left[\frac{c\beta(1+\delta)}{\lambda} + \frac{\lambda - c\beta(1+\delta)}{2\lambda} \right] = \frac{c\beta(1+\delta) + \lambda}{2\lambda} \|x_0 - x_*\| < \|x_0 - x_*\|,$$

що доводить /11/ для $k=0$. Далі доведення здійснюємо індукцією.

Наслідок. Нехай виконані умови теореми 2. Якщо $F(x_*) = 0$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $x_0 \in \Omega(x_*, \varepsilon)$ послідовність $\{x_k\}$, породжена методом /2/, коректно визначена і збігається квадратично до x_* .

Доведення. Приймаючи у /9/ $\beta = 0$, з /10/ отримуємо нерівність, яка свідчить про квадратичну збіжність послідовності $\{x_k\}$ до x_* .

З теореми 2 бачимо, що на багатьох задачах з невідродженою матрицею $F'(x_*)^T F'(x_*)$ метод /2/ має невисоку локальну збіжність, а на деяких з них він взагалі локально розбігається. Із /9/ бачимо, що параметр β є абсолютною мірою нелінійності величини нев'язки в розв'язку задачі, а з /10/ - що $\frac{\beta(1+\delta)}{\lambda}$ можна розглядати як відносну міру нелінійності і величини нев'язки в розв'язку задачі. З теореми /2/ випливає, що швидкість збіж-

ності методу /2/ зменшується із зростанням відносної нелінійності чи відносної нев'язки в розв'язку задачі. Якщо одна з цих двох величин надто велика, то метод може взагалі розбігатися.

Недолік методу /2/ полягає в тому, що він не є коректно визначеним, якщо $F'(x_k)$ не має певного стовпцевого рангу $|F'(x_k)^T F'(x_k)|$ невизначена/. У цьому випадку доцільно використовувати метод

$$x_{k+1} = x_k - [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k) + \gamma_k I]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F(x_k),$$

$$\bar{x}_k = (1-\mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad /19/$$

частковим випадком якого при $\mu = 0$ є відомий метод Левенберга-Маркварта [1].

Властивості локальної збіжності методу /19/ аналогічні властивостям методу /2/ і наведені в теоремі 3.

Теорема 3. Нехай виконані умови теореми 2 і послідовність невід'ємних дійсних чисел обмежена зверху числом δ . Якщо $5(1+\delta) < \lambda$, то для довільного $c \in (1, \frac{\lambda+\delta}{5(1+\delta)+\delta})$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $\Omega(x_*, \varepsilon)$ послідовність, породжена методом /19/, коректно визначена і задовольняє співвідношення

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{c(5(1+\delta)+\delta)}{\lambda+\delta} \|x_k - x_*\| + \frac{c\alpha}{2(\lambda+\delta)} \left[\frac{N}{3} \|x_k - x_*\| \delta^2 + L(1+2\delta) \right] \|x_k - x_*\|^2$$

$$\text{і } \|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{c(5(1+\delta)+\delta)+(\lambda+\delta)}{2(\lambda+\delta)} \|x_k - x_*\| < \|x_k - x_*\|.$$

Якщо $F(x_*) = 0$ і $\gamma_k = O(\|F'(x_k)^T F(x_k)\|)$, то $\{x_k\}$ збігається квадратично до x_* .

Ітераційний процес /19/ можна розглядати як збурення процесу /2/. Тому доведення теореми легко здійснити за схемою доведення теореми 2 з використанням результатів праці /2/.

І. Д е н н и с Дж., Ш н а б е л ь Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М., 1988. 440 с.
2. Ш а х н о С.М. Построение и исследование некоторых методов типа Ньютона-Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. К., 1988. 17 с.

Стаття надійшла до редколегії 06.04.93

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

І. Постановка задачі. У даній статті розглядаємо чисельні методи розв'язування задач оптимального керування процесами, які описуються системами звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t, \xi), \quad 0 \leq t \leq T; \quad /1/$$

$$x(0) = x_0, \quad /2/$$

де $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $\xi \in R^l$; t - час.

Вектор-функція $x(t)$ характеризує рух об'єкта /перобіг процесу тощо/ залежно від часу. Її компоненти називають фазовими координатами об'єкта. За допомогою компонент вектор-функції $u(t)$, які називають керуваннями, здійснюють керування рухом об'єкта. Вектор ξ - керуючі параметри - визначає стан системи і є сталим на всьому проміжку $[0, T]$. Функції $f_i(x, u, \xi, t)$, $i = \overline{1, n}$, що описують внутрішню будову об'єкта і враховують різноманітні зовнішні фактори, вважаються відомими.

Надалі прийmemo, що $x(t)$, $f(x, u, \xi, t)$ - неперервно диференційовні за сукупністю своїх аргументів. Керування $u(t)$ шукатимемо в класі кусково-неперервних функцій.

На керування, фазові координати та керуючі параметри можна накладати різноманітні обмеження:

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= 0, & g_T(x(T), \xi, T) &\leq 0, \\ g_0(\xi) &\leq 0, & v(x(t), u(t), \xi, t) &= 0, \\ v_T(x(T), \xi, T) &= 0, & g(x(t), u(t), \xi, t) &\leq 0, \\ \int_0^T \tilde{v}(x(t), u(t), \xi, t) dt + V(x(T), \xi, T) &= 0, \\ \int_0^T \tilde{g}(x(t), u(t), \xi, t) dt + G(x(T), \xi, T) &\leq 0. \end{aligned} \quad /3/$$

Тут вектор-функції $v_0, g_0, v_T, g_T, v, g, \tilde{v}, \tilde{g}, V, G$ вважаються неперервно диференційовними за сукупністю своїх аргументів.

Набір $(x(\cdot), u(\cdot), \xi, T)$ називається допустимим, якщо керування $u = u(\cdot) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ визначене і кусково-неперервне на інтервалі $[0, T]$ та виконуються умови /1-4/.

Нехай множина допустимих наборів непорожня і на ній заданий функціонал

$$F(x(\cdot), u(\cdot), \xi, T) = \int_0^T f_0(x(t), u(t), \xi, T) dt + \Phi(x(T), \xi, T). \quad /4/$$

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в тому, щоб мінімізувати функціонал /4/ на множині допустимих наборів.

2. Дискретна задача оптимального керування. Ефективним засобом дослідження задач оптимального керування є принцип максимуму Понтрягіна [4], який дає необхідні умови оптимальності в даних задачах.

На базі принципу максимуму побудована велика кількість методів розв'язування задачі оптимального керування [1, 2, 3]. Однак із використанням принципу максимуму на даний час вдається розв'язати лише досить вузький клас задач. Тому актуальним залишається розв'язування задач оптимального керування через їх дискретні апроксимації. Це пов'язане з тим, що дискретна задача оптимального керування є по суті задачею нелінійного програмування, а для розв'язування останньої розроблено потужний математичний і програмний апарат.

Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на $q-1$ ділянок точками

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_q = T.$$

Відрізок $[t_i, t_{i+1}]$ називатимемо $i = \overline{M}$ інтервалом інтегрування, а його величину позначимо через $h_i = t_{i+1} - t_i$.

Введемо позначення:

$$t_i = \sum_{j=1}^{i-1} h_j, \quad x_i = x(t_i), \quad u_i = u(t_i), \\ z_i = [x_i, u_i, \xi, t_i], \quad i = \overline{1, q-1}, \\ f(z_i) = f(x_i, u_i, \xi, t_i).$$

Проінтегруємо формулу /1/ за схемою Рунге-Кутти:

$$x_{i+1} = x_i + h_i \sum_{j=1}^p \alpha_j f(z_i^j). \quad /5/$$

Тут
$$z_i^j = [x_i^j, u_i^j, \xi, t_i^j], \quad u_i^j = u(t_i^j),$$

$$x_i^j = x_i + \beta_{j-1} h_i f(z_i^{j-1}), \quad t_i^j = t_i + \beta_{j-1} h_i, \quad /6/$$

де α_j, β_{j-1} - деякий набір чисел, причому всі $0 \leq \beta_{j-1} \leq 1$ і $\beta_0 = 0$.
 а тому значення векторів Z^0 не суттєві. У /5/, /6/ і далі
 в цій праці індекси i та j набувають цілочисельних значень відповідно з інтервалів $[1, q-1]$ та $[1, p]$.

Параметри ρ, α_j та β_{j-1} визначають різні методи чисельного інтегрування системи /1/, які належать до сімейства методів Рунге-Кутти. Похибка інтегрування системи /1/ на i -му кроці оцінюється різницею $\eta(h_i) = x(t_{i+1}) - x_{i+1}$, де $x(t)$ - розв'язок системи /1/-2/. Якщо $f(Z)$ - достатньо гладка функція своїх аргументів, то функцію $\eta(h_i)$ можна виразити у вигляді ряду Тейлора:

$$\eta(h_i) = \sum_{k=0}^S \frac{\eta^{(k)}(0)}{k!} (h_i)^k + \frac{\eta^{(k+1)}(\theta h_i)}{(k+1)!} (h_i)^{k+1},$$

де $0 < \theta < 1$. Параметри методу підбираємо так, щоб

$$\eta(0) = \eta^{(1)}(0) = \dots = \eta^{(S)}(0) = 0$$

для довільних достатньо гладких функцій $f(Z)$. Якщо при цьому $\eta^{(S+1)} \neq 0$, то S називають порядком похибки методу інтегрування на одному кроці.

Якщо в схемі /5/ прийняти $\rho = 1$, отримаємо схему Ейлера з першим порядком похибки інтегрування.

Якщо взяти $\rho = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1/2$, отримаємо схему Ейлера з перерахунком, в якій порядок похибки інтегрування дорівнює двом.

Другий порядок похибки має також модифікована схема Ейлера: $\rho = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1/2, \beta_1 = 1$.

Із схем, які мають четвертий порядок похибки, найбільш уживаною є схема, в якій $\rho = 4, \alpha_1 = \alpha_4 = 1/6, \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3, \beta_1 = \beta_2 = 1/2, \beta_3 = 1, \beta_4 = 0$.

Перепишемо задачу оптимального керування в дискретизованому вигляді:

$$\Phi(z) + \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j f_0(z^j) \rightarrow \min_{u_i^j, \xi, T}, \quad /7/$$

$$v_0(\xi) = 0,$$

$$g_0(\xi) \leq 0,$$

$$v_T(z_q) = 0,$$

$$g_T(z_q) \leq 0,$$

$$v(z_i^j) = 0,$$

$$g(z_i^j) \leq 0,$$

$$i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, \rho},$$

$$i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, \rho},$$

/8/

$$V(z_q) + \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \bar{v}(z_i^j) = 0,$$

$$G(z_q) + \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \tilde{g}(z_i^j) \leq 0.$$

Задача /5/-/8/ є деякою специфічною задачею нелінійного програмування відносно скінченної кількості невідомих параметрів ξ, T і $u_i^j, i = \overline{1, q}, j = \overline{1, p}$.

Очевидно, що при $q \rightarrow \infty$ розв'язок задачі /5/-/8/ наближається до розв'язку задачі /1/-/3/.

Для розв'язування задачі /5/-/8/ можна використати ефективні методи оптимізації, зокрема квазіньютонівську модифікацію методу лінеаризації [5].

Основною проблемою в процесі розв'язування дискретної задачі оптимального керування є її висока розмірність: $q * p * m + l + 1$. Для зменшення розмірності можна використати такі підходи.

Вважаємо, що керування $u(t)$ на інтервалі інтегрування є сталим: $u_i^1 = u_i^2 = \dots = u_i^p = u_i$. Окрім зменшення розмірності до $q * m + l + 1$, можна зменшити і кількість обмежень на траєкторіях типу нерівності:

$$g(x_i^j, u_i, \xi, T) \leq 0, \quad i = \overline{1, q},$$

а обмеження типу рівності звести до одного:

$$\sum_{i=1}^q [V(x_i^j, u_i, \xi, T)]^2 = 0.$$

Інший можливий підхід полягає ось у чому. Очевидно, що Z_{i+1} залежить лише від $Z_1, \dots, Z_i$. Тому можна розглядати q задач /5/-/8/, в яких невідомим є набір $w_i = (u_i, \xi, T)$. Послідовно розв'язуючи ці задачі при $i = \overline{1, 2, \dots, q}$, отримуємо оптимальне керування і траєкторію.

Такий підхід дає змогу розв'язувати задачу оптимального керування майже з довільною точністю. Однак він потребує подальшого дослідження, оскільки клас задач, до яких підхід застосовний, є досить вузьким.

Для використання ефективних градієнтних методів оптимізації потрібно вміти обчислювати похідні функцій.

Нехай задана функція

$$R(x, u, t, \xi, T) = b(z_q) + \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^p \alpha_j B(z_i^j).$$

Для обчислення похідних функції R по параметрах оптимізації можна використати такі рекурентні формули [3] ($i = \overline{1, q-1}$):

$$p_i = p_{i+1} + \sum_{j=1}^p p_{i+1}^j, \quad p_q = \frac{\partial b(z_q)}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
p_i^j &= h_i \left[\alpha_j \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial x} + \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial x} (\beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1}) \right], \\
\frac{dR}{du_i} &= h_i \sum_{j=1}^p \left(\alpha_j \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial u} + \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial u} [\beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1}] \right), \\
\frac{dR}{du_q} &= \frac{\partial B(z_q)}{\partial u}, \\
\tilde{p}_i &= \tilde{p}_{i+1} + h_i \sum_{j=1}^p \left[\alpha_j \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial t}, \beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1} \right\rangle \right], \\
\tilde{p}_q &= \frac{\partial B(z_q)}{\partial T}, \\
\frac{dR}{dT} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^p [\alpha_j B(z_i^j) + \langle f(z_i^j), \alpha_j p_{i+1} + \beta_j p_i^{j+1} \rangle] + \tilde{p}_{i+1}; \\
\frac{dR}{d\xi} &= \frac{\partial B(z_q)}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sum_{j=1}^p \left[\alpha_j \frac{\partial B(z_i^j)}{\partial \xi} + \left\langle \frac{\partial f(z_i^j)}{\partial \xi}, \beta_j p_i^{j+1} + \alpha_j p_{i+1} \right\rangle \right].
\end{aligned}$$

3. Обчислювальний експеримент. Процес дискретизації задачі оптимального керування реалізований у вигляді процедури на алгоритмічній мові Паскаль у середовищі *Turbo-Pascal 7.0*. Для розв'язування задачі нелінійного програмування використана квазіньютонівська модифікація методу лінеаризації [57]. За допомогою даної процедури розв'язана низка тестових задач оптимального керування на персональному комп'ютері IBM AT з математичним співпроцесором /тактова частота 16 МГц/.

Задача 1 [37]. Рух матеріальної точки описується системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_1 = \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

На керування накладене обмеження $|u(t)| \leq 0,5$. Задані також два термінальні обмеження:

$$x_1(T) = 4, \quad x_2(T) = 3.$$

Суть задачі: потрібно перевести матеріальну точку з початку координат у точку з координатами /4, 3/ за найкоротший час:

$$F(T) = T \rightarrow \min.$$

Систему диференціальних рівнянь інтегрували за модифікованою схемою Ейлера з постійним кроком. Число точок дискретизації $q = \infty$.

За початкове наближення взите $u_0(t) \equiv 0$, $T_0 = 3c$.
Оптимізація виконана з точністю 10^{-5} .

За 310 робіт комп'ютера отримане оптимальне управління, характер якого зображений на рис. 1. Значення функціоналу мети $F(T) = T = 5,108705$.

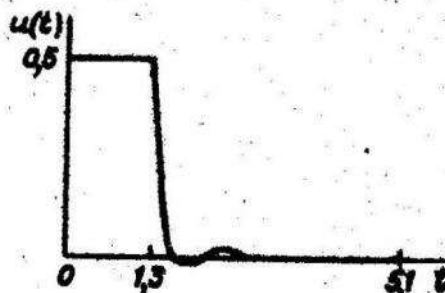


Рис. 1.

Задача 2 [3.7]. Керований процес описується системою:

$$\dot{x}_1 = -u, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = [Vu - Q(x)]/x_1 - g,$$

де $V=2$, $g=0.01$, $Q(x)=0.05x_3^2 e^{-(0.1x_2)}$.

Початковий стан: $x_1(0)=1$, $x_2(0)=x_3(0)=0$.

Тривалість процесу фіксована: $T=100$.

Термінальні обмеження: $x_1(T)=0.2$.

Обмеження на керування: $0 \leq u(t) \leq 0.04$.

Функціонал мети: $F(x, T) = -0.01x_2(T)$.

Початкове наближення: $u_0(t) = 0.008$.

Система диференціальних рівнянь проінтегрована за схемою Рунге-Кутта 4-го порядку. Число точок дискретизації $q=50$. Оптимізація виконана з точністю 10^{-5} . Через 30 с рахунку отримане оптимальне керування, характер якого поданий на рис. 2. Значення функціоналу мети $F = -1,32196$.

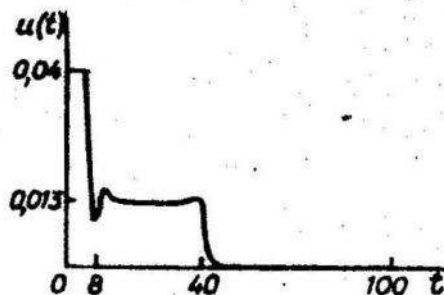


Рис. 2.

І. Антоник В.Г., С р о ч к о В.А. К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т.32. № 7. С.979-991.
 2. В а с и л ь е в Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
 3. Е в т у ш е н к о Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982.
 4. П о н - т р я г и н Л.С., Б о л т я н с к и й В.Г., Г а м к р е д и - д з е Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.
 5. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазиинтегровская модификация метода линеаризации // Кибернетика. 1988. № 6. С.66-71.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.93

УДК 518:517.948

М.В.Жук

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv - \frac{\partial p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + z(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = f(x, y) \quad (1)$$

за нелінійної однорідної крайової умови

$$R[u] \Big|_{\Gamma} \equiv \left[p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, x) + q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, y) + G(s)u \right]_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де Γ — межа області D , обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x) < h(x)$,
 ν — зовнішня нормаль до Γ .

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(x, y) \in H = L_2(D)$ з нормою $\|f\|^2 = \iint_D f^2(x, y) dx dy$; $p(x, y, s, t, z)$; $q(x, y, s, t, z)$; $z(x, y, s, t, z)$ вимірні при $(x, y) \in D$, $-\infty < s, t, z < +\infty$, диференційовні за змінними s, t, z , причому модулі цих похідних обмежені /3/;
 $G(s)$ — задана обмежена додатна. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $p(x, y, 0, 0, 0) = 0$, $q(x, y, 0, 0, 0) = 0$, $z(x, y, 0, 0, 0) = 0$.
 Крім цього, припускаємо, що при $(x, y) \in D$ і довільних s, t, z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t} \zeta_1^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t} \right) \zeta_1 \zeta_2 + \frac{\partial q}{\partial z} \zeta_2^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} \right) \zeta_1 \zeta_0 + \left(\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \zeta_2 \zeta_0 + \frac{\partial z}{\partial s} \times \zeta_0^2 \geq M(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + N\zeta_0^2,$$

© Жук М.В., 1993

де $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ - довільні дійсні числа. $M = \text{const} > 0$, $N = \text{const}$. Причому співвідношення між постійними M, N, γ задовольняють певні умови [3] / γ визначається далі/.

Позначимо через $H_\gamma \subset H$ енергетичний простір допоміжного додатно визначеного оператора T_σ , який знаходимо з формули

$$T_\sigma u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad /3/$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\nu, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\nu, y) + u \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad /4/$$

область визначення якого є $D(T_\sigma)$ множина двічі неперервно диференційованих $u(x, y)$ в $\bar{D}$, що задовольняють крайові умови /4/

При цьому [3]

$$[u, v]_\sigma = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dy + \int_\Gamma u v ds, \quad /5/$$

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|_\sigma, \quad \gamma = \text{const} > 0. \quad /6/$$

Для довільних $u, v \in H_\sigma$ формально вводиться квазібілінійна форма

$$A(u, v) = \iint_D \left[p \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + q \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + r \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) v \right] dx dy + \int_\Gamma \sigma u v ds. \quad /7/$$

Тоді для довільних $u, v, w \in H_\sigma$ аналогічно, як і в праці [3], можна знайти нерівності

$$A(u, u-v) - A(v, u-v) \geq \mu |u-v|_\sigma^2; \quad /8/$$

$$A(u, w) - A(v, w) \leq \eta |u-v|_\sigma |w|_\sigma, \quad /9/$$

де μ, η - деякі додатні константи [3].

Задачу /1/-/2/ розв'язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y), \quad /10/$$

де лінійно незалежні функції $\varphi_k(x, y)$ у проміжку $[g(x), h(x)]$ вибираємо таким чином, щоб система $\{x_k(x) \varphi_k(x, y)\}$ була повною

системою лінійно незалежних функцій в H_σ . Шукає коєфіцієнти $c_k(x)$ визначаємо зі системи

$$\int_{q(x)}^{h(x)} (Au_n - f) \psi_i dy + \psi_i \sqrt{1+y'^2} R[u_n] \Big|_{y=q(x)} + \psi_i \sqrt{1+y'^2} R[u_n] \Big|_{y=h(x)} = 0, \quad /11/$$

за умов

$$\int_{q(a)}^{h(a)} R[u_n] \psi_i \Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int_{q(b)}^{h(b)} R[u_n] \psi_i \Big|_{x=b} dy = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \quad /12/$$

Як відомо, для узагальненого розв'язку $u \in H_\sigma$ задачі /1/-/2/ виконуються тотожності

$$A(u, v) = \iiint f v dx dy \quad /13/$$

при довільній функції $v \in H_\sigma$. Аналогічно для узагальненого розв'язку системи /11/-/12/ $u_n(x, y)$ справедлива тотожність

$$A(u_n, v_n) = \iiint f v_n dx dy, \quad /14/$$

де $v_n(x, y)$ - довільна функція з $H_n \cap H_\sigma$, $H_n \subset H$ - простір функцій вигляду $v_n(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \psi_k(x, y)$.

Відомо, що умови /8/, /9/ забезпечують існування та єдиність узагальненого розв'язку для задачі /1/-/2/ і системи /11/-/12/ [3].

Визначимо збіжність та оцінку швидкості збіжності методу Канторовича.

Нехай $u \in H_\sigma$ - узагальнений розв'язок задачі /1/-/2/. Тоді з тотожностей /13/, /14/ для довільного елемента $w_n \in H_n \cap H_\sigma$ отримуємо

$$A(u, w_n) - A(u_n, w_n) = 0.$$

З нерівності /8/, враховуючи останнє співвідношення при $w_n = u_n - v_n$, де v_n - довільний елемент з $H_n \cap H_\sigma$, а також лінійність форми $A(u, v)$ по другому аргументу, маємо

$$|u - u_n|_\sigma \leq \frac{1}{\mu} [A(u, u - u_n) - A(u_n, u - u_n)] = \frac{1}{\mu} [A(u, u - v_n) - A(u_n, u - v_n)].$$

Використовуючи нерівність /9/, з останнього співвідношення отримуємо

$$|u - u_n|_\sigma \leq \frac{\eta}{\mu} |u - u_n|_\sigma |u - v_n|_\sigma.$$

Таким чином,

$$|u - u_n|_\sigma \leq c |u - v_n|_\sigma, \quad /15/$$

де $C = \frac{\eta}{\mu}$; елемент $v_n \in H_n \cap H_\sigma$ вибираємо так, щоб він реалізував мінімум функціоналу $|u - v_n|_\sigma$.

При цьому внаслідок повноти у просторі H_σ системи функцій $\{X_i(x)\psi_k(x,y)\}$ для елемента $v_n(x,y) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_n^m$, де елемент $v_n^m(x,y) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ki} X_i(x)\psi_k(x,y)$ реалізує мінімум функціоналу $|u - v_n^m|_\sigma$ маємо

$$|u - v_n|_\sigma \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, тому

$$|u - u_n|_\sigma \rightarrow 0 \quad /16/$$

при $n \rightarrow \infty$. Отже, справедлива така теорема.

Теорема. При обмеженнях, зроблених відносно вихідних даних задачі /1/-/2/, що забезпечують виконання умов /8/, /9/, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою /15/.

Повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_σ є, наприклад, система $\{x^l y^k\}$, $l, k = 0, 1, 2, \dots [3]$, тому координатну систему функцій $\{\psi_k(x,y)\}$ вибираємо у вигляді

$$\psi_k(x,y) = y^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad /17/$$

Нехай $u_n(x,y)$ - узагальнений розв'язок вихідної задачі /1/-/2/, перші похідні якого неперервні, та існують сумовані з квадратом в області D другі узагальнені похідні, функції $g''(x)$ і $h''(x)$ неперервні. Тоді, використовуючи оцінку /15/ і доведення леми I [1], отримуємо, що швидкість збіжності методу Канторовича, якщо для наближення /10/ використовуються функції /17/, характеризується оцінкою

$$|u - u_n|_\sigma = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Якщо ж, крім цього, $u(x,y)$ належить простору $W_2^{s+1}(D)$, а функції $g^{(s+1)}(x)$ і $h^{(s+1)}(x)$ - неперервні, то

$$|u - u_n|_\sigma = O\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

І. В л а с о в а З.А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 53. С. 37-42. 2. Ж у к М.В. Застосування методу Канторовича для не- лінійних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип. 37. С. 12-16. 3. К а н т о р о в и ч Л.В., К р и л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Л., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.93.

Д.В.Нікольський

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КОНТАКТУ ПЛАСТИНИ, ЩО ВІЛЬНО ЛЕЖИТЬ НА ПОВЕРХНІ ПРУЖНОГО НАПІВПРОСТОРУ

Розглянемо математичну модель контакту /без тертя/ для пласти-
тини Кірхгофа, що вільно лежить на поверхні напівпростору. При-
пустимо, що пластина займає обмежену область Ω з межею Γ ,
яка має k кутових точок. Із напівпростором пов'язана система
координат $OXYZ$, причому вісь OZ напрямлена всередину
напівпростору перпендикулярно до його поверхні.

Умови непроникнення тіл одне в одне мають вигляд

$$\begin{aligned} u^*(M) &= w(M), \quad p(M) \geq 0, \quad M \in S, \\ u^*(M) &> w(M), \quad p(M) = 0, \quad M \in (\Omega \setminus S), \end{aligned} \quad /1/$$

де S - область контакту пластины і напівпростору; $w(M)$ - про-
гин пластины; $u^*(M)$, $M(x, y) \in \{R^2 = \{z = 0\}\}$ - пе-
реміщення межі напівпростору на осі OZ у точці M ; $p(M)$, $M \in S$ -
контактний тиск.

Контактна задача як крайова зводиться до визначення у напів-
просторі $z > 0$ гармонійної функції $u(x, y, z)$, функції $w(x, y)$,
яка визначає прогин пластины у точці $M(x, y)$ та області S з
рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta^2 w(x, y) &= \lambda_1 (q(x, y) - u'_z(x, y, 0)), \quad M(x, y) \in \Omega, \\ \Delta u(N) &= 0, \quad N(x, y, z) \in \{z > 0\} \end{aligned} \quad /2/$$

та крайових умов

$$\begin{aligned} V_n &= -\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\nabla^2 w + (1 - \nu_1) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \\ M_n &= -\frac{1}{\lambda_1} \left(\nabla^2 w - (1 - \nu_1) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \\ M_{nst} &= \frac{1 - \nu_1}{\lambda_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \Big|_{M_i + 0} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \Big|_{M_i - 0} \right) = 0, \end{aligned} \quad /3/$$

$$\begin{aligned} u(N) &= O(z^{-1}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad z = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ 2\pi\lambda_2 u(x, y, 0) &= w(x, y), \quad u'_z(x, y, 0) \geq 0, \quad M(x, y) \in S, \end{aligned}$$

$$2\pi\lambda_2 u(x, y, 0) > w(x, y), \quad u'_z(x, y, 0) = 0, \quad M(x, y) \in (\Omega \setminus S)$$

$$\int_{\Omega} u'_z(x, y, 0) ds = P, \quad \int_{\Omega} x u'_z(x, y, 0) ds = M_y,$$

$$\int_{\Omega} y u'_z(x, y, 0) ds = M_x,$$

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \nu_1 > 0, \quad \Gamma^* = \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^k M_i.$$

Постійні величини $\lambda_1, \lambda_2, \nu_1$ відомі та пов'язані з механічними характеристиками матеріалів пластини та напівпростору.

У /2/-/3/ M_n - згинальна сила; V_n - узагальнена перерізувальна сила; M_{nsi} - зміна крутного моменту у кутовій точці M при обраному напрямку обходу контура пластини; n, S - відповідно напрямки нормалі та дотичної до контура Γ ; P - рівнодіюча навантаження густини $q(M)$; M_x, M_y - моменти навантаження P відносно осей OY та OX .

Величини P, M_x, M_y , а також переміщення межі напівпростору u визначаються за формулами:

$$p(M) = u'_z(x, y, 0), \quad M(x, y) \in S,$$

$$P = \int_{\Omega} q(N) dS_N, \quad M_y = \int_{\Omega} x q(N) dS_N,$$

$$M_x = \int_{\Omega} y q(N) dS_N, \quad u^* = \frac{2\pi\lambda_2}{12(1-\nu_1^2)} u(x, y, 0),$$

$$\lambda_1 = \frac{12(1-\nu_1^2)}{E_1 l^3}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},$$

де E_1, E_2, ν_1, ν_2 - модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона матеріалів пластини та напівпростору відповідно; l - висота пластини.

Скористаємося інтегральними зображеннями розв'язків рівнянь /2/ у вигляді

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{p(N) dS_N}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2)^{1/2}},$$

$$w(M) = \lambda_1 \left(\int_{\Omega} \Lambda(M, N) (q(N) - p(N)) dS_N + \right. \quad /4/$$

$$\left. + \int_{\Gamma^*} \left(q^*(M) \Lambda(M, \varepsilon) - m^*(\varepsilon) \frac{\partial \Lambda(M, \varepsilon)}{\partial n} \right) d\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^k P_i \Lambda(M, M_i) + h_1 + h_2 x + h_3 y, \right.$$

$$N(\xi, \varepsilon) \in S, \quad \varepsilon \in \Gamma^*.$$

Зображення функції $w(x, y)$ ґрунтується на методі компенсуючих навантажень Толкачова [3]. Воно складається з компенсуючої перерізувальної сили $q^*(\varepsilon)$, моменту $m^*(\varepsilon) = (m_x^*(\varepsilon), m_y^*(\varepsilon))$, а також зусиль P_i , $i = 1, 2, \dots, k$, які зосереджені в кутових точках контура. Вектор $h = (h_1, h_2, h_3)$ визначає коротке переміщення пластини; $\Lambda(M, N) = (8\pi)^{-1} z^2 \ln z$, $z = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ — фундаментальний розв'язок рівняння $\Delta^2 w = 0$; $\partial \Lambda / \partial n$ — нормальна похідна функції $\Lambda(M, N)$.

Зображення функції $w(x, y)$ виконане методом компенсуючих навантажень у зв'язку з тим, що зображення розв'язку задачі згину пластини з вільним краєм методом функцій Гріна невідоме. Зміст методу компенсуючих навантажень полягає в тому, що пластину, яка займає область Ω з контуром Γ , доповнюють до безмежної. До серединної поверхні нескінченної пластини прикладають нормальні погонні зусилля $q^*(\varepsilon)$ вздовж контура Γ , згинальні моменти $m^*(\varepsilon)$ та зусилля P_i , $i = 1, 2, \dots, k$, які зосереджені у кутових точках M контура і компенсують розширення області Ω . Тобто величини q^* , m^* , P_i підбирають таким чином, щоб задовольнити крайові умови (3) [3]. Виникнення зосереджених зусиль у кутових точках M контура Γ при згині пластини впливає з принципу Сен-Венана [2].

При побудові математичної моделі враховують [4], що під час переходу через гладкий контур Γ області Ω узагальнена перерізувальна сила V_n та згинальний момент M_n у [3] змінюється стрибком. Тому умови [3] набувають вигляду

$$V_n^\pm(M) = \pm 0,5 q^*(M) + V_n(M),$$

$$M_n^\pm(M) = \pm 0,5 m^*(M) + M_n(M). \quad /5/$$

Тут знаки "+" і "-" відповідають значенням функцій всередині області Ω та поза нею. Щоб отримати інтегральні рівняння, за допомогою яких визначаються компенсуючі навантаження, виконаний граничний перехід з довільної точки $M(x, y) \in \Omega$ на контур Γ всередини Ω .

Оскільки рівності $M_n^+ = 0$, $V_n^+ = 0$, $M - \varepsilon$, $\varepsilon \in \Gamma$ є умовами вільної межі, то крайові умови [3] набувають вигляду [2]

$$0,5 q^*(M) + V_n(M) = 0,$$

$$0,5 m^*(M) + M_n(M) = 0 \quad /6/$$

разом з умовами у кутових точках:

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial n} \right|_{M_i=0} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial n} \right|_{M_i=0}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Підстановкою функцій $u(x, y, z^i)$, $W(x, y)$ у формі /4/ у крайові умови /3/ та рівності /5/ контактна задача зводиться до системи інтегральних включень відносно невідомих функцій $p(M)$, $q^*(\varepsilon)$, $m^*(\varepsilon)$ області S , вектора h і чисел $P_i^* = 1, 2, \dots, k$.

Сформулюємо отриману контактну задачу на основі нелінійних інтегральних рівнянь відносно невідомих $v(M)$, $q^*(\varepsilon)$, $m^*(\varepsilon)$, $h = (h_1, h_2, h_3)$ і чисел P_i^* , $i = 1, 2, \dots, k$, яка має вигляд

$$\mu v^-(M) + \lambda K v^+ - \lambda_1 (T_1 q^* - T_2 m^* + \sum_i \Lambda P_i^*) = g,$$

$$\int_{\Omega} v^+ + \int_{\Gamma^*} q^* + \sum_i P_i^* = P,$$

$$\int_{\Omega} y v^+ + \int_{\Gamma^*} y q^* + \int_{\Gamma^*} m^* + \sum_i y_i P_i^* = M_x, \quad /7/$$

$$\int_{\Omega} x v^+ + \int_{\Gamma^*} x q^* + \int_{\Gamma^*} m^* + \sum_i x_i P_i^* = M_y,$$

$$0,5 q^*(\varepsilon) + V_n(A v^+, q^*(\varepsilon), m^*(\varepsilon), P_i^*, A q) = 0, \quad \varepsilon \in \Gamma,$$

$$0,5 m^*(\varepsilon) + M_n(B v^+, q^*(\varepsilon), m^*(\varepsilon), P_i^*, B q) = 0, \quad \varepsilon \in \Gamma,$$

$$W_n(C v^+, q^*(\varepsilon), m^*(\varepsilon), P_i^*, C q) = 0 \quad \varepsilon \in \Gamma.$$

Тут $v^+(M) = \sup \{0, v(M)\}; \quad v^-(M) = \inf \{0, v(M)\};$

$$K = \lambda^{-1}(\lambda_2 R + \lambda_1 W); \quad g = \lambda_1 W q + h_1 + h_2 x + h_3 y,$$

$$R p = \int_{\Omega} R(M, N) p(N) dS_N, \quad R(M, N) = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{-1/2}.$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \int_{\Omega} (\cdot) dS_N, \quad \int_{\Gamma^*} (\cdot) d\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$W p = \int_{\Omega} \Lambda(M, N) p(N) dS_N, \quad \Lambda P_i^* = \Lambda(M, M_i) P_i^*,$$

$$T_1 q^* = \int_{\Gamma^*} \Lambda(M, \varepsilon) q^*(\varepsilon) d\varepsilon, \quad T_2 m^* = \int_{\Gamma^*} \frac{\partial \Lambda}{\partial n} m^*(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$A p = \int_{\Omega} A(N, \varepsilon) p(N) dS_N, \quad B p = \int_{\Omega} B(N, \varepsilon) p(N) dS_N,$$

$$C p = \int_{\Omega} C(N, \varepsilon) dS_N,$$

$\mu > 0$ - довільне число. Ω

Буквами V_n, M_n, W_n позначені оператори, лінійні відносно аргументів, що стоять у дужках, а ядра лінійних операторів A, B, C не наведені через їхню громіздкість.

Еквівалентність рівнянь /7/ інтегральним включенням визначається теоремою.

Теорема. Розв'язки системи граничних інтегральних рівнянь /7/ та інтегральних включень, до яких зводиться задача /1/-/2/, еквівалентні, тобто: якщо (v, q^*, m^*, p_i^*, h) - розв'язок рівняння /7/, то функції q^*, m^* , числа $p_i^*, i=1, 2, \dots, k$, вектор h , функція $p = v^+ i$ область $S = \{M: v(M) \geq 0\}$ є розв'язком системи інтегральних включень; якщо $(p, q^*, m^*, p_i^*, S, h)$ розв'язок системи інтегральних включень, то функції

$$v = \mu^{-1} (q - \lambda K p + \lambda_1 (T_1 q^* - T_2 m^* + \sum_i \lambda p_i^*)) + p$$

q^*, m^* , числа $p_i^*, i=1, 2, \dots, k$ та вектор h є розв'язком рівнянь /7/.

І. Кулак В.М., Толкачев В.М. Изгиб пластин произвольного очертания // Докл. АН СССР. 1976. Т.230. № 1. С.56-59. 2. Работнов Ю.В. Механика деформируемого твердого тела. М., 1979. 3. Толкачев В.М. Метод компенсирующих нагрузок в теории изгиба пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 3. С.155-160.

Стаття надійшла до редколегії 10.04.93

УДК 539.3

І.С.Будэ, Я.Г.Савула

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ПОЧАТКОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

І. Постановка задачі. Розглядаємо тонку оболонку як тривимірне тіло Z :

$$Z = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3): (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, -h \leq \alpha_3 \leq h\},$$

яке в недеформівному стані належить до криволінійної ортогональної системи координат α_i ($i=1, 2, 3$), де α_3 - лінія, перпендикулярна до середньої поверхні Ω оболонки, що є образом ω .

Нехай напружено-деформівний стан оболонки складається з "головного", що є рівноважним і характеризується малими деформаціями та скінченними переміщеннями, а також з "додавкового", якому

© Будэ І.С., Савула Я.Г., 1993

відповідають малі переміщення і деформації, що виникають в процесі відхилень оболонки від положення рівноваги.

Відповідно до зробленого припущення, подаємо вектор переміщень у вигляді суми

$$u = u^0 + \tilde{u}, \quad /1.1/$$

де індекс "0" - тут і надалі позначає "головний" стан, а "∼" - "додатковий".

Підставляємо вираз /1.1/ для вектора переміщень у співвідношення геометрично нелінійної теорії оболонок [3].

Нехтуючи квадратами величин "додаткового" стану як такими, що мають вищий порядок мализни порівняно з іншими величинами, запишемо повну лінеаризовану систему рівнянь динаміки попередньо навантаженої оболонки [2]:

$$\begin{aligned} C_6(\tilde{b}^*)^0 + \tilde{P} &= 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, \\ G_1(\tilde{b}^*)^0 &= \tilde{b}_r, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma_b, \\ G_2(\tilde{u}) &= \tilde{u}_r, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma_u, \end{aligned} \quad /1.2/$$

межа області $\omega - \Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_u$.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_0(\alpha_1, \alpha_2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_0(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad /1.3/$$

Тут

$$(\tilde{b}^*)^0 = \tilde{F}B[C_1 u^0 + \frac{1}{2}(C_\omega u^0)^T E_\omega C_\omega u^0] + F^0 B[C_1 \tilde{u} + (C_\omega u^0)^T E_\omega C_\omega \tilde{u}];$$

C_6, C_1, C_ω - матриці диференціальних операторів; $F^0, \tilde{F}, B, E_\omega$ - матриці констант; G_1, G_2 - матриці непрямих косинусів /вигляд цих матриць наведений у праці [3]/; $\tilde{P}$ - вектор-стовпець зовнішнього навантаження та інерційних доданків "додаткового" стану; $\tilde{b}_r, \tilde{u}_r$ - вектори-стовпці відповідно граничних зусиль-моментів і переміщень.

2. Варіаційна постановка задачі. Розглянемо задачу про вільні коливання тонких оболонок. Зазначимо, що в даному випадку маємо однорідні граничні умови ($\tilde{b}_r = \tilde{u}_r = 0$), зовнішнє поверхневе навантаження відсутнє.

Подаємо вектор переміщень у вигляді

$$u(\alpha_1, \alpha_2, t) = \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\lambda t}, \text{ де } (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, t - \text{час.} /2.1/$$

Враховуючи зображення /2.1/, запишемо варіаційну постановку [2] для задачі про вільні коливання попередньо навантаженої оболонки:

$$\int_{\Omega} [C_i V + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} V]^T E_0 B [C_i \bar{u} + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \bar{u}] d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (C_{\omega} V)^T E_{\omega}^T G_8^0 C_{\omega} \bar{u} d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} V^T m \bar{u} d\Omega = 0. \quad /2.2/$$

Тут G_8^0 - матриця початкових зусиль-моментів [2]; V - діагональна матриця розмірності 5×5 , ненульовими елементами якої є функції V_i ($i = \overline{1,5}$), що задовольняють умови

$$V_i \in [W_2'(\Omega)]^5, \quad G_2 V_i = 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

3. Схема побудови чисельного розв'язку. Розглядаємо задачу про вільні коливання осесиметричних оболонкових конструкцій. У цьому випадку використовуємо циліндричну систему координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, зв'язок якої з декартовою визначається співвідношеннями:

$$x = \alpha_1 \cos \alpha_2, \quad y = \alpha_1 \sin \alpha_2, \quad z = \alpha_3, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1', \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi.$$

Для апроксимації розв'язку використовуємо квадратичні апроксимації за координатою α_1 і зображення сумою по повній системі тригонометричних функцій за координатою α_2 .

Відповідно до цього запишемо вектор переміщень $\bar{u}$:

$$\bar{u} = \sum_{m=0}^M \Phi_m(\alpha_2) \hat{u}(\alpha_1), \quad /3.1/$$

де $\hat{u}(\alpha_1) = N(\alpha_1) q$; q - вектор-стовпець вузлових значень вектора-функції $\hat{u}(\alpha_1)$; $\Phi_m(\alpha_2)$ - діагональна матриця розмірності 5×5 , ненульові елементи якої є такими:

$$\varphi_m^{11} = \varphi_m^{33} = \varphi_m^{44} = \cos m\alpha_2, \quad \varphi_m^{22} = \varphi_m^{66} = \sin m\alpha_2; \quad /3.2/$$

$N(\alpha_1)$ - блоково-діагональна матриця координатних функцій /5/.

Матриця V має вигляд

$$V = \sum_{m=0}^M \Phi_m(\alpha_2) N(\alpha_1). \quad /3.3/$$

Підставляючи у варіаційне рівняння /2.2/ співвідношення /3.1/-/3.3/, отримуємо

$$\sum_{m=0}^M \left(\int_{\Omega} [C_i \Phi_m N + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \Phi_m N]^T E_0 B [C_i \Phi_m N + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \Phi_m N] \times \right. \\ \left. + \int_{\Omega} (C_{\omega} \Phi_m N)^T E_{\omega}^T G_8^0 C_{\omega} \Phi_m N d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} (\Phi_m N)^T m \Phi_m N d\Omega \right) q = 0. \quad /3.4/$$

де G_8^0 - матриця констант [5].

Відокремлюючи змінні α_1 і α_2 у рівнянні /3.4/ та виконуючи інтегрування, отримуємо матричну задачу на власні значення. Для розв'язування цієї задачі застосовуємо метод ітерацій у підпросторі /1/.

4. Чисельні приклади. 4.1. Розглядаємо процес вільних коливань круглої пластини радіусом R , яка попередньо рівномірно розтягується /отискається/ з торців зовнішнім зусиллям T_0 , залишаючись у стані статичної рівноваги. У даній задачі приймаємо, що $\alpha_1 = z$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = z$, $0 \leq z \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$.

На краю і в центрі пластини задані такі граничні умови:

головні: $u_1 = v_1 = w = 0$, $z = R$, $u_1 = v_1 = 0$, $z = 0$;

природні: $Q_1 = 0$, $z = 0$.

Розглядаємо осесиметричні коливання /у розкладі /3.1/ приймаємо, що $m = 0$ /.

Задачу розв'язуємо при таких параметрах:

$2h = 0,5 \text{ м}$, $E = 0,625 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,22$, $\rho = 0,245 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$,

$$\frac{2h}{R} = \frac{1}{20}.$$

Т а б л и ц я . 1

N_{el}	$T_0, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\omega_1, \text{Гц}$	$\delta, \%$	$\omega_2, \text{Гц}$	$\delta, \%$	$\omega_3, \text{Гц}$	$\delta, \%$
4	0	.12076E+02	0,013	.46560E+02	0,524	.10469E+03	3,12
	-10^8	.65944E+00	17	.38780E+02	0,8	.97082E+02	4
8	0	.12075E+02	0,001	.46335E+02	0,038	.10176E+03	0,231
	-10^8	.57166E+00	1	.38503E+02	0,05	.94010E+02	0,3
16	0	.12075E+02	0	.46319E+02	0,003	.10155E+03	0,017
	-10^8	.56540E+00	0,1	.38483E+02	0,004	.93778E+02	0,02
32	0	.12075E+02	0	.46317E+02	0	.10153E+03	0
	-10^8	.56500E+00	0,02	.38482E+02	0	.93763E+02	0,002
Анал.	0	.12075E+02	-	.46317E+02	-	.10153E+03	-
	-10^8	.56486E+00	-	.38482E+02	-	.93761E+02	-

У табл. I наведені перші три частоти ($\omega_i = \lambda_i / 2\pi$, $i = \overline{1,3}$), що отримані на різних скінченноелементних сітках при нульовому і близькому до критичного [4] навантаженнях. Наведені результати порівнюються з аналітичними. Слід зазначити, що вже при 8-елементному розбитті області серединної поверхні в напрямі α_1 досягається висока точність розв'язку, про що свідчить відносно похибка δ .

Т а б л и ц я 2

$T_1, \text{H/M}$	$\omega_1, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_2, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_3, \text{Гц}$	$\Delta, \%$
-10^8	.56540E+00	95	.38483E+02	17	.93778E+02	7
-10^7	.11473E+02	5	.45598E+02	1.6	.10080E+03	0.73
-10^6	.12016E+02	0.49	.46247E+02	0.15	.10147E+03	0.079
-10^5	.12069E+02	0.05	.46312E+02	0.015	.10154E+03	0.009
0	.12075E+02	0	.46319E+02	0	.10155E+03	0
10^5	.12081E+02	0.05	.46326E+02	0.015	.10155E+03	0
10^6	.12133E+02	0.48	.46390E+02	0.15	.10162E+03	0.073
10^7	.12645E+02	5	.47028E+02	1.5	.10229E+03	0.73
10^8	.168558E+02	40	.52962E+02	14	.10872E+03	7

Т а б л и ц я 3

$\frac{2h}{R}$	$\omega_i, \text{Гц}$	Аналітичний	8 елементів	4 елементи	k
$\frac{1}{20}$	ω_1	.12081E+02	.12081E+02	.12082E+02	3.515
	ω_2	.46325E+02	.46342E+02	.46568E+02	3.799
	ω_3	.10154E+03	.10177E+03	.10470E+03	3.751
$\frac{1}{100}$	ω_1	.25723E+01	.25723E+01	.25726E+01	3.944
	ω_2	.96334E+01	.96370E+01	.96858E+01	3.862
	ω_3	.21351E+02	.21403E+02	.22060E+02	3.762

Із табл. 2 можна бачити відносний вплив зовнішнього навантаження T_1 на частоти вільних коливань. Цей вплив характеризується параметром Δ , де

$$\Delta = \frac{|\omega_0^i - \omega_{T_1}^i|}{\omega_0^i} 100\%, \quad i = \overline{1,3},$$

ω_0^i - i -та частота нанавантаженої пластини; $\omega_{T_1}^i$ - i -та частота пластини, навантаженої зусиллям T_1 .

Дані у табл. 3 свідчать про залежність перших трьох частот від товщини пластини. У таблиці наведені значення коефіцієнта збіжності k , який визначається за формулою [8]

$$k = \frac{\ln|\omega_i^* - \omega_i^{2i}| - \ln|\omega_i^* - \omega_i^i|}{\ln 2i - \ln 1}, \quad i = \overline{1,3},$$

де ω_i - аналітичне значення i -ї частоти; $l = l_1/N$, l_1 - довжина пробігу α_1 ; N - кількість елементів; $\omega_i^{(1)}$ - i -та частота, що отримана при розбитті на N елементів; $\omega_i^{(2)}$ - i -та частота, що отримана при розбитті на $\frac{N}{2}$ елементів.

Отримані значення коефіцієнта $\frac{N}{2}k$ добре узгоджуються з теоретичними, наведеними у праці [6]. Результати з табл. 3 одержані при $T_1 = 10^5$ Н/м.

4.2. Розглядаємо задачу про вільні коливання циліндра, закритого на одному з торців пластиною. Дана конструкція піддається рівномірному зовнішньому /внутрішньому/ тиску, що характеризується поверхневим зусиллям P_3 . Меридіанний переріз даної конструкції площиною $\varphi = \text{const}$ зображений на рис. 1.

Розглядатимемо осесиметричні коливання /у розкладі /3.1/ приймаємо, що $m=0$ /.

У точках A і C задачі такі граничні умови:
головні: $u_1 = \gamma_1 = 0$, $z = 0$, $u_1 = \gamma_1 = w = 0$, $z = R_1 + R_2$;
природні: $Q_1 = 0$, $z = 0$.

У точці B задані головні умови спряження [7]:

$$T_j u_{(j)} = T_k u_{(k)},$$

де T_j , T_k - матриці спряження j -ї та k -ї складових оболонкової конструкції /вигляд даних матриць наведений у праці [7]/; $u_{(j)}$, $u_{(k)}$ - вектори переміщень у вузлі спряження, записані для j -ї та k -ї складових відповідно.

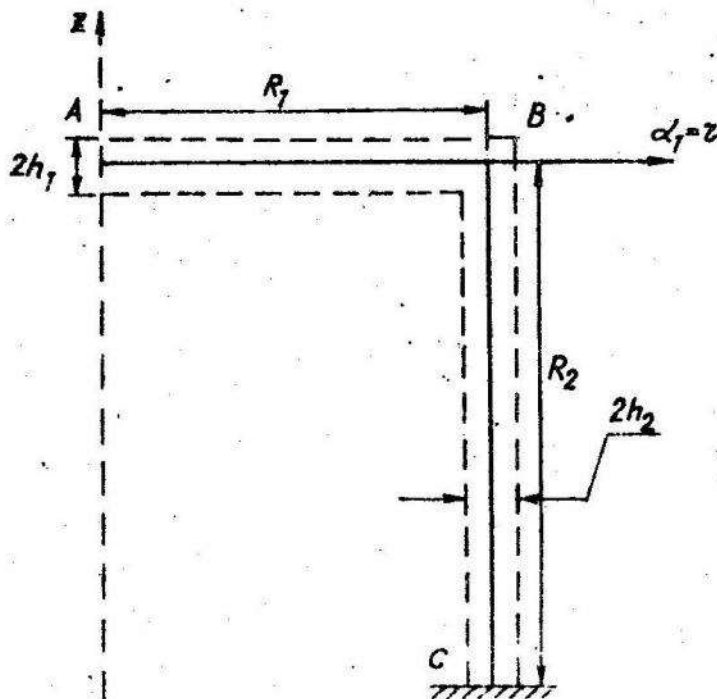


Рис. 1.

Задача розв'язана для таких фізико-геометричних характеристик:

$$2h_1 = 2h_2 = 0,5 \text{ м}, E = 0,625e+11 \text{ Н/м}^2, \nu = 0,22, \rho = 0,245e+04 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\ R_1 = R_2 = 10 \text{ м}.$$

Т а б л и ц я 4

$p_3 \cdot 10^6, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	$\omega_1, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_2, \text{Гц}$	$\Delta, \%$	$\omega_3, \text{Гц}$	$\Delta, \%$
4.85	.13975E+01	87	.50731E+02	26	.64436E+02	0.01
4.8	.38525E+01	63	.50607E+02	25	.64436E+02	0.01
4.7	.62434E+01	40	.50355E+02	24	.64436E+02	0.01
4.5	.90019E+01	13	.49837E+02	23	.64436E+02	0.01
4	.12443E+02	20	.48480E+02	20	.64436E+02	0.01
3	.14366E+02	38	.45711E+02	13	.64435E+02	0.01
1	.11907E+02	15	.41444E+02	2	.64431E+02	0.005
0.1	.10484E+02	1	.40563E+02	0.1	.64428E+02	0
0.01	.10385E+02	0.1	.40518E+02	0.01	.64428E+02	0
0	.10375E+02	0	.40513E+02	0	.64428E+02	0
-0.01	.10365E+02	0.1	.40509E+02	0.01	.64428E+02	0
-0.1	.10281E+02	1	.40474E+02	0.1	.64427E+02	0.002
-1	.10205E+02	1.6	.40570E+02	0.1	.64424E+02	0.006
-3	.14151E+02	36	.43905E+02	8	.64415E+02	0.02
-4	.16470E+02	59	.47116E+02	16	.64410E+02	0.03
-5	.17720E+02	71	.51146E+02	26	.64405E+02	0.04
-6	.15993E+02	54	.55360E+02	37	.62736E+02	3
-6.6	.11962E+02	15	.55999E+02	38	.61168E+02	5
-6.8	.56233E+01	45	.54938E+02	36	.61762E+02	4
-6.86	.14957E+01	86	.54624E+02	35	.61994E+02	4

У табл.4 наведені результати чисельного аналізу відносно впливу зовнішнього /внутрішнього/ тиску p_3 на перші три частоти коливань. Проаналізувавши отримані результати, можна стверджувати, що однакове за характером початкове зовнішнє навантаження по-різному впливає на різні частоти.

Результати з табл. 4 отримані при розбитті області на 16 скінченних елементів. Як бачимо, характер зміни першої і другої частот відрізняється від характеру зміни третьої частоти.

Це явище можна пояснити тим, що третій частоті відповідають круті форми коливань, у той час як перша і друга частоти характеризують осесиметричні коливання.

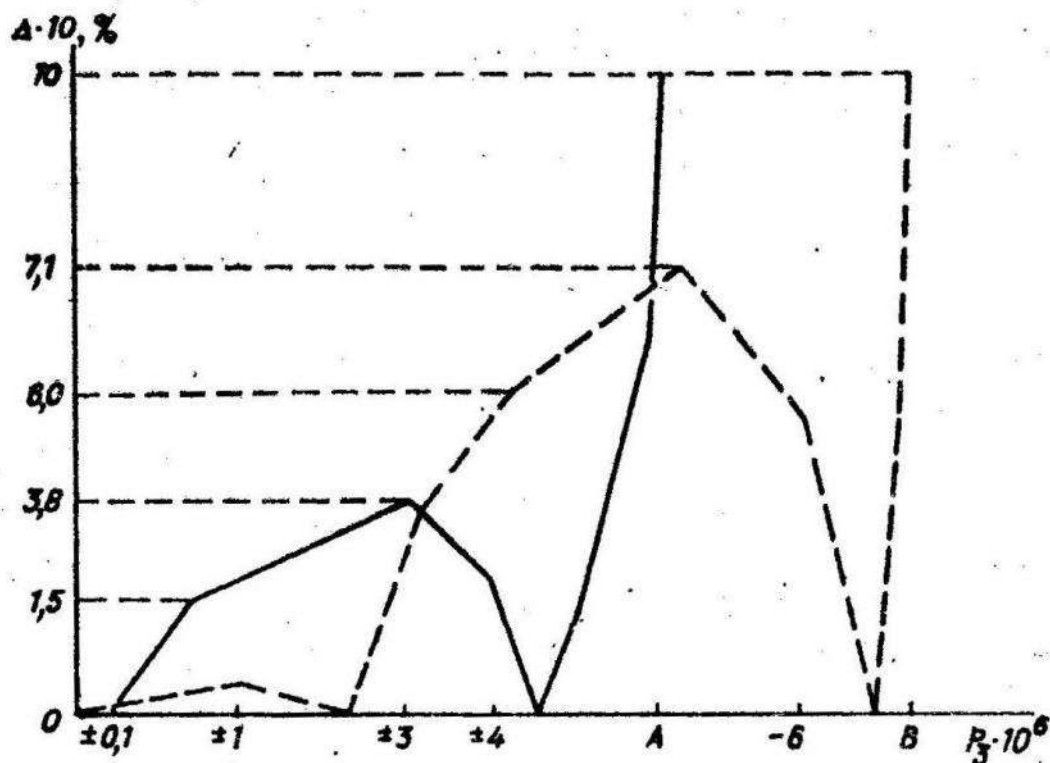


Рис. 2.

На рис. 2 подана залежність відносного впливу зовнішнього навантаження $P_3 - \Delta$ від цього навантаження для першої частоти ω_1 .

За графіком можна умовно розрізняти такі зони навантаження P_3 :

- зона малого впливу /від 0 до 10^5 Н/м^2 для внутрішнього тиску і від 0 до $-2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ для зовнішнього тиску/;
- критична зона, що характеризується різким спадом частоти до нуля. Для внутрішнього тиску це проміжок від $4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ до $4.86 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, для зовнішнього - від $-6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ до $-6.87 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

Як бачимо, при певному навантаженні можна досягти частоти, що й у випадку ненавантаженої оболонки /точки, де $\Delta = 0$, крім початку координат/.

Точки А / $4.86 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ / та В / $-6.87 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ / означають величину внутрішнього та зовнішнього тиску P_3 відповідно, при якому частота стає близькою до нуля, що призводить до втрати стійкості конструкції за першою формою коливань.

Зважаючи на те, що ділянка малого впливу - це діапазон навантажень в околі нуля, де $\Delta < 10 \%$, можемо зробити висно-

зок, що перша з трьох наведених частот є найчутливішою до даного навантаження, оскільки має найменшу зону малого впливу. Третя частота має найбільшу зону, тому є малочутливою до даного навантаження.

І. Б а т є К., В и л с о н Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982. 2. Б у д з И.С. Численный анализ динамики оболочек типа Тимошенко с учетом предварительного нагружения. Львов, 1992. 37 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 22.01.92, № 77-Ук92. 3. В а г і н П.П., М у х а І.С., С а в у л а Я.Г. Розв'язування геометрично нелінійних задач статки оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.31. С.67-74. 4. В о л ь м и р А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967. 5. К о с с а к О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях составных осесимметричных тел: Автореф.: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1991. 6. Р и к а р д с Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига, 1988. 7. С а в у л а Я.Г. Задачи механики деформирования оболочек с резными срединными поверхностями: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Львов, 1984. 8. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов: Учеб. пособие. Львов, 1981.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.93

УДК 536.2

Н.П.Флейшман

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВОГО СПРЯЖЕННЯ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ТОНКИМИ ЧУЖОРІДНИМИ ПРОШАРКАМИ АБО ПОКРИТТЯМИ

Для визначення нестационарних полів температур у середовищах з клейовими з'єднаннями, в композитах з міжфазними прошарками під час теплопередачі через поверхневу плівку або під час охолодження рідини в тонкостінних посудинах тощо необхідно вивести відповідні умови спряження середовищ.

І. Узагальнені умови спряження /УУС/. Розглянемо з'єднання двох просторових тіл "1" і "2" за допомогою тонкого ізотропного криволінійного чужорідного шару сталої товщини $2h$. Віднесемо цей шар оболонкового типу до змішаної триортogonalної системи координат α, β, γ , де α, β - лінії кривизни серединної поверхні шару, вісь γ направлена по нормалі до неї. Припустимо, що на поверхнях $\gamma = \pm h$, уздовж яких прошарок спрягається з

© Флейшман Н.П., 1993

тілами "1" і "2", виконуються умови неідеального теплового контакту [2]:

$$T(-h) = T^- + F_1 \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial \gamma}, \quad T(h) = T^+ - F_2 \lambda_2 \frac{\partial T^+}{\partial \gamma} \quad /1/$$

та умови рівності теплових потоків:

$$\lambda \frac{\partial T(-h)}{\partial \gamma} = \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial \gamma}, \quad \lambda \frac{\partial T(h)}{\partial \gamma} = \lambda_2 \frac{\partial T^+}{\partial \gamma}, \quad /2/$$

де $T \equiv T(\alpha, \beta, \gamma, t)$ - температура; T^- і T^+ - відповідні температури тіл "1" і "2" на поверхнях $\gamma = \pm h$; F_i , λ_i - коефіцієнти поверхневого термічного опору контакту та коефіцієнти теплопровідності / $i = 1, 2$ /; λ - коефіцієнт теплопровідності прошарку. Припустимо також, що вся система рухається зі швидкістю $\vec{u}$.

Для виведення умов теплового sprzęження тіл за допомогою з'єднувального прошарку, аналогічно [6], дискретизуємо область, яку він займає, лише вздовж осі γ , беручи три точки $\gamma = 0$, $\gamma = \pm h$. Лінійне рівняння нестационарної теплопровідності для рухомого тривимірного середовища за відсутності джерел тепла записуємо лише для точок поверхні $\gamma = 0$ [1]:

$$\Phi(T) + \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} + 2K \frac{\partial T}{\partial \gamma} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad /3/$$

$$\text{де } \Phi(T) = \Delta T - \frac{1}{a} \left(\frac{u_1}{A_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{u_2}{A_2} \frac{\partial T}{\partial \beta} \right); \quad 2K = K_1 + K_2 - \frac{u_3}{a},$$

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right], \quad /4/$$

a - коефіцієнт температуропровідності; t - час; A_1 , A_2 - коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $\gamma = 0$; K_1 , K_2 - її головні кривини; u_1 , u_2 , u_3 - фізичні координати вектора швидкості $\vec{u}$ в локальній системі координат α, β, γ , які за відомими формулами [5] виражаються через координати того ж вектора у прямокутній декартовій системі координат.

Заміняючи з точністю $O(h^2)$ похідні по γ їх симетричними та несиметричними скінченнорізницевами аналогами відповідно у /3/ та /1/ і /2/, після елементарних перетворень одержуємо

$$(1 + 2Kh) \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial T^+}{\partial \gamma} - (1 - 2Kh) \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial T^-}{\partial \gamma} = h \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \Phi \right) [(T^+ + T^-) + (F_1 \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial \gamma} - F_2 \lambda_2 \frac{\partial T^+}{\partial \gamma})], \quad /5/$$

$$(T^+ - T^-) - (F_2 \lambda_2 \frac{\partial T^+}{\partial \gamma} + F_1 \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial \gamma}) - h \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial T^-}{\partial \gamma} + \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial T^+}{\partial \gamma} \right) = 0.$$

Умови /5/, які зв'язують між собою величини T^- , T^+ та їх похідні, служать математичною моделлю теплового спряження двох рухомих середовищ "1" і "2" за допомогою тонкого прошарку з іншого матеріалу. Ці умови дають змогу не розглядати прошарок, а лише опосередковано врахувати його вплив /на розподіл температур/, який характеризується його теплофізичними та геометричними параметрами.

Після розв'язування нестационарної задачі теплопровідності для тіл "1" і "2" в використанні УУС /5/ можна визначити також температуру в трьох точках по товщині прошарку: у точках $y = \pm h$ за формулами /1/, у точці $y = 0$ - за формулою:

$$T(0) = \frac{1}{2}(T^+ + T^-) + \frac{1}{4} \left[\left(2F_1 + \frac{h}{\lambda} \right) \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial y} - \left(2F_2 + \frac{h}{\lambda} \right) \lambda_2 \frac{\partial T^+}{\partial y} \right]. \quad /6/$$

2. Узагальнена гранична умова /УГУ/ для тіла з тонким покриттям. Нехай тіло "2" відсутнє, а на поверхні покриття $y = h$ відбувається "лінійна теплопередача в середовище з температурою T_c " [1] за законом

$$\lambda \frac{\partial T(h)}{\partial y} + \alpha [T(h) - T_c] = 0, \quad /7/$$

де α - коефіцієнт тепловіддачі; $T_c = T_c + Q/\alpha$ (Q - тепловий потік, який задається на поверхні $y = h$). При $Q = 0$ із закону /7/ одержуємо закон Ньютона.

Вилучаючи T^+ з умов /6/, з урахування /1/, /2/, та /7/, виводимо УГУ /з точністю $O(h^2)$ / для тіла з тонким покриттям завтовшки $2h$, яка при $F_1 = F_2 = 0$ має вигляд

$$\alpha(1 + 2Kh)(T^- - T_c) + \left(1 - 2Kh + \frac{2h\alpha}{\lambda} \right) \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial y} + 2h\lambda \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \Phi \right) T^- = 0. \quad /8/$$

3. Часткові випадки. Для деяких часткових випадків наведемо відповідні УУС та УГУ при $F_1 = F_2 = 0$, $Q = \bar{u} = 0$.

3.1. Плоска задача для тіла з циліндричним прошарком ($\frac{\partial}{\partial \beta} = 0$, $\Lambda_2 = 1$, $A_1 d\alpha = dS$, $\kappa_2 = 0$):

$$(1 + \kappa_1 h) \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial T^+}{\partial y} - (1 - \kappa_1 h) \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial T^-}{\partial y} = h \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial S^2} \right) (T^+ + T^-),$$

$$T^+ - T^- = h \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial T^-}{\partial y} + \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial T^+}{\partial y} \right).$$

3.2. Плоска задача для циліндра з тонким покриттям:

$$\alpha(1+2\kappa, h)(T^- - T_c) + \left(1 - 2\kappa, h + \frac{2h\alpha}{\lambda}\right) \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial y} + 2h\lambda \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) T = 0.$$

3.3. Плоский проварок у просторовому тілі ($A_1 = A_2 = 1$, $K = 0$):

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial T^+}{\partial y} - \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial T^-}{\partial y} = h \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) (T^+ + T^-), \quad T^+ - T^- = h \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial T^-}{\partial y} + \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial T^+}{\partial y}\right).$$

3.4. Плоска задача для півпростору з покриттям на межі $y = -h$, ($A_2 = 1$, $A_1 d\alpha = dx$, $\kappa_2 = 0$, $\partial/\partial\beta = 0$):

$$\left(1 + \frac{2h\alpha}{\lambda}\right) \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial y} + \left[\alpha + 2h\lambda \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right] T^- = \alpha T_c.$$

3.5. Осесиметрична задача для порожнистого кругового циліндра з покриттям на поверхнях $z = c$ та $z = b$ ($c \leq z \leq b$, z - відстань, точки від осі Ox циліндра; $R_2 = b + h$, $R_1 = c - h$, $\frac{\partial}{\partial\beta} = 0$, $\alpha = x$):

$$\begin{aligned} (1 + h/R_2)(T - T_c)\alpha + \left(1 - \frac{h}{R_2} + \frac{2h\alpha}{\lambda}\right) \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} + \\ + 2h\lambda \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T = 0. \quad \text{при } z = b, \end{aligned}$$

$$(1 - h/R_1)\alpha(T - T_c) - \left(1 + \frac{h}{R_1} + \frac{2h\alpha}{\lambda}\right) \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial z} + 2h\lambda \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T = 0 \quad \text{при } z = c.$$

3.6. Центральна-симетрична задача для кулі радіусом R_0 з тонким покриттям / $\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\beta} = 0$, R - відстань точки від центра кулі/:

$$\alpha \left(1 + \frac{2h}{R_0}\right) (T - T_c) + \left(1 + \frac{2h}{R_0} + \frac{2h\alpha}{\lambda}\right) \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{2h\alpha}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{при } R = R_0. /9/$$

3.7. Одновимірна задача охолодження рідкої речовини через тонку плівку ($T_c = 0$, $x > 0$, $K = 0$, $\Delta \equiv 0$):

$$\left(1 + \frac{2h\alpha}{\lambda}\right) \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} - \left(\alpha + \frac{2h\alpha}{a} \frac{\partial}{\partial t}\right) T = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

4. Для прикладу розглянемо задачу теплопровідності для кулі з тонким покриттям. У момент часу $t = 0$ куля радіусом R_0 з тонким покриттям занурюється в середовище з температурою T_c .

Початкова температура кулі дорівнює $f(R)$. Диференціальне рівняння задачі має вигляд [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} [RT(R,t)] = a \frac{\partial^2}{\partial R^2} [RT(R,t)]. \quad /10/$$

Інтегруючи рівняння /10/ при УІУ /9/ методом розділення змінних [5], знаходимо температуру кулі:

$$T(R,t)T_c + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(x_n R) e^{-a x_n^2 t},$$

де x_n - корені рівняння

$$\operatorname{tg} x R_0 + \beta x R_0 = 0,$$

$$\beta = \left(1 - \frac{4h}{R_0} + \frac{2h\alpha}{\lambda} \right) / \left[\frac{4h}{R_0} - 1 - \frac{2h\alpha}{\lambda} - (2h\lambda x^2 - \alpha) R_0 / \lambda_1 \right];$$

$$C_n = - \int_0^{R_0} [f(R) - T_c] u_n(R) R dR / \int_0^{R_0} \sin(x_n R) u_n(R) dR,$$

$u_n(R)$ - ортонормована до системи функцій $\sin(x_n R)$ послідовність функцій, яка будується за відомим процесом ортогоналізації Грама-Шмідта [3].

Примітка. Аналогічно виводять УУС та УІУ для середовищ, поведінка яких описується рівнянням

$$a \Delta \phi + x^2 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \bar{u} \operatorname{grad} \phi,$$

яке залежно від значень своїх коефіцієнтів моделює різноманітні процеси та явища /теплопровідність з урахуванням скінченної швидкості поширення тепла, поширення звукових та електромагнітних хвиль, задачі електростатики та магнітостатики, дифузії, фільтрації, коливання мембран, кручення та згинання призматичних стержнів тощо [1, 4].

1. Каролоу Г., Егер А. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 2. Коздоба А.А. Методи рішення нелинейних задач теплопроводности. М., 1976. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1973. 4. Косляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962. 5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 6. Флейшман Н.П. Нелинейная модель опрессии деформированного срединного в тонком проварке // Вісн. ДУ. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С. 42-47.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.93

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін
 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ
 ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ В ОБЛАСТЯХ
 ЗІ СКЛАДНОЮ ГЕОМЕТРІЄЮ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ
 НА ОСНОВІ АЛГОРИТМУ ШВАРЦА

В основі розрахунку електронно-променевих приладів лежить задача визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів. Будучи відповідну математичну модель, доцільно зображати такі електроди у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задані граничні значення потенціалу.

Досвід розв'язування багатьох практичних задач показав ефективність методу інтегральних рівнянь /ІР/, оскільки його застосування пов'язане з визначенням невідомих величин лише на межі області. Однак часто виникає потреба розв'язувати задачі в областях зі складною геометрією граничних поверхонь. Ця обставина суттєво ускладнює традиційне застосування методу ІР, причому особливі проблеми виникають у випадку наявності безмежних поверхонь. Використання алгоритму Шварца дає змогу отримати розв'язок в області, утвореній перетином ряду областей, у кожній з яких розв'язок відповідної задачі можна знайти за допомогою методу ІР.

Таким чином, згадана проблема зводиться до послідовності простіших. Це дає змогу отримати розв'язок з довільною наперед заданою точністю.

Нехай у просторі R^3 міститься n замкнених поверхонь $\sum_k$ ($k=1,2,\dots,n$), які не мають спільних точок. Введемо такі позначення: $\sum = \bigcup_{k=1}^n \sum_k$; Ω_k^+ - область, обмежена поверхнею $\sum_k$; $\Omega_k^- = R^3 \setminus \bar{\Omega}_k^+$, де $\bar{\Omega}_k^+ = \Omega_k^+ \cup \sum_k$; $\Omega^+ = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k^+$; $\Omega^- = R^3 \setminus \bar{\Omega}^+$, де $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup \sum$; M, N, P і т.д. - точки в R^3 . Припустимо, що в необмеженій області Ω_m^- міститься сукупність гладких розімкнених поверхонь $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$, які не мають спільних точок. Нехай $\bar{S}_i = S_i \cup \partial S_i$, $\bar{S} = \bigcup_{i=1}^m \bar{S}_i$.

Дана класифікація поверхонь є умовною і застосовується лише для спрощення формулювання проблеми. Усі поверхні розділяють не за принципом "замкнені-незамкнені", а виходячи з умови існування функції Гріна для диференціального оператора відповідної задачі.

Тому, строго кажучи, до першого типу поверхонь можна віднести також деякі незамкнені і навіть необмежені у просторі поверхні.

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими у просторі і незмінними в часі електростатичними зарядами, розподіленими по поверхнях Σ та $\bar{S}$. Потрібно визначити потенціал $U(P)$ в області $\Omega^- \setminus \bar{S}$, якщо на поверхнях виконуються граничні умови першого роду.

При постановці граничної задачі будемо враховувати увагальне трактування її розв'язку, а також специфічне задання граничних умов. Це потрібне для розширення сфери застосування отриманих результатів, а також з огляду на умови використання необхідного математичного апарату інтегральних рівнянь.

Визначимо функцію $U(P) \in H'(\Omega^- \setminus \bar{S}, \Delta)$, яка задовольняє такі умови:

$$\Delta U(P) = 0, \quad P \in \Omega^- \setminus \bar{S}; \quad /1/$$

$$\gamma_0^- U(P) = g_0(P), \quad P \in \Sigma; \quad /2/$$

$$\gamma_0^\pm U(P) = g_\pm(P), \quad P \in S; \quad /3/$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} U(P) = 0, \quad /4/$$

де $H'(\Omega^- \setminus \bar{S}, \Delta) = \{U(P) | U(P) \in H'(\Omega^- \setminus \bar{S}), \Delta U(P) \in L_2(\Omega^- \setminus \bar{S})\}$

$$\gamma_0^- : H'(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}(\Sigma), \quad \gamma_0^\pm : H'(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}(S)$$

— оператори сліду, причому $H'(\Omega^-) = \{U(P) | U(P), |\nabla U(P)| \in L_2(\Omega^-)\}$. Нагадаємо, що деякі з поверхонь Σ_k можуть бути необмеженими в просторі, але їх розміщення в $\mathbb{R}^3$ має передбачати існування необмеженої області Ω^- . Припустимо, також, що $g_0(P) \in H^{1/2}(\Sigma)$, $g_\pm(P) \in H^{1/2}(S)$ — задані функції. Поставлена задача називається задачею Діріхле в просторі зі щільними.

Для побудови наближеного розв'язку задачі /1/-/4/ скористаємося методом Шварца [4]. Припустимо, що вміємо розв'язувати задачу Діріхле для кожної області Ω_k^- ($k = 1, 2, \dots, n$) при заданих граничних умовах на Σ_k та S_{k_i} ; де k_i пробігає деяку підмножину значень індекса з множини $\{1, 2, \dots, m\}$. Покажемо, яким чином можна при цьому розв'язати задачу Діріхле для області Ω^- . Ідея методу полягає у якомоготь кращому наближенні шуканої функції $U(P)$ шляхом розв'язання послідовності задач Діріхле для областей Ω_k^- та вибору спеціальним чином граничних умов на кожному кроці ітераційного процесу.

Згідно з алгоритмом Шварца, на i -му / $i = 1, 2, 3, \dots$ / кроці ітераційного процесу для всіх K знаходимо функції $U_{ik}(P) \in H'(\Omega_k^- \setminus \bar{S}^k, \Delta)$, які задовольняють такі умови:

$$\Delta U_{ik}(P) = 0, \quad P \in \Omega_k^- \setminus \bar{S}^k; \quad /1'/$$

$$\gamma_0^- U_{ik}(P) = - \sum_{j=1, j \neq k}^n \gamma_0^- U_{i-1,j}(P), \quad P \in \Sigma_k; \quad /2'/$$

$$\gamma_0^\pm U_{ik}(P) = - \sum_{j=1, j \neq k}^n \gamma_0^\pm U_{i-1,j}(P), \quad P \in S^k; \quad /3'/$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} U_{ik}(P) = 0, \quad P \in \Omega_k^-, \quad /4'/$$

де $S^k = \bigcup_{i=1}^{m_k} S_{ki}$; $\sum_{k=1}^n m_k = m$;

функції $U_{0k}(P)$ є розв'язками задачі /1'/ - /4'/ з граничними умовами $g_0(P)$, $g_\pm(P)$ відповідно, на поверхнях Σ_k та S^k .

Таким чином, кожна функція $\sum U_{ik}(P)$ є узагальненим розв'язком рівняння Лапласа у відповідній області $\Omega_k^- \setminus \bar{S}^k$ і задовольняє в ній умову на безмежності /4'/, а також граничні умови:

$$\sum_{i=0}^l \gamma_0^- U_{ik}(P) = g_0(P) - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1, j \neq k}^n \gamma_0^- U_{ij}(P), \quad P \in \Sigma_k; \quad /5'/$$

$$\sum_{i=0}^l \gamma_0^\pm U_{ik}(P) = g_\pm(P) - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1, j \neq k}^n \gamma_0^\pm U_{ij}(P), \quad P \in S^k. \quad /6'/$$

Перетворимо рівності /5/ та /6/ до вигляду

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^n \gamma_0^- U_{ij}(P) = g_0(P) - \gamma_0^- U_{lk}(P), \quad P \in \Sigma_k, \quad /7'/$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^n \gamma_0^\pm U_{ij}(P) = g_\pm(P) - \gamma_0^\pm U_{lk}(P), \quad P \in S^k, \quad /8'/$$

У праці [4] показано, що при безмежному зростанні l всі функції $U_{lk}(P)$ рівномірно в замкненій області Ω^- прямують до нуля, якщо виконується умова

$$(n-1)q < 1,$$

де константа q не залежить від граничних умов $g_0(P)$ і $g_\pm(P)$ та визначається лише геометрією області Ω^- , причому $0 < q < 1$.

Таким чином, з рівностей /7/ та /8/ випливає, що неперервна функція

$$U(P) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n U_{ij}(P), \quad P \in \Omega^- \setminus \bar{S}$$

дає розв'язок задачі /1/-/4/.

Як було відзначено, на кожному кроці ітераційного процесу необхідно розв'язувати задачі Діріхле типу /1/-/4/ для всіх областей Ω_k^- . Очевидно, що проблема зводиться до часткового випадку загальної постановки, коли задана лише одна поверхня Σ . Вважатимемо, що для області Ω^- існує функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа. Тому, відповідно до [1, 2], розв'язок задачі типу /1/-/4/ шукатимемо у вигляді $U_1(P) + U_2(P)$, де функції U_1 та U_2 - розв'язки таких задач:

$$\Delta U_1(P) = 0, \quad P \in \Omega^-; \quad /9/$$

$$\gamma_0^- U_1(P) = q_0(P), \quad P \in \Sigma; \quad /10/$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} U_1(P) = 0; \quad /11/$$

$$\Delta U_2(P) = 0, \quad P \in \Omega^- \setminus \bar{S}; \quad /12/$$

$$\gamma_0^- U_2(P) = 0, \quad P \in \Sigma; \quad /13/$$

$$\gamma_0^\pm U_2(P) = q_\pm(P) - U_1(P)|^{\pm} = d_\pm(P), \quad P \in S; \quad /14/$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} U_2(P) = 0. \quad /15/$$

Відомо [5], що розв'язок задачі /9/-/11/ зображається у вигляді

$$U_1(P) = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial G(P, M)}{\partial n_M} q_0(M) dS_M,$$

де $G(P, M)$ - функція Гріна оператора Лапласа для області Ω^- . Таким чином, визначення шуканої функції зводиться до розв'язування задачі /12/-/15/. У зв'язку з цим справедлива така теорема [2, 3].

Теорема 1. Якщо розв'язок задачі /12/-/15/ існує, то його з необхідністю зображають у вигляді

$$U_2(P) = \iint_S G(P, M) \tau(M) dS_M - U_0(P), \quad P \in \Omega^- \setminus \bar{S}, \quad /16/$$

де $U_0(P) = \iint_S \frac{\partial G(P, M)}{\partial n_M} [d(M)] dS_M$; $\tau(M)$ - розв'язок ІР Фредгольма першого роду;

$$K\tau = \iint_S G(P, M) \tau(M) dS_M = q(P), \quad P \in S, \quad /17/$$

причому $g(P) = \frac{1}{2} [d_-(P) + d_+(P)] + U_0(P)$.

Тут $[d(M)]^{df} = d_-(M) - d_+(M) \in H_{00}^{1/2}(S)$;

$H_{00}^{1/2}(S) = \{U(P) | U(P) \in H^{1/2}(S), \omega^{-1/2} U \in L_2(S)\}$,

де $\omega(P)$ — достатньо гладка функція, яка перетворюється в нуль при підході до ∂S як $dist(P, \partial S)$. І навпаки, якщо $\tau \in (H^{1/2}(S))'$ — розв'язок рівняння /17/, то функція $U_2(P)$, яка задається виразом /16/, є розв'язком задачі /12-15/.

Сформульована теорема встановлює еквівалентність диференціальної задачі /12-15/ та двовимірного ІР /17/. Важливим є питання єдиності розв'язку /17/, яке пов'язане з дослідженням єдиності розв'язку задачі /12-15/. Справедливою є також така теорема [2, 3].

Теорема 2. Задача /12/, /13/, /15/ з однорідною граничною умовою $\gamma_0^\pm U_2(P) = 0, P \in S$ має лише тривіальний розв'язок.

Наслідок. Якщо $K\tau = 0$, то $\tau(P) = 0$ на S .

Теорема 3. Оператор $K: (H^{1/2}(S))' \rightarrow H^{1/2}(S)$ — ізоморфізм.

Таким чином, задача /12-15/ за допомогою інтегрального зображення /16/ зведена до еквівалентного ІР Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі /17/, яке має єдиний розв'язок.

Для практичної реалізації описаного алгоритму розглядали задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного скотомом, яка складалася з двох заряджених пластин та двох сфер. Пластини S_1 та S_2 вибрали у вигляді трапецій з такими координатами вершин: S_1 — /0,4; -0,25; -0,4/, /0,4; 0,25; -0,4/, /-0,4; 0,15; -0,2/; /-0,4; -0,15; -0,2/; S_2 — /0,4; -0,25; 0,4/, /0,4; 0,25; 0,4/; /-0,4; 0,15; 0,2/; /-0,4; -0,15; 0,2/.

Радіуси сфер Σ_1 та Σ_2 становили 0,05 і 0,1 відповідно з центрами у точках /-0,2; 0; -0,1/ і /0,15; 0; 0,1/. Граничні значення потенціалу на кожній поверхні вважали сталими:

$$g_\pm(P) = \begin{cases} -1, & P \in S_1; \\ 1, & P \in S_2; \end{cases}$$

$$g_0(P) = \begin{cases} -0,5, & P \in \Sigma_1; \\ 0,5, & P \in \Sigma_2. \end{cases}$$

Задачу розрахунку поля розбивали на дві задачі зі сферою та пластинкою. Отримані при розв'язуванні вказаних задач ІР типу /17/ зводили за допомогою методу саморегуляризації до ІР Фредгольма

другого роду, які розв'язували методом колокації. При цьому для апроксимації розв'язку рівнянь використовували білінійні, фінитні в області інтегрування функції.

Потенціал електростатичного поля після виконання дев'яти ітерацій в окремих точках розглядуваної системи характеризується такими значеннями: $U / 0,1; 0; 0 / = 0,19$; $U / 0; 0; -0,2 / = -0,17$, $U / 0; 0; 0,2 / = 0,039$.

Слід відзначити, що кількість ітерацій у методі Шварца не залежить від граничних умов /2/, /3/, а визначається лише геометрією області Ω^- . Причому при збільшенні відстані між граничними поверхнями різних задач кількість ітерацій зменшується. Зауважимо також, що аналогічно можна побудувати розв'язок задачі Діріхле у випадку, коли область Ω^+ є обмеженою областю із зовнішньою межею Σ_1 і внутрішніми межами $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_n$. При цьому для області Ω^+ , обмеженої поверхнею Σ_1 , отримуємо внутрішню задачу Діріхле, а для областей Ω_k^- ($k = 2, \dots, n$), як і вище, зовнішні задачі Діріхле.

І. Г а р а с и м Я.С., О с т у д і н Б.А. Дослідження розв'язку однієї задачі електростатики на основі функцій Гріна і методу інтегральних рівнянь // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С.63-68. 2. К и ч у р а С.М., О с т у д и н Б.А., С и б и л ь Ю.Н. Исследование одной математической модели, описывающей пространственное электростатическое поле // Теорет. электротехника. 1990. Вип. 49. С.132-139. 3. С и б и л ь Ю.Н. Существование решения двумерных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений первого рода теории потенциала, заданных на гладком многообразии с краем. Львов, 1990. 17 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 21.09.1990, № 856-Укр90. 4. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики: В 4 т. М., 1981. Т.4. Ч.2. 5. Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. М., 1966.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.93

І.І.Дияк, А.Ю.Чернуха

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
НА ОСНОВІ КОМБІНАЦІЇ МЕТОДІВ ГРАНИЧНИХ
ТА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

Побудова та використання комбінованих схем методу скінченних /МСЕ/ та граничних /МГЕ/ елементів значно підвищує ефективність застосування чисельних методів для широкого кола задач математичної фізики [4, 6]. У даній праці розроблена чисельна схема та алгоритм комбінованого підходу для розв'язання двовимірних задач теорії пружності.

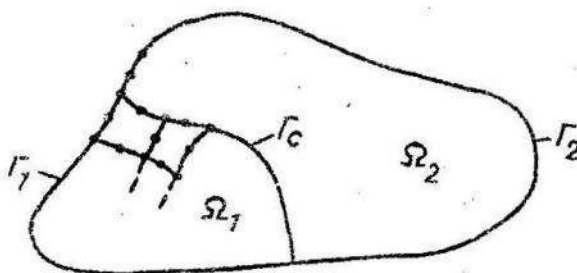


Рис. 1.

Розглянемо ізотропне пружне тіло /рис. 1/, яке займає двовимірну область Ω з межею Γ . Нехай Ω_1 та Ω_2 - підобласті Ω , такі що $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$; $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$; $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_c$ - межа Ω_1 ; $\partial\Omega_2 = \Gamma_2 \cup \Gamma_c$ - межа Ω_2 .

1. Розв'язок задачі теорії пружності для області Ω_1 шукаємо на основі мінімізації функціоналу Лагранжа, зображеного у вигляді

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} u^T B^T D B u d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} u^T t d\Gamma - \int_{\Gamma_c} u^T t d\Gamma, \quad /1/$$

де $u = (u_1, u_2)^T$ - вектор з компонент допустимих переміщень із простору $H = \{u = (u_1, u_2)^T : u_i = g_i, x \in \partial\Omega_1', u_i \in W_1'(\Omega)\}$;

$\partial\Omega_1'$ - та частина межі Γ_1 , на якій задані граничні умови на переміщення, тобто $u_i = g_i$, $i = 1, 2$; $\partial\Omega_1^2$ - частина Γ_1 із заданим поверхневим навантаженням;

$$\sum_{j=1}^2 \partial_{ij} n_j = t_i, \quad i = 1, 2;$$

$t = (t_1, t_2)^T$ - вектор із компонент поверхневих сил; $n_j = \cos(n, x_j)$ - компоненти одиничної нормалі до поверхні; Γ_c - спільна межа областей Ω_1 і Ω_2 .

$$B = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad D = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu_1)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1}{2} \end{bmatrix}$$

де B - матриця диференціальних операторів; D - матриця пружності відповідно; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $\nu_1 = \nu$ - для плоского напруженого стану, $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$ - для випадку плоскої деформації.

Виконуємо дискретизацію області Ω_1 на чотирикутні скінченні елементи. Апроксимуємо переміщення на кожному з них:

$$u_j = \sum \psi_i u_{ji}, \quad j = 1, 2. \quad /2/$$

Тут u_{ji} - значення j -ї компоненти переміщення в i -му вузлі елемента; $\psi_i = \psi_i(\alpha, \beta)$ - координатна функція i -го вузла. Невідомі поверхневі сили, які входять у третій доданок /1/ апроксимуємо на Γ_c аналогічно /2/:

$$t_j = \sum \psi_i t_{ji}, \quad j = 1, 2. \quad /3/$$

Тут t_{ji} - значення j -ї компоненти поверхневої сили в i -му вузлі. Підставляємо співвідношення /2/ і /3/ у функціонал /1/ і сумуємо по всіх скінчених елементах. З умови мінімуму функціоналу $\delta \Pi = 0$ одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$KU = R, \quad /4/$$

де K - прямокутна /ге рахунок невідомих поверхневих сил на межі об'єкту/ матриця жорсткості системи; R - вектор навантаження; $U = (u_1, \dots, u_{2N}, t_1, t_2, \dots, t_{2l})^T$ - вектор шуканих переміщень і поверхневих сил на межі спряження; N - кількість вузлів області Ω_1 ; l - кількість вузлів на межі спряження.

2. Для межі області Ω_2 запишемо граничне інтегральне рівняння, на якому базуються співвідношення прямого МГЕ [2]:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\partial\Omega_2} F_{ij}(x, \xi)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\partial\Omega_2} G_{ij}(x, \xi)t_j(x)d\Gamma(x), \quad i, j=1, 2, \quad /5/$$

де $\xi = \xi(x_1, x_2) \in \partial\Omega_2$ - точка навантаження; $x = x(x_1, x_2) \in \partial\Omega_2$ - точка області; $u_j(x)$ і $t_j(x)$ - відповідно переміщення і поверхневі сили; $F_{ij}(x, \xi)$ і $G_{ij}(x, \xi)$ - фундаментальні розв'язки задачі Кельвіна [2]. Коefіцієнти матриці $C_{ij}(\xi)$ залежать лише від локальної геометрії межі $\partial\Omega_2$. Якщо $\partial\Omega_2$ є гладкою кривою, то $C_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$.

Для отримання чисельного розв'язку задачі, межу області Ω_2 розділяємо на N_2 граничних елементів, $\partial\Omega_2 = \bigcup_{n=1}^{N_2} \Gamma_n$ і $\Gamma_n \cap \Gamma_m = \emptyset$ ($m \neq n$). На елементі Γ_n компоненти переміщень і поверхневих сил задаються у формі

$$u_i(x) = \sum_{k=0}^{N_i^n-1} \varphi^{kn}(x) u_i^{kn}, \quad t_i(x) = \sum_{k=0}^{N_i^n-1} \varphi^{kn}(x) t_i^{kn}, \quad x \in \Gamma_n. \quad /6/$$

Підставляючи /6/ у рівняння /5/, одержуємо нев'язку

$$\begin{aligned} z_i(\xi) = & \sum_{e=0}^{N_i^n-1} \sum_{j=1}^2 \left[C_{ij}(\xi) \varphi^{en}(\xi) + \int_{\Gamma_n} F_{ij}(x, \xi) \varphi^{en}(x) d\Gamma(x) \right] u_j^{en} + \\ & + \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{e=0}^{N_j^m-1} \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\Gamma_m} F_{ij}(x, \xi) \varphi^{em}(x) d\Gamma(x) \right] u_j^{em} - \\ & - \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{e=0}^{N_j^m-1} \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\Gamma_m} G_{ij}(x, \xi) \varphi^{em}(x) d\Gamma(x) \right] t_j^{em}, \quad \xi \in \Gamma_n. \end{aligned} \quad /7/$$

Застосовуємо процедуру методу Бубнова-Гальоркіна:

$$\int_{\Gamma_n} \varphi^{kn}(\xi) z_i(\xi) d\Gamma(\xi) = 0, \quad /8/$$

де $i=1, 2$; $k=0, \dots, (N_i^n-1)$; $n=1, \dots, N_2$.

Підставляючи /7/ у /8/, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$F_{ij}^{knet} u_j^{em} = G_{ij}^{knet} t_j^{em}.$$

Після врахування заданих граничних умов рівняння можна записати у формі

$$A y = b, \quad /9/$$

де A - повністю заповнена несиметрична прямокутна матриця;

U - вектор невідомих переміщень і поверхневих сил у граничних вузлах; δ - вектор правої частини.

Об'єднуючи системи /4/ і /9/ і враховуючи умови спряження на Γ_C :

$$u_j^+ = u_j^-, \quad t_j^+ = t_j^-, \quad j=1,2, \quad /10/$$

одержуємо загальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A^* x = \delta^*. \quad /11/$$

3. Використання для невідомих функцій на межі спряження однакової апроксимації в МСЕ та ІМТЕ забезпечує їх неперервність під час переходу через межу Γ_C .

Відзначимо, що при адатій нумерації вузлів, коли вузли на межі спряження Γ_C є останніми для CE області і першими в МТЕ на межі $\partial\Omega_2$, матриця системи /11/ має таку структуру, зображену на рис.2, де A_1 - симетричний блок стрічкової структури; A_2 - несиметричний блок.

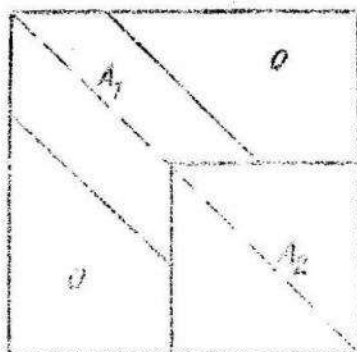


Рис. 2.

Розв'язуючи /11/, визначимо функції переміщення у вузлах скінченноелементної області Ω_1 та шукані переміщення і поверхневі сили у вузлах на межі області Ω_2 . На основі відомих співвідношень /1/ одержуємо переміщення і напруження у будь-якій внутрішній точці області Ω_2 . Визначення деформацій і напружень у вузлах скінченноелементної сітки в області Ω_1 знаходимо за допомогою співвідношень Коші і закону Гука /3/.

Описаний вище алгоритм реалізований у вигляді комплексу програм на мовах Фортран-77 і Сі для ЕЕОМ типу *IBM PC/AT*. У підпрограмі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь враховується специфіка матриці системи /II/, що дає змогу ефективно використовувати оперативну пам'ять. Для систем великих розмірів використовується зовнішня пам'ять.

4. Для тестування запропонованого комбінованого підходу розглянута задача про плоску деформацію жорстко защемленого на краю нескінченного бруса, під дією на одній з поверхонь рівномірно розподіленого навантаження /рис.3/.

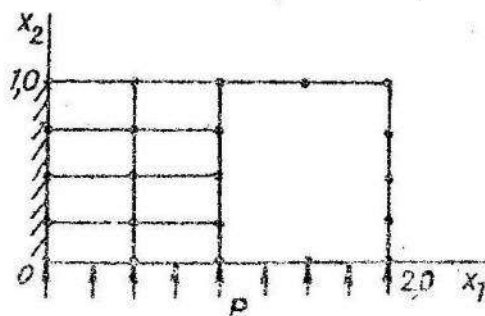


Рис. 3.

Метод	Роз- биття: $dx \times dy$		$A(0.3, 1.0)$		$B(1.0, 1.0)$		$C(2.0, 0.0)$	
			u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
МСЕ	3×6	106	-.1539-3	.1601-3	-.3064-3	.5740-3	.3762-3	.1342-2
МІЕ	3×6	72	-.1615-3	.1469-3	-.3064-3	.5678-3	.3779-3	.1334-2
Комбі-3x3		45	-.1341-3	.1393-3	-.2823-3	.6276-3	.3553-3	.1255-2
нована 6x6		132	-.1499-3	.1484-3	-.3006-3	.5653-3	.3730-3	.1326-2
схема 3x3		114	-.1527-3	.1483-3	-.3104-3	.5709-3	.3537-3	.1199-2

У таблиці наведені значення переміщень у точках з координатами $A = /0.33, 1.0/$, $B = /1.0, 1.0/$, $C = /2.0, 0.0/$. Перших два рядки значення, одержані з використанням відповідно МСЕ та МІЕ для дискретизації всієї області. Останніх три значення, одержані на основі розробленого підходу із застосуванням лінійної /третій і четвертий

рядки/ та квадратичної апроксимації. Вказані також розбиття та сумарна кількість ступенів свободи (*d.o.f. - degrees of freedom*).

1. Б е н е р д ж и П., Б а т т е р ф и л д Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 2. Б р е б б и я К., У о к е р С. Применение метода граничных элементов в технике. М., 1987. 3. Д и я к И.И. Решение двумерных задач квазистатической термоупругости на основе применения высокоточных схем МКЕ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 4. B e e r G. Implementation of combined boundary element finite element analysis with applications in geomechanics // Devel. boundary Elem. Math. 1986. Vol.4. P. 191-225. 5. P a r r l i n a P., G u l g g i a n i M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method // Comput. and Struct. 1989. Vol.33. N1. P. 269-279. 6. W e a r i n g J.L., S h e i k h M.A. A Combined Finite Element Boundary Element Technique for Stress Analysis // Devel. Boundary Elem. Math. 1988. Vol.1. P. 493-507

Стаття надійшла до редколегії 09.04.93

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач, І.І.Дяк

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянемо двовимірну задачу нестационарної теплопровідності, яка описується рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, (x,t) \in \Omega \times (0,T) \quad /1/$$

$i=1,2$

з граничними умовами на температуру

$$u(x,t)|_{\Gamma_1} = \bar{u}(t) \quad /2/$$

і тепловий потік

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)} \Big|_{\Gamma_2} = q(x,t) \Big|_{\Gamma_2} = q(t), \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \quad /3/$$

та початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad /4/$$

Для розв'язання початково-крайової задачі /1/-/4/ застосуємо прямий метод граничних елементів /ПМГЕ/. У цьому випадку розв'язання задачі /1/-/4/ зводиться до інтегрального рівняння

© Головач Н.П., Дяк І.І., 1993

Фредгольма другого роду:

$$c(\xi)u(\xi, T) + k \int_0^T \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x, T, t) d\Gamma(x) dt = k \int_0^T \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x, T, t) \cdot \\ \cdot d\Gamma(x) dt + \int_{\Omega} u_0(x) u^*(\xi, x, T, 0) d\Omega(x), \quad /5/$$

де u^* і q^* - відповідно фундаментальний розв'язок і його нормальна похідна. Для двовимірнього випадку

$$u^*(\xi, x, T, t) = \frac{1}{4\pi k(T-t)} \exp \left[-\frac{z^2}{4k(T-t)} \right];$$

$$q^*(\xi, x, T, t) = \frac{1}{8\pi k^2(T-t)^2} \exp \left[-\frac{z^2}{4k(T-t)} \right],$$

де $z^2 = z_i z_i$, $z_i = x_i(\xi) - x_i(x)$, $d = z_i n_i(x)$, $i = 1, 2$;

$c(\xi)$ - кутовий коефіцієнт у точці $\xi = \xi(\xi_1, \xi_2)$, який для гладкої межі дорівнює $1/2$.

Зображаємо межу області Ω у вигляді об'єднання N граничних елементів, які апроксимуються лінійними відрізками або криволінійними параболою. Проміжок часу інтегрування $[0, T]$ розбиваємо на F інтервалів, область Ω - на S скінченних елементів. Шукані значення u і q подаємо у вигляді

$$u(x, t) = \varphi(x)^T \psi(t) u^n,$$

$$q(x, t) = \varphi(x)^T \psi(t) q^n, \quad /6/$$

де $\varphi(x)$, $\psi(t)$ - базисні функції відповідно просторових і часової змінних; u^n , q^n - вектори невідомих вузлових значень u і q .

Для інтегрування /5/ найчастіше використовують схеми:

$$c_i u_F^i + k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* \psi dt d\Gamma \right) u^n = \\ = k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* \psi dt d\Gamma \right) q^n + \sum_{s=1}^S \int_{\Omega_s} u^* u_0 d\Omega; \quad /7/$$

$$c_i u_F^i + k \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{F-1}}^{t_F} q^* \psi dt d\Gamma \right) u^n = \\ = k \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{F-1}}^{t_F} u^* \psi dt d\Gamma \right) q^n + \sum_{s=1}^S \int_{\Omega_s} u^* u_{F-1} d\Omega. \quad /8/$$

У схемі /7/ інтегрування за часом завжди починається з початкового моменту $t_0 = 0$ і не вимагає обчислення значення функції u у внутрішніх точках на кожному часовому кроці. Граничні значення функцій u та q з попереднього кроку по часу використовуємо при отриманні розв'язку на даному кроці шляхом сумування граничних інтегралів. У схемі /8/ в об'ємному інтегралі необхідні значення функцій u у внутрішніх вузлах з попереднього кроку за часом. Тобто у цій схемі кожний крок по часу розглядається як нова задача.

Вважаємо, що інтерполююча функція $\psi(t) \equiv 1$, тобто значення u та q , постійні на кожному часовому кроці.

Записуємо рівняння /7/ для всіх вибраних на межі точок. Отримуємо систему рівнянь

$$\sum_{f=1}^F H_{fF} U_f = \sum_{f=1}^F G_{fF} Q_f + B_0 \bar{U}_0, \quad /9/$$

де елементи матриць $\hat{H}$ і $\hat{G}$ визначаються за формулами

$$h_{fFij}^m = k \int_{\Gamma_j} \psi_m \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt d\Gamma, \\ g_{fFij}^m = k \int_{\Gamma_j} \psi_m \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt d\Gamma, \quad /10/$$

де $H_{fFij} = \hat{H}_{fFij} + c_i \delta_{fF} \delta_{ij}$, δ_{fF} , δ_{ij} - символи Кронекера.

Зауважимо, що інтеграли по часу можна обчислити в явному вигляді:

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt = \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{d}{8\pi k^2 (t_F - t)^2} \exp\left[-\frac{z^2}{4k(t_F - t)}\right] dt = \int_{t_F - t_f}^{t_F - t_{f-1}} \frac{d}{8\pi k^2 \tau^2} \exp\left[-\frac{z^2}{4k\tau}\right] d\tau = \\ = \frac{d}{2\pi k z^2} \int_{t_F - t_f}^{t_F - t_{f-1}} \frac{z^2}{4k\tau^2} \exp\left[-\frac{z^2}{4k\tau}\right] d\tau = \frac{d}{2\pi k z^2} [\exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f)], \quad /11/$$

$$\text{де } a_f = \frac{z^2}{4k(t_F - t_f)},$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt = \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{1}{4\pi k (t_F - t)} \exp\left[-\frac{z^2}{4k(t_F - t)}\right] dt = \int_{t_F - t_f}^{t_F - t_{f-1}} \frac{1}{4\pi k \tau} \exp\left[-\frac{z^2}{4k\tau}\right] d\tau = \quad /12/$$

$$= \frac{1}{\pi z^2} \int_{t_F - t_f}^{t_F - t_{f-1}} \frac{z^2}{4k\tau} \exp\left[-\frac{z^2}{4k\tau}\right] d\tau = \frac{1}{4\pi k} \int_{a_{f-1}}^{a_f} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{1}{4\pi k} \times \\ \times [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)],$$

де $E_1(z)$ — інтегрально-показникова функція, що обчислюється як

$$E_1(z) = \int_0^z \frac{e^{-x}}{x} dx = -C - \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n \cdot n!}.$$

Для обчислення інтеграла /12/ використана заміна $x = \frac{z^2}{4k\tau}$. Із вигляду a_f випливає, що у формулі /11/ $\exp(-a_f) = 0$, тому що

$$\lim_{f \rightarrow F} \exp \left[-\frac{z^2}{4k(t_F - t_f)} \right] = 0,$$

а в формулі /12/ $E_1(a_f) = 0$.

Для обчислення граничних інтегралів інтерполюючі функції по просторових змінних вибираємо лінійними або квадратичними. Граничні інтеграли визначаємо за допомогою квадратурних формул Гаусса.

Рівняння /8/ у випадку другої крокової схеми для всіх вибраних граничних вузлів подаємо у вигляді

$$H U_F = G Q_F + B U_{F-1}, \quad /13/$$

де елементи матриць H і G визначаємо за допомогою /10/ при $f = F$.

У випадку одновимірної задачі нестационарної теплопровідності $\Omega = [0, L]$, тепловий потік обчислюємо як

$$q(x) = - \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Фундаментальний розв'язок для одновимірної задачі

$$u^*(\xi, x, T, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}} \exp \left[-\frac{z^2}{4(T-t)} \right], \quad /14/$$

і "направлений" потік

$$q^*(\xi, x, T, t) = - \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{z \operatorname{erfc} z}{4\sqrt{\pi(T-t)^{3/2}}} \exp \left[-\frac{z^2}{4(T-t)} \right]. \quad /15/$$

Інтегральне співвідношення ІМІЕ для одновимірної задачі у будь-якій точці $\xi \in \Omega$ має вигляд

$$u(\xi, T) = -k \left[\int_0^T u^* q dt - \int_0^T q^* u dt \right] \Big|_0^L + \int_0^L u_0 u^* dx. \quad /16/$$

Вважаючи, що початкова температура $u_0(x) = \text{const} = \theta$, $x \in \Omega$, останній член у /16/ можна обчислити в явному вигляді

$$\int_0^L \theta u^* dx = \int_{-\xi}^{L-\xi} \theta \frac{\exp[-z^2/(4t_F)]}{2\sqrt{\pi t_F}} dz = \frac{1}{2} \theta \left[\operatorname{erf} \left(\frac{L-\xi}{2\sqrt{t_F}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{t_F}} \right) \right],$$

де $erf(z)$ - функція ймовірності [4], яка визначається як

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Припускаючи, що функції u та q є постійними за часом на кожному часовому кроці, зі схеми /7/ отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} u_F^1 \\ u_F^2 \end{Bmatrix} + k \sum_{f=1}^F \left(\int_{t_{f-1}}^{t_f} \begin{bmatrix} q_1^* & -q_2^* \\ q_2^* & -q_1^* \end{bmatrix} dt \right) \begin{Bmatrix} u_f^1 \\ u_f^2 \end{Bmatrix} = \\ & = k \sum_{f=1}^F \left(\int_{t_{f-1}}^{t_f} \begin{bmatrix} u_1^* & -u_2^* \\ u_2^* & -u_1^* \end{bmatrix} dt \right) \begin{Bmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \theta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} erf\left(\frac{L}{2\sqrt{t_F}}\right), \end{aligned} \quad /18/$$

де $u_1^* = u^*(0^+, 0, t_F, t)$; $u_2^* = u^*(0^+, L, t_F, t)$; $q_1^* = q^*(0^+, 0, t_F, t)$; $q_2^* = q^*(0^+, L, t_F, t)$, які внаслідок симетричності u^* та q^* збігаються з $u^*(L^-, L, t_F, t)$, $u^*(L^-, 0, t_F, t)$, $q^*(L^-, L, t_F, t)$, $q^*(L^-, 0, t_F, t)$ відповідно.

Інтегрування по часу у /18/ також можна виконати аналітично

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt = z \operatorname{sgn} z \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\exp[-z^2/\{4(t_F-t)\}]}{4\sqrt{\pi}(t_F-t)^{3/2}} dt = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} z (erf|\delta_f| - erf|\delta_{f-1}|),$$

/19/

де $\delta_f = z/(2\sqrt{t_F-t})$;

$$\begin{aligned} \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt &= \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\exp[-z^2/\{4(t_F-t)\}]}{2\sqrt{\pi}(t_F-t)^{1/2}} dt = \sqrt{\frac{t_F-t_{f-1}}{\pi}} \exp(-\delta_{f-1}^2) - \\ &- \sqrt{\frac{t_c-t_f}{\pi}} \exp(-\delta_f^2) - \frac{|z|}{2} (erf|\delta_f| - erf|\delta_{f-1}|). \end{aligned} \quad /20/$$

Враховуючи позначення δ_f [4], приймаємо $erf|\delta_F| = 1$ у /19/ і /20/, $\exp(-\delta_F^2) = 0$ у /20/.

Повертаючись до системи рівнянь /18/, зауважимо, що ця система розв'язується для моменту часу $t = t_F$. а значення векторів $\begin{Bmatrix} u_f^1 \\ u_f^2 \end{Bmatrix}$ та $\begin{Bmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \end{Bmatrix}$ при $f = 1, 2, \dots, F-1$ є задані або обчислені на попередніх кроках по часу.

Важливо відзначити, що якщо в процесі чисельної реалізації задається постійний крок по часу Δt , то на кожному часовому кроці необхідно визначити тільки дві нові матриці:

$$\int_0^{\Delta t} \begin{bmatrix} q_1^* & -q_2^* \\ q_2^* & -q_1^* \end{bmatrix} dt, \quad \int_0^{\Delta t} \begin{bmatrix} u_1^* & -u_2^* \\ u_2^* & -u_1^* \end{bmatrix} dt.$$

сі інші відомі з попередніх кроків.

Розв'язуючи систему /18/, знаходимо в момент часу $t = t_F$ граничні значення функцій u та q , яких не вистачало. І при необхідності, користуючись співвідношенням /16/, шукаємо значення функції температури у деяких внутрішніх вузлах одновимірної області.

Із схеми /8/ для двох граничних вузлів отримуємо систему

$$\begin{aligned} 1/2 u(\xi^n, t_F) = & k \sum_{j=1}^2 \left(\int_{t_{F-1}}^{t_F} q^*(\xi^n, x^j, t_F, t) dt \right) u(x^j, t_F) - \\ & - k \sum_{j=1}^2 \left(\int_{t_{F-1}}^{t_F} u^*(\xi^n, x^j, t_F, t) dt \right) q(x^j, t_F) + \sum_{s=1}^S \left(\int_{x_{s-1}}^{x_s} u^*(\xi^n, x^s, t_F, t_{F-1}) M(x^s) \right) dx_s u_{F-1} \end{aligned} \quad /21/$$

$n = 1, 2,$

де $M(x^s)$ - базисна функція на S -му проміжку, яка може бути лінійною, квадратичною; u_{F-1} - вектор вузлових значень функції u в момент часу $t = t_{F-1}$.

Для апробації розроблених схем розглянута задача про нагрівання необмеженої пластинки завтовшки $2R$ ($-R \leq x \leq R$) з початковою температурою T_0 [3]. Нагрівання відбувається з обох сторін однаково від джерела з постійним тепловим потоком, тобто

$$-\lambda \frac{\partial u(R, t)}{\partial x} + q_c = 0.$$

У таблиці наведені значення температури $u \cdot 100$ в різних точках пластини в момент часу $t_F = 1$ для різних кроків інтегрування та аналітичний розв'язок [3]. Максимальна відносна похибка обчислення значення температури на основі схеми /7/ становить для вищенаведених часових кроків 1,2; 0,6 і 0,3 % відповідно, а для схеми /8/ - 1,7; 1,1 і 0,8 %.

x	Аналітичний розв'язок	Схема /7/ $\Delta t = 0,1$	Схема /7/ $\Delta t = 0,05$	Схема /7/ $\Delta t = 0,025$	Схема /7/ $\Delta t = 0,1$	Схема /8/ $\Delta t = 0,05$	Схема /8/ $\Delta t = 0,025$
0,0	2417	2435	2436	2421	2459	2443	2435
0,2	2427	2453	2441	2434	2468	2452	2443
0,4	2457	2486	2471	2464	2500	2482	2473
0,6	2507	2535	2521	2514	2550	2532	2523
0,8	2577	2603	2590	2584	2618	2601	2593
1,0	2667	2684	2675	2671	2709	2693	2686

Примітка: Δt - крок за часом.

Таким чином, застосування схеми /7/ є ефективнішим, оскільки і час розв'язання задачі на ЦЕОМ у цьому випадку удвічі менший порівняно зі схемою /8/.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 2. Бребоба К., Теялес К., Броубел Л. Методы граничных элементов. М., 1987. 3. Ишков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 4. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л., 1951.

Стаття надійшла до редколегії 09.04.93

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ

Сингулярно збурені задачі для параболічних рівнянь другого порядку вивчені достатньо, а от для псевдодиференціальних рівнянь — у літературі не описані.

Розглянемо випадок повного виродження псевдодиференціального рівняння. А саме, в області $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ маємо задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + a(x, t)u = f(x, t); \quad /1/$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1. $a(x, t), f(x, t)$ — достатньо гладкі в D функції.

2. $a(x, t) > 0$ у D .

3. $\frac{\partial^{i+j} f(0, 0)}{\partial x^i \partial t^j} = \frac{\partial^{i+j} f(l, 0)}{\partial x^i \partial t^j} = 0$ ($i+j=0, \dots, N$), де N — точність побудованої нижче асимптотики.

За цих припущень існує єдиний класичний розв'язок задачі /1/-/2/ [5].

Методом примежового шару [2] побудуємо асимптотику до деякого порядку N розв'язку задачі /1/-/2/ за степенями малого параметру ε . Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i'(\xi, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i^2(\eta, t) + R_N(x, t, \varepsilon), \quad /3/$$

© Дудзяний І.М., Цимбал В.М., 1993

$$\text{де } \tau = t/\varepsilon, \xi = x/\varepsilon, \eta = \frac{l-x}{\varepsilon}.$$

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у /3/. Вони визначаються стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x, t)$ ($i = 0, \dots, N$) обчислюємо рекурентно зі співвідношень

$$a(x, t)\bar{u}_i = f_i(x, t) \quad (i = 0, \dots, N), \quad /4/$$

$$\text{де } f_0(x, t) \equiv f(x, t), \quad f_i(x, t) = \frac{\partial^2 \bar{u}_{i-2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \bar{u}_{i-3}}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t}.$$

Тут і надалі вважаємо, що функція з від'ємним індексом точно дорівнює нулю. Функції $\bar{u}_i(x, t)$ ($i = 0, \dots, N$) не задовольняють початкові і граничні умови /2/. Цій меті служать Π -, Q -, Q -функції розв'язання /3/.

Функції примежового шару $\Pi_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$) є розв'язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / x -параметр/:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} + a(x, 0)\Pi_i = \psi_i(x, \tau); \quad /5/$$

$$\Pi_i(x, 0) = -\bar{u}_i(x, 0), \quad /6/$$

де $\psi_0(x, \tau) \equiv 0$, $\psi_i(x, \tau)$ ($i = 1, \dots, N$) легко виписуються явно і лінійно виражаються через $\Pi_j(x, \tau)$ ($j < i$) та їхні похідні.

Функції примежового шару в околі ($x=0$) $Q'_i(\xi, t)$ ($i = 0, \dots, N$) є розв'язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / t -параметр/:

$$-\frac{\partial^2 Q'_i}{\partial \xi^2} + a(0, t)Q'_i = \psi'_i(\xi, t); \quad /7/$$

$$Q'_i(0, t) = -\bar{u}_i(0, t), \quad Q'_i(\xi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad /8/$$

де $\psi'_0(\xi, t) \equiv 0$, $\psi'_i(\xi, t)$ ($i = 1, \dots, N$) явно виражаються через $Q'_j(\xi, t)$ ($j < i$) та їхні похідні.

Нарешті, функції примежового шару в околі ($x=l$) $Q_i^2(\eta, t)$ ($i = 0, \dots, N$) є розв'язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / t -параметр/:

$$-\frac{\partial^2 Q_i^2}{\partial \eta^2} + a(l, t)Q_i^2 = \psi_i^2(\eta, t); \quad /9/$$

$$Q_i^2(0, t) = -\bar{u}_i(l, t), \quad Q_i^2(\eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \quad /10/$$

де $\Psi_0^2(\eta, t) \equiv 0$, $\Psi_i^2(\eta, t)$ ($i = 1, \dots, N$) явно виражаються через $Q_j^2(\eta, t)$ ($j < i$) та їхні похідні.

Якщо визначені рекурентно усі $\bar{u}_i(x, t)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) з /4/, то $\Pi_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$) визначаються рекурентно з /5/, /6/, $Q_i^1(\xi, t)$ ($i = 0, \dots, N$) визначаються рекурентно з /7/, /8/, а $Q_i^2(\eta, t)$ ($i = 0, \dots, N$) визначаються рекурентно з /9/, /10/.

Елементарно можна довести, що Π -, Q^1 -, Q^2 - є функціями при-
межового шару. Слід врахувати також, що з умови 3 випливає

$$\Pi_i(x, \tau)|_{x=0} = \Pi_i(x, \tau)|_{x=1} = 0, \quad Q_i^1(\xi, t)|_{t=0} = Q_i^2(\eta, t)|_{t=0} = 0 \quad (i = 0, \dots, N).$$

Це дає змогу виконати рекурентні процеси і визначити функції, які входять у /3/.

Методом інтегралів енергії [4] одержуємо оцінку

$$\|R_N(x, t, \varepsilon)\|_{L_2(D)} \leq C \varepsilon^{N+1},$$

де константа C не залежить від ε . Отже, доведена асимптотична коректність розвинення /3/.

Результат роботи оформлюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов 1-3 розв'язок задачі /1/ - /2/ допускає асимптотичне зображення 3, де $\bar{u}_i(x, t)$ ($i = 0, \dots, N$) визначаються рекурентно зі скінченних рівнянь /4/; функції звичайних прилежових шарів $\Pi_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$), $Q_i^1(\xi, t)$ ($i = 0, \dots, N$), $Q_i^2(\eta, t)$ ($i = 0, \dots, N$) рекурентно визначаються як розв'язки відповідно задач /5/ і /6/, /7/ і /8/, /9/ і /10/.

Зауваження 1. Аналогічний випадок виродження для рівняння у частинних похідних третього порядку вивчений у праці [3].

Зауваження 2. Результат роботи одержано при виконанні надзвичайно обтяжливої умови 3. Можливо за рахунок введення в асимптотику функцій кутового прилежового шару [1] цієї умови можна позбутися.

І. Б у т у з о в Ф.П., Н е с т е р о в А.В. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. математики и кибернетики. 1978. № 2. С.49-56.
2. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122.
3. Д у д з я н и й І.М., Ц и м б а л В.М. Асимптотичний розв'язок змішаної задачі для деякого рівняння третього порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1982. Вип.19. С.14-17. 4. К у -
с о в Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 5. Rothe M., Showalter R.E. A nonlinear pseudoparabolic diffusion equation // SIAM J. Math. Anal. 1985. Vol. 16. P. 980-999.

Стаття надійшла до редакції 15.01.93

Н.М.Паук

ЗАСТОСУВАННЯ ОБ'ЄДНАНОГО
ГРАНИЧНО-СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОГО АНАЛІЗУ
ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Розглянемо задачу про плоску деформацію ізотропного однорідного пружного тіла, поперечний переріз якого займає область $\Omega \subset R^2$ /рис. I/. Нехай область Ω складається з двох частин $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 — довільна двовимірна область з ліпшицевою межею $\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_1^{(i)}$; Ω_2 — область вигляду $\Omega_2 = \{\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^e, -\frac{h}{2} \leq \alpha_2 \leq \frac{h}{2}\}$.

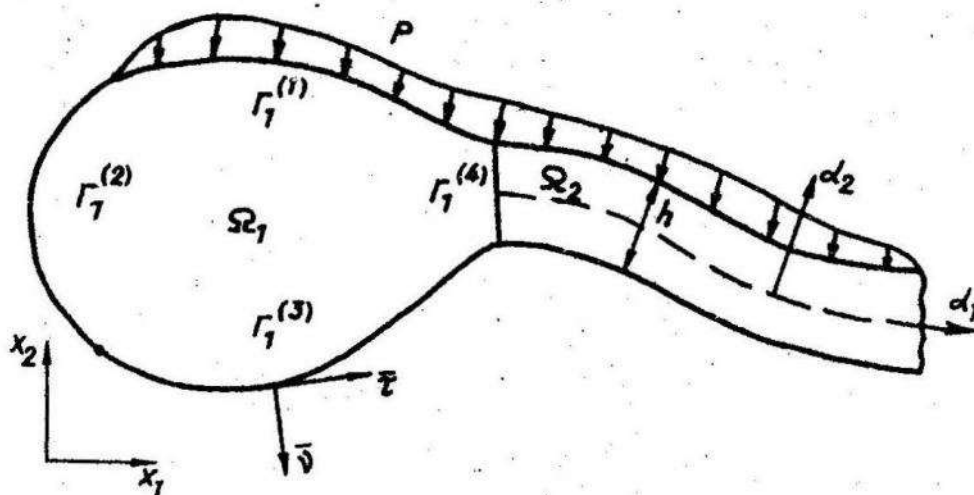


Рис. I.

Припустимо, що розмір h області Ω_2 значно менший від інших розмірів оболонки і визначає її товщину. Припустимо також, що частина межі $\Gamma_1^{(4)}$ є прямолінійною і перпендикулярною до лінії $\alpha_2 = \text{const.}$

Нехай напружено-деформівний стан тіла, що займає область Ω , описується комбінованою математичною моделлю, основні співвідно-

шення якої в області Ω_1 , є рівняннями двовимірної задачі теорії пружності в переміщеннях [2]:

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\mu} \psi_i^{(1)} = 0, \quad /1/$$

де $\mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$ - модуль зсуву; $i, j = 1, 2$, а в області Ω_2 - рівняннями теорії оболонок типу Тимошенка [3]:

$$\begin{aligned} \frac{B}{A_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{d^2 u_1^{(2)}}{d\alpha_1^2} + K_1 \frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} \right) + GK_1 \left(K_1 u_1^{(2)} + \frac{1}{A_1} \frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)} \right) + p_1^{(2)} &= 0, \\ \frac{G}{A_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{d^2 w^{(2)}}{d\alpha_1^2} - K_1 \frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1} + \frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1} \right) - BK_1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + K_1 w^{(2)} \right) + p_R^{(2)} &= 0, \\ \frac{D}{A_1} \frac{1}{A_1} \frac{d^2 \gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1^2} - G \left(-K_1 u_1^{(2)} + \frac{1}{A_1} \frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)} \right) + m_1^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad /2/$$

Тут $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$ - переміщення точок тіла в декартовій системі координат x_1, x_2 ; $u_1^{(2)}, w^{(2)}$ - переміщення точок серединної площини в напрямку осей α_1 і α_2 відповідно; $\gamma_1^{(2)}$ - кут повороту нормалі до серединної площини; $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}$ - густини масових сил, прикладених до частини тіла, що займає область Ω_1 ; $p_1^{(2)}, p_R^{(2)}, m_1^{(2)}$ - густини приведених зовнішніх сил і моменту, які виражаються через густину масових та поверхневих сил [1]; A_1 - коефіцієнт Ламе; K_1 - кривизна оболонки; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; B, G, D - константи, що характеризують пружні властивості оболонки:

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad G = K'G'h, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

для ізотропних оболонок $G' = \frac{E}{2(1+\nu)}, K' = \frac{5}{6}$.

Співвідношення /1/, /1.2/ є диференціальними рівняннями задачі, яку слід розв'язувати за певних граничних умов. Нехай на межі області Ω_1 задані умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \nu_j &= \bar{p}_\nu^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \tau_j = \bar{p}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(1)}, \\ u_i^{(1)} \nu_i &= \bar{u}_\nu^{(1)}, \quad u_i^{(1)} \tau_i = \bar{u}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)}, \\ u_i^{(1)} \nu_i &= \bar{u}_\nu^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \tau_j = \bar{p}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(3)}, \end{aligned} \quad /3/$$

де ν_i, τ_i - напрямні косинуси зовнішньої нормалі ν і дотичної τ ;

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{(1)} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i^{(1)}}{dx_j} + \frac{du_j^{(1)}}{dx_i} \right),$$

δ_{ij} - символ Кронекера.

При $\alpha_1 = \alpha_1^e$ - умови одного з типів:

- жорстке зачеплення $u_1^{(2)} = w^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = 0$;
- шарнірно опертий край $u_1^{(2)} = w^{(2)} = 0, M_i^{(2)} = 0$;
- вільний край $Q_i^{(2)} = M_i^{(2)} = T_i^{(2)} = 0$;
- симетрія $u_i^{(2)} = \gamma_i^{(2)} = 0, Q_i^{(2)} = 0,$

/4/

де
$$T_i^{(2)} = B \left(\frac{1}{A_i} \frac{du_i^{(2)}}{d\alpha_1} + K_i w^{(2)} \right),$$

$$Q_i^{(2)} = G \left(-K_i u_i^{(2)} + \frac{1}{A_i} \frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_i^{(2)} \right), \quad M_i^{(2)} = \frac{D}{A_i} \frac{d\gamma_i^{(2)}}{d\alpha_1}.$$

На ділянці межі $\Gamma_1^{(4)} = \{\alpha_1 = 0, -\frac{h}{2} \leq \alpha_2 \leq \frac{h}{2}\}$ - задані умови спраження:

- геометричні /нерозривності переміщень/

$$u_i^{(1)} \tau_i = w^{(2)}(0), \quad u_i^{(1)} \nu_i = u_i^{(2)}(0) + \gamma_i^{(2)}(0) \alpha_2; \quad /5/$$

$\frac{h}{2}$ - статичні /умови статичної рівноваги/

$$\int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \nu_j d\alpha_2 = T_i^{(2)}(0), \quad \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \tau_j d\alpha_2 = Q_i^{(2)}(0),$$

$$\int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \nu_j \alpha_2 d\alpha_2 = M_i^{(2)}(0).$$

/6/

Отже, для запропонованої комбінованої математичної моделі "пружне тіло-оболонка типу Тимошенка" крайовою задачею є система рівнянь /1/, /2/ з граничними умовами /3/ - /6/.

Для чисельної реалізації запропонованої комбінованої моделі використовують прямий метод граничних елементів для задачі теорії пружності і метод скінченних елементів - для задачі теорії оболонок типу Тимошенка.

Чисельний розв'язок задач теорії пружності методом граничних елементів є важкою уваги альтернативою і доповненням до методу скінченних елементів та інших методів, які застосовують у теорії пружності для розрахунку напружень. В МГЕ розмірність задачі

зменшується на одиницю і невідомі величини визначаються відразу на межі області. МГЕ має явні переваги як для областей великих розмірів, так і для областей з високою концентрацією напружень. З іншого боку, скінченні елементи зручніше використовувати під час розгляду інших частин тіла. Відповідні комбіновані розв'язки майже необмежено розширюють область застосування обох методів, і такий підхід інтенсивно розвивається [3-6].

У даному випадку для з'єднання моделей використовуємо метод комбінування, суть якого полягає у тому, що для кожної з моделей, які розраховують за теорією пружності і теорією оболонок типу Тимошенка, розв'язується послідовність систем лінійних алгебраїчних рівнянь зі спеціальними правими частинами. Ці праві частини містять $N_1 + 1$, $N_2 + 1$ стовпців, де N_1, N_2 - число ступенів свободи на поверхні спряження для кожної з моделей. У випадку, коли на поверхні спряження маємо три вузли для пружного тіла і один - для оболонки, то $N_1 = 6$, $N_2 = 3$.

Остаточний розв'язок зображаємо у вигляді суми часткових розв'язків, домножених на поки що невідомі константи c_i, δ_j , $i = 1, 6, j = 1, 3$. Для невідомих переміщень він має вигляд

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \sum_{i=1}^{N_1} c_i u_1^{(1)(i)} + u_1^{(1)(0)}, & u_2^{(1)} &= \sum_{i=1}^{N_1} c_i u_2^{(1)(i)} + u_2^{(1)(0)}, \\ u_1^{(2)} &= \sum_{j=1}^{N_2} \delta_j u_1^{(2)(j)} + u_1^{(2)(0)}, & w^{(2)} &= \sum_{j=1}^{N_2} \delta_j w^{(2)(j)} + w^{(2)(0)}, \\ r_1^{(2)} &= \sum_{j=1}^{N_2} \delta_j r_1^{(2)(j)} + r_1^{(2)(0)}. \end{aligned}$$

Змінні з нульовим індексом відповідають розв'язку задачі з заданими нульовими переміщеннями на спільній межі. Індекси i та j позначають змінні, що виникають при одиничних переміщеннях у вузлах спряження. Аналогічні вирази маємо для напружень, зусиль і моментів.

Невідомі величини c_i, δ_j , $i = 1, 6, j = 1, 3$ знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь, яку одержуємо підставляючи записані вирази для змінних у співвідношення для кінематичних та статичних умов спряження /5/, /6/.

Наведений алгоритм реалізований у вигляді комплексу програм на мові Фортран 77 для ПЕОМ типу ІВМ РС/АТ.

Приклад. Розглянемо тестову задачу про плоску деформацію циліндра під дією нормального тиску інтенсивністю P , рівномірно розподіленого по зовнішній поверхні. Ця задача також відома як задача Ляме [2]. Для розрахунку обрано фрагмент конструкції, поперечний переріз якого поданий на рис. 2. На межах фрагменту задавані умови симетрії.

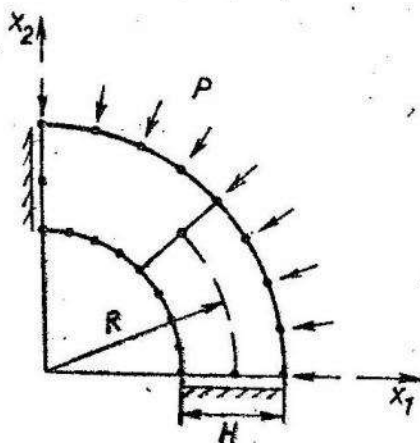


Рис. 2.

Дослідимо задачу Ляме з використанням розглянутої комбінованої моделі. Зобразимо конструкцію у вигляді об'єднання двох рівних частин, одна з яких моделюється рівняннями теорії пружності, друга – рівняннями теорії оболонок типу Тимошенка.

Числові розв'язки одержані для модуля Юнга $E/P = 2 \cdot 10^4$ та коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,3$.

Результати, отримані на основі запропонованої комбінованої моделі, порівнювали з аналітичним розв'язком задачі Ляме. Відносну похибку наближеного розв'язку обчислювали за формулою

$$e(u) = \frac{u_{ан} - u_{набл}}{\max u_{ан}} 100\%.$$

Для відношення $H/R = 0,1$ використовували розбиття сіткою по довжині на вісім і по товщині – на два лінійних граничних елементи для оболонки. Це привело до результатів з відносною похибкою максимальних радіальних переміщень u_r до 0,6 %. Використання сітки 4×1 квадратичних граничних елементів для тіла і чотирьох скінченних елементів для оболонки дало змогу одержати розв'язок з відносною похибкою для u_r до 0,46 %. Слід зауважити, що ці максимальні похибки припадають на точки, що лежать на поверхні об'єднання комбінованої моделі.

"Сплеск" похибок при визначенні переміщень біля лінії спряження, що виникає внаслідок реалізації умов пружного спряження комбінованої моделі, є невеликим для оболонок середньої товщини. Це пояснюється, з одного боку, непридатністю теорії оболонок для розрахунку товстих оболонок, а з іншого, необхідністю вводити у розгляд додаткові вузли зв'язку під час розрахунку тонких тіл методом граничних елементів. Проте якісна картина напружено-деформованого стану залишається незмінною, що підтверджує придатність і перспективність використання об'єднаного гранично-скінченноелементного підходу до розглянутої комбінованої моделі.

1. П е л ь х Б.Д. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978.
2. Т и м о ш е н к о С.П. Курс теории упругости. К., 1972.
3. С а в у л а Я.Г., Д у б о в и к А.В., П а у к Н.М. Крайова і варіаційна задачі зі штрафом комбінованої моделі плоскої теорії пружності // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С.3-9.
4. Beez G. BEFE - A combined boundary element finite element computer program // Advances in Engineering Software. 1984. Vol. 6. P. 103-109.
5. Li H.B., Han G.M., Ma H.A., Tozzick P. A new method for coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies // Comput. Methods Appl. Mech. & Eng. 1986. Vol. 54. P. 161-185.
6. Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution methods // Int. J. Numer. Methods Eng. 1977. Vol. 11(2). P. 355-375.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.93

УДК 537.212:621.31.027

В.А.Пучка

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КРАЙОВОЇ ОСОБЛИВОСТІ РОЗІМКНУТОЇ ПОВЕРХНІ НА РОЗВ'ЯЗОК ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

Задача електростатики в $\mathbb{R}^3$ для кусково-однорідного діелектричного середовища зводиться [6] до знаходження розв'язку інтегрального рівняння /1/

$$\int_S \Phi(x, y) \psi(y) dS(y) = f(x), \quad x \in S, \quad /1/$$

де S - поверхня електроду, на якій заданий потенціал поля $f(x)$, $\psi(y)$ - шукана густина розподілу зарядів на S ; $\Phi(x, y) = 1/|x-y|$ - потенціал поля точкового заряду.

© Пучка В.А., 1993

У праці [8] показана еквівалентність /1/ відповідній крайовій задачі у випадку однозв'язної гладкої відкритої поверхні S з гладкою граничною кривою, що не перетинає саме себе. Крім цього, у агаданій праці отримана поведінка $\varphi(x)$ при підході до краю S .

Наша мета — чисельне дослідження ефективності врахування поведінки $\varphi(x)$ при знаходженні значень електростатичного поля методом граничних елементів [2, 7].

Припустимо, що існує розвиття конфігурації S на криволінійні чотирикутні граничні елементи S^q таке, що $S = \cup S^q$, $S^i \cap S^j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тоді ІР можна звести до вигляду

$$\sum_q \int_{S^q} \Phi(x, y) \varphi(y) dS(y) = \sum_q T^q(x) = f(x). \quad /2/$$

Виконаємо перетворення $T^q(x)$ для апроксимації шуканої функції. Для цього здійснимо відображення S^q на $\square = [-1, 1] \times [-1, 1]$ згідно з

$$\xi_i^q = \sum_k N_k(\eta_1, \eta_2) x_{ik}^q, \quad i = 1, 2, 3, \quad /3/$$

де функції $N_k(\eta_1, \eta_2)$ вибирають залежно від порядку і типу апроксимації [4]; $(x_{ik}^q, x_{2k}^q, x_{3k}^q)$ координати точки x_k на q -му елементі. Якоб'ян такого перетворення має вигляд

$$J^q(\eta_1, \eta_2) = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)^{1/2}, \quad /4/$$

$$\text{де } d_1 = \frac{\partial(\xi_2, \xi_3)}{\partial(\eta_1, \eta_2)}, \quad d_2 = \frac{\partial(\xi_3, \xi_1)}{\partial(\eta_1, \eta_2)}, \quad d_3 = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\eta_1, \eta_2)}.$$

Позначимо через S^* об'єднання тих елементів квадратування конфігурації, які виходять або на вільний край поверхні S , або на лінію зламу. Для зображення невідомої густини розподілу зарядів виконуємо кусково-поліноміальну апроксимацію її на $\square$:

$$\varphi(\eta_1, \eta_2) = \sum_k N_k(\eta_1, \eta_2) a_k^q, \quad /5/$$

де a_k^q — невідомі значення φ у вузлах q -го елемента;

$$\tilde{N}_k(\eta_1, \eta_2) = \begin{cases} N_k(\eta_1, \eta_2) & , \text{ якщо } S^q \notin S^*, \\ N_k(\eta_1, \eta_2) / \omega(\eta_1, \eta_2) & , \text{ якщо } S^q \in S^*, \end{cases} \quad /6/$$

$\omega(\eta_1, \eta_2)$ — функція, що модулює сингулярний характер розподілу густини зарядів при наближенні до краю поверхні:

$$\omega(\eta_1, \eta_2) = (1 - \eta_1)^{1/4} (1 + \eta_1)^{1/4} (1 - \eta_2)^{1/4} (1 + \eta_2)^{1/4}, \quad /7/$$

де γ_i - порядок особливості. Якщо особливість на i -й стороні елемента відсутня, то $\gamma_i = 0$. У решті випадків, включаючи також вільний край, порядок особливості обчислюємо як [1]

$$\gamma_i = (\Pi - \omega_i) / (2\Pi - \omega_i),$$

де ω_i - двогранний кут, що отримується при переході з i -ї сторони елемента на сусідній елемент іншого фрагмента.

Кількість вузлів при відображенні граничного елемента та кількість невідомих при апроксимації густини φ можуть не збігатися. Надалі вважатимемо, що вони збігаються, а це відповідає так званому ізопараметричному випадку.

Враховуючи виконані перетворення [3]-[5], можна записати

$$T^q(x) = \sum_k a_k F_k^q(x), \quad /8/$$

$$\text{де } F_k^q(x) = \int_{\Omega} \tilde{N}_k(\eta_1, \eta_2) \Phi(x, \xi^q(\eta_1, \eta_2)) J^q(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2.$$

Підставляємо [8] у [2], припускаючи неперервність функції φ , та здійснюючи глобальну перенумерацію всіх вузлів, отримуємо

$$\sum_{i=1}^n a_i F_i(x) = f(x), \quad i = x(q, k), \quad /9/$$

де $x(q, k)$ - таблична функція, що зв'язує локальний номер k на q -му елементі з глобальним вузлом i . Подібний процес складання рівнянь збігається з добре відомою процедурою ансамблювання в методі скінченних елементів [4].

Обираючи вузли граничних елементів x_j за точки колокації, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Fa = f, \quad /10/$$

де елементи матриці і вектора правої частини визначаються як

$$F_{ij} = F_i(x_j), \quad f_j = f(x_j), \quad j = x(q, k).$$

Побудована система рівнянь має повністю заповнену матрицю, визначення елементів якої вимагає обчислення інтегралів

$$W = \int_{\Omega} \tilde{N}_k(\eta_1, \eta_2) \Phi(x_j, \xi^q(\eta_1, \eta_2)) J^q(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2. \quad /11/$$

Виникає при цьому складність - наявність особливостей на краях і типу $1/R$ у підінтегральній функції при збігу аргументів. Перша особливість ігнорується шляхом вибору кубатурної формули Гаусса, точки інтегрування якої не потрапляють на край. Особливість типу $1/R$ виникає у випадку, коли точка x_j розміщена на еле-

менті q . Відомо [3], що такого типу особливості є слабкими, тобто інтегровними. В основі методики їх виділення лежить перехід до локальної полярної системи координат [5].

Таким чином, розв'язуючи систему рівнянь /10/, добру зумовленість матриці якої забезпечує властивість ядра інтегрального оператора /1/, отримуємо a_i - значення φ у вузлах елементів. Використовуючи зображення /5/, розв'язок задачі електростатики та його похідні до порядку α для $\forall x \in R^3 \setminus S$ обчислюємо за формулою

$$\frac{\partial^\alpha U(x)}{\partial x_i^\alpha} = \int_S \varphi(y) \frac{\partial^\alpha \Phi(x,y)}{\partial x_i^\alpha} dS(y), \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad /12/$$

Зауважимо, що знаходження теоретичних оцінок збіжності та похибки використаного тут методу колокації в R^3 є на даний час відкритою проблемою [9].

Запропонований алгоритм розрахунку електростатичних полів реалізований для IBM PC/AT у середовищі *Turbo Pascal*. Роботу програми можна розбити на чотири етапи: побудова сітки граничних елементів $\{S^q\}$, обчислення елементів матриці $\{F_{ij}\}$ системи лінійних рівнянь /10/, розв'язування системи рівнянь та розрахунок необхідних характеристик поля /потенціалу, вектора напружень, ліній одного рівня тощо/.

Характерною особливістю даної реалізації є діалоговий опис геометричних об'єктів з наступною візуалізацією сітки граничних елементів. У програмі за основу взяті квадратичні базисні функції сім'ї середипових елементів [4].

Для аналізу ефекту врахування крайової особливості розраховане поле зарядженого диску, що має аналітичний розв'язок, у двох випадках: з врахуванням особливості /ВО/ при $\omega(\eta_1, \eta_2) \neq 1$ та без врахування /БВ/ при $\omega(\eta_1, \eta_2) = 1$. Диск радіусом $Z = 1$ лежить у площині $Z = 0$ з центром у початку координат. Враховуючи це, розбиття побудоване лише для 1/4 диску.

На рис. 1 подана залежність відносної похибки ($E_{zz}, \%$) при розрахунку поля вздовж лінії, що з'єднує точки $/0, 0, h / i / R, 0, h /$ при $h = 0, 1$. Криві 1, 2 отримані за методикою БВ при $N = 49$ та $N = 169$ відповідно. Методиці ВО відповідають криві 3, 4 при аналогічній кількості точок колокації. Отримані результати збігаються з очікуваними. Тобто, порівнюючи криві 2 і 3, можна стверджувати, що необхідно значно збільшувати N у методиці БВ для отримання результатів, що порівнюватимуться з результатами

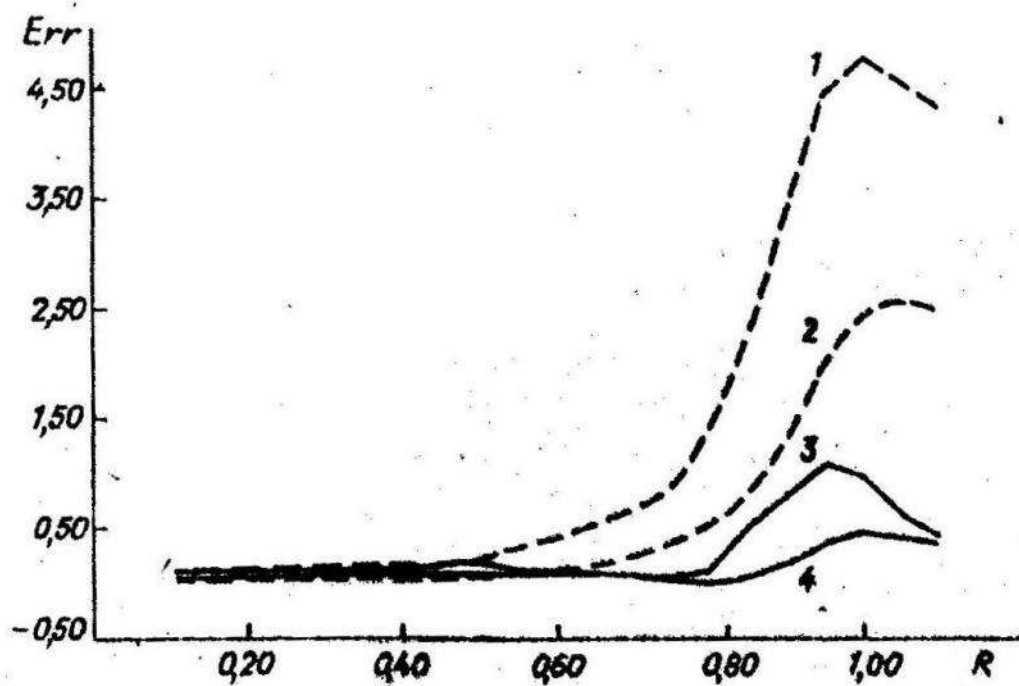


Рис. 1.

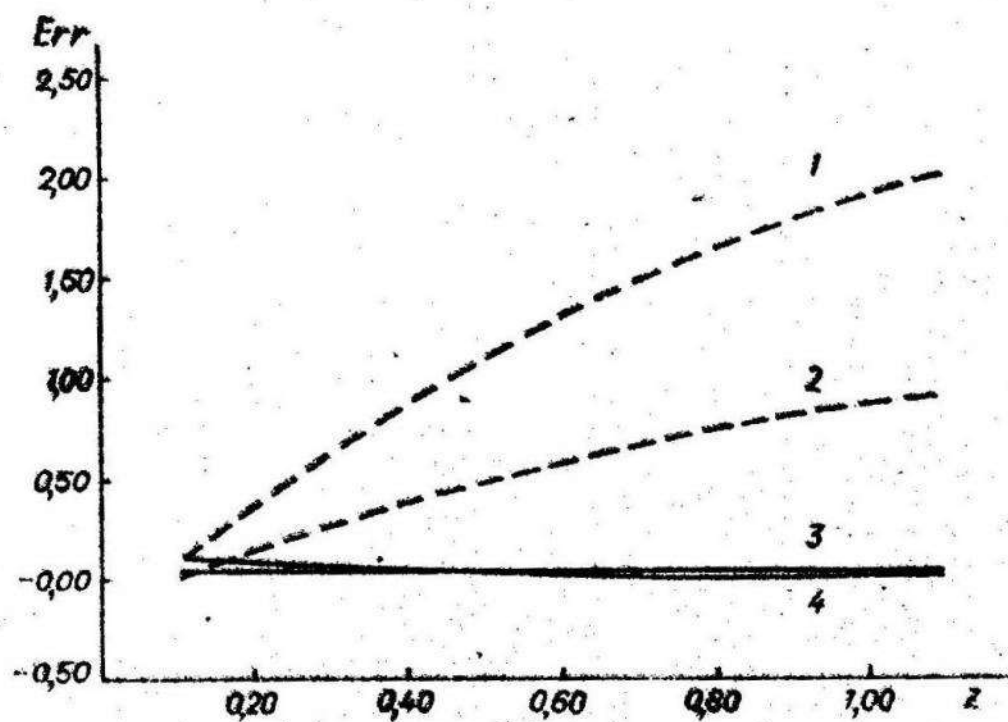


Рис. 2.

за методикою ВО при невеликих N . Крім цього, за рахунок зменшення h визначена межа застосовності [12] при обчисленні поля поблизу електрода без виділення особливостей, у ядрі інтегрального оператора. При $h \leq z/100$ розв'язок задачі був несталим.

Несподівані результати отримані під час розрахунку поля по осі Z . На рис. 2, як і в попередньому випадку, криві 1, 2 відповідають методиці БВ, криві 3, 4 – методиці ВО. При розрахунках поля вздовж осі при збільшенні Z очевидним є зростання точності. На жаль, методика БВ навіть при $N = 169$ /крива 2/ не дає таких результатів. Таким чином, ефективність методики ВО безсумнівна.

І. А н т о н е н к о О.Ф. Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения // Вычисл. системы. 1964. Вып. 12. С. 79-97. 2. Б р е б б и я К., Т е л л е с Ж., В р о у - б е л Л. Методы граничных элементов. М., 1987. 3. В а с и - л ь е в Е.Н. Алгоритмизация задач дифракции на основе интегральных уравнений // Прикл. электродинамика. М., 1977. Вып. 1. С. 65-98. 4. З е н к е в и ч О., М о р г а н К. Конечные элементы и аппроксимации. М., 1986. 5. И в а н о в В.Я. Методы автоматизированного проектирования приборов электродинамики: В 2 ч. Новосибирск, 1986. Ч. 1. 6. Л ь в о в А.В., Г о р д и й - ч у к В.Н., Б а к а л е ц В.А., М а р и н о в Л.О. Численное решение пространственных задач теории потенциала. Львов, 1979. 7. Ч у х л о в А.Н., П у ч к о В.А. Моделирование электростатических полей в пакете программ решения граничных задач теории потенциала // Лучевая технология электрон. техники: теория и эксперимент. М., 1988. С. 15-22. 8. S t e p h a n E.P. Boundary integral equations for screen problems in R^3 // Integral Equations and Operator Theory. 1987. Vol. 10. P. 236-257. 9. W e n d l a n d W.L. On the numerical analysis of boundary element methods // Boundary Element Techniques in Computer Aided Eng., Martinus Nijhoff Publ. Dordrecht. 1989. Vol. 1. P. 417-436.

Стаття надійшла до редколегії 11.01.93

МЕТОД КВАДРАТУР ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ
З ЛОГАРИСМІЧНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ В ЯДРАХ

Нехай на площині R^2 задана замкнена крива L , яка має параметричне зображення

$$x = (x_1(t), x_2(t)), \quad \text{де } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad [x_1']^2 + [x_2']^2 > 0.$$

Розглянемо систему ІР Фредгольма першого роду

$$\int_L \mu_n(P) \psi_0(P, M) dL(P) = f_n(M) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_L \mu_m(P) \psi_{n-m}(P, M) dL(P), \quad /1/$$

де $\psi_n(R) = K_0(\gamma R) \sum_{i=0}^{n_1} R^{2i} D_{2i}^{(n)} + K_1(\gamma R) \sum_{i=0}^{n_2} R^{2i+1} D_{2i+1}^{(n)}$,
 $D_i^{(n)}$ - постійні, що визначаються за відомими рекурентними формулами [2]; $K_i(z)$ - функція Макдональда i -го порядку; $n_1 = \left[\frac{n}{2} \right]$; $n_2 = \left[\frac{n-1}{2} \right]$; $R = |MP|$ - відстань; $\mu_n(P)$ - невідомі функції густини; $\gamma > 0$ - постійна.

Систему /1/ одержуємо внаслідок застосування до першої крайової задачі для телеграфного рівняння на площині інтегрального перетворення Чебишова-Лагерра по часу та методу ІР у просторі зображень [2, 3]. У даній праці метод квадратур, розроблений для ІР першого роду [4], поширюється на випадок системи ІР.

І. Параметризація системи ІР. З урахуванням параметричного зображення кривої L перетворимо систему /1/ до вигляду

$$\int_0^{2\pi} \mu_n(\tau) \psi_0(t, \tau) d\tau = f_n(t) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \mu_m(\tau) \psi_{n-m}(t, \tau) d\tau, \quad /2/$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

де $\mu_n(t) = \mu_n(x(t))$; $f_n(t) = f_n(x(t))$,

та ядра, задані формулою

$$\psi_n(t, \tau) = K_0(\gamma z(t, \tau)) \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m}^{(n)} z^{2m}(t, \tau) + K_1(\gamma z(t, \tau)) \sum_{m=0}^{n_2} D_{2m+1}^{(n)} z^{2m+1}(t, \tau).$$

Тут відстань $z(t, \tau)$ обчислюємо за формулою

$$z(t, \tau) = \left\{ (x_1(t) - x_1(\tau))^2 + (x_2(t) - x_2(\tau))^2 \right\}^{1/2}.$$

Відомо [1], що функції Макдональда $K_0(z)$ і $K_1(z)$ мають такі розклади в ряди:

$$K_0(z) = -\ln z/2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k},$$

$$K_1(z) = 1/z + \ln z/2 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k z^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k z^{2k+1},$$

де $a_k, b_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ - відомі коефіцієнти.

З урахуванням цього, бачимо, що ядра в /2/ мають логарифмічні особливості і можуть бути записані у вигляді

$$\varphi_n(\gamma z(t, \tau)) = \tilde{F}_1^{(n)}(\gamma z(t, \tau)) \ln \frac{\gamma z(t, \tau)}{2} + \tilde{F}_2^{(n)}(\gamma z(t, \tau)),$$

де

$$\tilde{F}_1^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k z^{2k+1} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m+1}^{(n)} z^{2m+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m}^{(n)} z^{2m},$$

$$\tilde{F}_2^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m}^{(n)} z^{2m} + \sum_{m=0}^{n_2} D_{2m+1}^{(n)} z^{2m} - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k z^{2k+1} \sum_{m=0}^{n_2} D_{2m+1}^{(n)} z^{2m+1}.$$

Після нескладних перетворень остаточно маємо

$$\varphi_n(t, \tau) = \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} F_1^{(n)}(t, \tau) + F_2^{(n)}(t, \tau),$$

де функції

$$F_1^{(n)}(t, \tau) = \sin^{-2} \frac{t-\tau}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\gamma z(t, \tau))^{2k+1} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m+1}^{(n)} (\gamma z(t, \tau))^{2m+1} - \right. \\ \left. - a_0 \sum_{m=1}^{n_1} D_{2m}^{(n)} (\gamma z(t, \tau))^{2m} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\gamma z(t, \tau))^{2k} \sum_{m=0}^{n_1} D_{2m}^{(n)} (\gamma z(t, \tau))^{2m} \right),$$

$$F_2^{(n)}(t, \tau) = \ln \frac{16 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 z^2(t, \tau)} \tilde{F}_1^{(n)}(\gamma z(t, \tau)) + 2 \tilde{F}_2^{(n)}(\gamma z(t, \tau))$$

є аналітичними за обома аргументами.

Таким чином, система /2/ зведена до вигляду

$$\int_0^{2\pi} \mu_n(\tau) \left[\ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} F_1^{(0)}(t, \tau) + F_2^{(0)}(t, \tau) \right] d\tau = \\ = f_n(t) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \mu_m(\tau) \left[\ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} + \right. \\ \left. + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} F_1^{(n-m)}(t, \tau) + F_2^{(n-m)}(t, \tau) \right] d\tau, \quad /3/$$

або в операторній формі

$$(S + A^{(0)} + B^{(0)}) \mu_n = f_n - \sum_{m=0}^{n-1} (S + A^{(n-m)} + B^{(n-m)}) \mu_m, \quad /4/$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad (S\mu)(t) &= \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} d\tau; \\ (A^{(k)}\mu)(t) &= \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} F_1^{(k)}(t, \tau) d\tau \\ (B^{(k)}\mu)(t) &= \int_0^{2\pi} \mu(\tau) F_2^{(k)}(t, \tau) d\tau - \end{aligned}$$

оператори, що діють із $C^{0,\alpha}[0; 2\pi] \rightarrow C^{1,\alpha}[0; 2\pi]$, $0 < \alpha \leq 1$.

2. Метод квадратур. Розбиваємо відрізок $[0; 2\pi]$ на $2N$ -частин точками $t_k^{(N)} = \frac{\pi k}{N}$ і розглядаємо три інтерполяційні квадратурні формули:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \approx \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k^{(N)}), \quad /5/$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} d\tau \approx \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k^{(N)}) R_k^{(N)}(t),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} d\tau \approx \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k^{(N)}) P_k^{(N)}(t), \quad /6/$$

$$\text{де} \quad P_k^{(N)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} L_k^{(N)}(\tau) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} d\tau, \quad /7/$$

$$P_k^{(N)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} L_k^{(N)}(t) \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} d\tau,$$

$$L_k^{(N)}(t) = \frac{1}{2N} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \cos i(t-t_k) + \cos N(t-t_k) \right\}.$$

Застосовуємо формули /5/-/7/ до системи ІР /4/, внаслідок чого отримуємо систему апроксимаційних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2N-1} \mu_k(t_k^{(N)}) \{ R_k^{(N)}(t) + P_k^{(N)}(t) F_1^{(0)}(t, t_k^{(N)}) + F_2^{(0)}(t, t_k^{(N)}) \} &= f_n(t) - /8/ \\ - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \mu_k(t_k^{(N)}) \{ R_k^{(N)}(t) + P_k^{(N)}(t) F_1^{(n-m)}(t, t_k^{(N)}) + F_2^{(n-m)}(t, t_k^{(N)}) \}, \end{aligned}$$

або в операторній формі

$$(S + A_n^{(0)} + B_n^{(0)}) \mu_n = f_n - \sum_{m=0}^{n-1} (S + A_n^{(n-m)} + B_n^{(n-m)}) \mu_m, \quad /9/$$

$$\text{де} \quad (A_n^{(k)} \mu_i)(t) = \sum_{j=0}^{2N-1} \mu_j(t_j^{(N)}) P_j^{(N)}(t) F_1^{(k)}(t, t_j^{(N)}),$$

$$(B_n^{(k)} \mu_i)(t) = \sum_{j=0}^{2N-1} \mu_j(t_j^{(N)}) F_2^{(k)}(t, t_j^{(N)}) -$$

оператори із $C^{0,\alpha}[0; 2\pi] \rightarrow C^{1,\alpha}[0; 2\pi]$, $0 < \alpha \leq 1$.

Розглядаючи співвідношення /8/ в $2N$ точках колокації, одержуємо послідовність систем лінійних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \mu_n(t_k^{(N)}) \{ R_{1k-1}^{(N)} + P_{1k-1}^{(N)} F_1^{(0)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)}) + F_2^{(0)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)}) \} = f_n(t_i^{(N)}) -$$

$$- \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \mu_m(t_k^{(N)}) \{ R_{1k-1}^{(N)} + P_{1k-1}^{(N)} F_1^{(n-m)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)}) + F_2^{(n-m)}(t_i^{(N)}, t_k^{(N)}) \},$$

яка, зрозуміло, еквівалентна системі

$$(P_N S + P_N A_N^{(0)} + P_N B_N^{(0)}) \mu_n = P_N f_n - \sum_{m=0}^{n-1} (P_N S + P_N A_N^{(n-m)} + P_N B_N^{(n-m)}) \mu_m,$$

де $P_N f = \sum_{i=0}^{2N-1} f(t_i^{(N)}) L_i^{(N)}(t)$ — оператор тригонометричного

інтерполювання;

$$P_j^{(N)} = R^{(N)}(t_j) = -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} \cos \frac{mj\pi}{N} - \frac{(-1)^j}{2N} \right\};$$

$$P_j^{(N)} = P^{(N)}(t_j) = \frac{1}{2N} \left\{ \sum_{m=2}^{N-1} \frac{1}{m(m^2-1)} \cos \frac{mj\pi}{N} + 0,5 - 0,75 \cos \frac{j\pi}{N} + \frac{(-1)^j}{2N(N^2-1)} \right\}.$$

3. Аналіз похібки виконаний на базі теорії компактно-компактних операторів /5/.

Теорема 1. а/ Послідовності операторів $(A_N^{(i)})$ і $(B_N^{(i)}) : C^{2,\alpha}[0; 2\pi] \rightarrow C^{1,\alpha}[0; 2\pi]$, $0 < \alpha < 0,5$ є компактно-компактними і поточково збігаються до операторів $A^{(i)}$ і $B^{(i)}$ відповідно для $i = 0, 1, \dots$ при $N \rightarrow \infty$. б/ Послідовності операторів $(P_N A_N^{(i)})$ і $(P_N B_N^{(i)}) : C^{2,\alpha}[0; 2\pi] \rightarrow C^{1,\alpha}[0; 2\pi]$, $0 < \alpha < 0,5$ є компактно-компактними і поточно збігаються до операторів $A^{(i)}$ і $B^{(i)}$ відповідно для $i = 0, 1, \dots$ при $N \rightarrow \infty$.

Доведення теореми аналогічне доведенням у праці /1/.

Теорема 2. При достатньо великих N для наближених розв'язків $\mu_n^{(N)}(t)$ і точних $\mu_n(t)$ виконується оцінка похібки

$$\| \mu_n^{(N)} - \mu_n \|_{0,\alpha} \leq C_n (\| P_N f_n - f_n \|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^n \| (P_N A_N^{(m)} +$$

$$+ P_N B_N^{(m)} - A^{(m)} - B^{(m)}) \mu_{n-m} \|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n-1} \| \mu_m^{(N)} - \mu_m \|_{0,\alpha}), \quad /11/$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Доведення. При $n = 0$ із [I] маємо

$$\|\mu_0^{(N)} - \mu_0\|_{0,\alpha} \leq C_0 \left(\|P_N f_0 - f_0\|_{1,\alpha} + \|(P_N A_N^{(0)} + P_N B_N^{(0)} - A^{(0)} - B^{(0)})\mu_0\|_{1,\alpha} \right).$$

Нехай нерівність /II/ виконується. Покажемо, що з цього випливає справедливості її також для $n+1$. Справді

$$\begin{aligned} \|\mu_{n+1}^{(N)} - \mu_{n+1}\|_{0,\alpha} &\leq C_0 \left(\|P_N f_{n+1} - \sum_{m=0}^n (P_N S + P_N A^{(n-m+1)} + P_N B^{(n-m+1)})\mu_m^{(N)} - \right. \\ &\quad \left. - f_{n+1} + \sum_{m=0}^n (S + A^{(n-m+1)} + B^{(n-m+1)})\mu_m\|_{1,\alpha} + \|(P_N A_N^{(0)} + P_N B_N^{(0)} - A^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. - B^{(0)})\mu_{n+1}\|_{1,\alpha} \right) \leq C \left(\|P_N f_{n+1} - f_{n+1}\|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n+1} \|(P_N A_N^{(m)} + P_N B_N^{(m)} - A^{(m)} - \right. \\ &\quad \left. - B^{(m)})\mu_{n-m}\|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^n \|(P_N A_N^{(n-m+1)} + P_N B_N^{(n-m+1)})\mu_m^{(N)} - \mu_m\|_{1,\alpha} \right) \leq \\ &\leq C_{n+1} \left(\|P_N f_{n+1} - f_{n+1}\|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^{n+1} \|(P_N A_N^{(m)} + P_N B_N^{(m)} - A^{(m)} - \right. \\ &\quad \left. - B^{(m)})\mu_{n-m}\|_{1,\alpha} + \sum_{m=0}^n \|\mu_m^{(N)} - \mu_m\|_{0,\alpha} \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що оцінку /II/ можна записати також у вигляді

$$\|\mu_n^{(N)} - \mu_n\|_{0,\alpha} \leq \tilde{C}_n \left(\sum_{i=0}^n \|P_N f_i - f_i\|_{1,\alpha} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \|P_N A_N^{(j)} + P_N B_N^{(j)} - A^{(j)} - B^{(j)})\mu_{n-i}\|_{1,\alpha} \right).$$

Викладений метод без принципових змін переноситься й на випадок системи IP на розімкненій кривій [I].

І. С п р я в о ч н и к по специальным функциям /Под ред. Абрамовица Н.А., Стиган Н. М., 1979. 2. Х а п к о Р.С. Про інтегральне представлення та фундаментальні розв'язки деяких систем еліптичних рівнянь // Доп. АН УРСР. 1991. № 5. С.35-37. 3. Х а п к о Р.С. Численное решение первой краевой задачи для телеграфного уравнения на незамкнутых контурах // Вычисл. и прикл. математика. Вып. 72. 1990. С.57-62. 4. Kzess R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind // World Scientific Series in Applicable Analysis. 1993. P.32-46. 5. Kzess R. Linear Integral Equations. Springer-Verlag. Berlin; Heidelberg; New-York, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.93

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ
ГІДРОДИНАМІКИ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ
МЕТОДОМ ε -АПРОКСИМАЦІЇ^{*}

У чисельному моделюванні течій в'язкої нестисливої рідини виникає проблема задоволення умови соленоїдальності вектором швидкості потоку u :

$$\operatorname{div} u = 0. \quad /1/$$

Один із відомих підходів до вирішення цієї проблеми полягає у застосуванні ε -апроксимації умови /1/:

$$\varepsilon p^\varepsilon + \operatorname{div} u^\varepsilon = 0, \quad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, що дає змогу будувати схеми почергового знаходження апроксимацій вектора швидкості u^ε і тиску p^ε рідини. Стосовно широкого спектра стаціонарних задач гідродинаміки в'язкої нестисливої рідини цей підхід розвинутий у працях [1–4, 6, 7]. У пропонуваному дослідженні зроблена спроба узагальнити цей підхід на випадок нестаціонарної лінеаризованої системи рівнянь Нав'є-Стокса з граничними умовами типу "прилипання". Зокрема, з використанням варіаційного підходу досліджене питання коректності ε -задачі, що відповідає рівнянню /2/, а також збіжності розв'язків ε -задачі при $\varepsilon \rightarrow 0$.

І. Постановка початково-крайової задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2$ або 3) – обмежена ліпшицева область із межею Γ . Для заданих вектор-функцій $f: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($T > 0$) та $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ розглянемо задачу знаходження вектора швидкості $u: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ і тиску $p: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ рідини:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \operatorname{grad} p = f & \text{в } \Omega \times [0, T], \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{в } \Omega \times [0, T], \\ u = 0 & \text{на } \Gamma \times [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad /3/$$

де $\nu > 0$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини.

© Зубов В.М., Шинкаренко Г.А., 1993

^{*} Робота виконана в межах Програми № 8 Міністерства освіти України "Математичні методи дослідження детермінованих та стохастичних еволюційних систем".

Одна з можливих узагальнених постановок задачі /1/ має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } f \in L^2(0, T; V'), u_0 \in V; \\ \text{знайти пару } (u, p) \in L^2(0, T; V \times Q_0) \text{ таку, що} \\ \frac{d}{dt} (u(t), v) + a(u(t), v) - (p(t), \operatorname{div} v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in V, \\ (q, \operatorname{div}(t)) = 0 \quad \forall q \in Q, \\ (u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad /4/$$

де $V = H_0^1(\Omega)^n$, $Q_0 = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : (1, q) = 0\}$,
 $a(u, v) = \nu \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$, $\langle f, v \rangle = (f, v)$.

Тут і далі використовуємо позначення, запозичені в працях [5, 7]:
 $(\cdot, \cdot)$ - скалярний добуток простору $Q = L^2(\Omega)$; $\|\cdot\|_0$ - його норма;
 $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_{1/2}$ - відповідно норма та напівнорма простору Собо-
 лєва $H^1(\Omega)$.

Відомо [5], що існує один і тільки один розв'язок задачі /4/.

2. Постановка регуляризованої задачі. Існування та єдиність розв'язку. Застосовуючи ε -апроксимацію /2/, наближуємо задачу /4/ ε -задачею

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } \varepsilon > 0; \text{ знайти пару } (u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in L^2(0, T; V \times Q) \text{ таку, що} \\ \frac{d}{dt} (u^\varepsilon(t), v) + a(u^\varepsilon(t), v) - (p^\varepsilon(t), \operatorname{div} v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in V, \\ \varepsilon \cdot (q, p^\varepsilon(t)) + (q, \operatorname{div} u^\varepsilon(t)) = 0 \quad \forall q \in Q, \\ (u^\varepsilon(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad /5/$$

Теорема /про коректність регуляризованої задачі/. Існує один і тільки один розв'язок задачі /5/.

Доведення. Нехай $\{V_h\}$ та $\{Q_h\}$ - послідовності скінченно-вимірних підпросторів V і Q , що мають властивість

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{h>0} V_h \text{ щільно вкладене у } V, \dim V_h = N(h) = N_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \infty, \\ \bigcup_{h>0} Q_h \text{ щільно вкладене у } Q, \dim Q_h = M(h) = M_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \infty. \end{array} \right. \quad /6/$$

Використовуючи метод Гальоркіне, апроксимуємо задачу /5/ задачею

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } h > 0; \text{ знайти пару } (u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon) \in L^2(0, T; V \times Q) \text{ таку, що} \\ \frac{d}{dt} (u_h^\varepsilon(t), v_h) + a(u_h^\varepsilon(t), v_h) - (p_h^\varepsilon(t), \operatorname{div} v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon \cdot (q_h, p_h^\varepsilon(t)) + (q_h, \operatorname{div} u_h^\varepsilon(t)) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, /7/ \\ (u_h^\varepsilon(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \end{array} \right.$$

У просторах V_h та Q_h вводимо бази $\{v_i\}_{i=1}^N$ та $\{q_i\}_{i=1}^M$.
Тоді задача /7/ еквівалентна відшукуванню коефіцієнтів лінійних комбінацій

$$u_h^\varepsilon = \sum_{i=1}^N U_i(t) v_i(x), \quad p_h^\varepsilon = \sum_{i=1}^M P_i(t) q_i(x),$$

що задовольняють задачу Коші:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N \{m_{ij} U_j'(t) + a_{ij} U_j(t)\} - \sum_{k=1}^M \delta_{ki} P_k(t) = F_i(t), \\ \sum_{k=1}^M \varepsilon z_{nk} P_k(t) + \sum_{j=1}^N \delta_{nj} U_j(t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ U_i(0) = u_{ho}^i, \quad i, l = 1, \dots, N; \quad n = 1, \dots, M, \end{array} \right. \quad /8/$$

де $m_{ij} = (v_i, v_j)$, $a_{ij} = a(v_i, v_j)$, $\delta_{ki} = (q_k, \operatorname{div} v_i)$, $z_{nk} = (q_n, q_k)$,
 $i, j = 1, \dots, N$, $n, k = 1, \dots, M$, а $u_{ho}^1, \dots, u_{ho}^N$ визначаються
в умов

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} u_{ho}^j = (u_0, v_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Оскільки матриці $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $R = \{z_{ij}\}_{i,j=1}^M$ симетричні та додатно визначені, задача Коші /8/ має єдиний розв'язок. Отже, існує єдина пара $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)$, що задовольняє задачу /7/. З огляду на рівняння задачі /7/ маємо

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h^\varepsilon(t)\|_0^2 + \nu \|u_h^\varepsilon(t)\|_0^2 + \varepsilon \|p_h^\varepsilon(t)\|_0^2 \leq \|f(t)\|_* \|u_h^\varepsilon(t)\|_1.$$

Інтегруючи від 0 до t та застосовуючи нерівності

$$\|u_{oh}\|_0 \leq \|u_0\|_0, \quad ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2 \quad \forall a, b, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,$$

знаходимо

$$\frac{1}{2} \|u_h^\varepsilon(t)\|_0^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u_h^\varepsilon(\tau)\|_0^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|p_h^\varepsilon(\tau)\|_0^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_0^2 + \frac{1}{2\nu} \int_0^t \|f(\tau)\|_*^2 d\tau.$$

З останньої оцінки випливає, що послідовності $\{u_h^\varepsilon\}$, $\{p_h^\varepsilon\}$ при $h \rightarrow 0$ обмежені відповідно в $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; Q)$ та в $L^2(0, T; Q)$.

Отже, з послідовності $\{(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)\}$ (ε фіксоване!) можна вибрати підпослідовність $\{(u_\Delta^\varepsilon, p_\Delta^\varepsilon)\}$ таку, що $u_\Delta^\varepsilon \rightharpoonup u_*$ слабо в $L^2(0, T; V)$, $p_\Delta^\varepsilon \rightharpoonup p_*$ слабо в $L^2(0, T; Q)$, $\Delta \rightarrow 0$, з $u_* \in L^2(0, T; V)$, $p_* \in L^2(0, T; Q)$.

Покажемо, що пара (u_*, p_*) є розв'язком задачі /5/. З цієї мети домножимо перше рівняння задачі /7/ на довільну функцію $\varphi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi(T) = 0$ та інтегруємо частинами:

$$-\int_0^T (u_\Delta^\varepsilon(t), v_h) \varphi'(t) dt + \int_0^T a(u_\Delta^\varepsilon(t), v_h) \varphi(t) dt - \int_0^T (p_\Delta^\varepsilon(t), \operatorname{div} v_h) \varphi(t) dt = \\ = (u_{0h}, v_h) \varphi(0) + \int_0^T \langle f(t), v_h \rangle \varphi(t) dt \quad \forall v_h \in V_h.$$

Звідси, переходячи до межі при $\Delta \rightarrow 0$, а також користуючись властивістю /6/, знаходимо

$$\frac{d}{dt} (u_*, v) + a(u_*, v) - (p_*, \operatorname{div} v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

З огляду на /6/ граничним переходом при $\Delta \rightarrow 0$ з рівності

$$\varepsilon \cdot (q_h, p_\Delta^\varepsilon) + (q_h, \operatorname{div} u_\Delta^\varepsilon) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

одержуємо, що

$$\varepsilon \cdot (q, p_*) + (q, \operatorname{div} u_*) = 0 \quad \forall q \in Q.$$

Початкова умова $u_*(0) = u_0$ є наслідком того, що $u_{0\Delta} \rightarrow u_0$, $\Delta \rightarrow 0$. Отже, (u_*, p_*) є розв'язком задачі /7/. Єдиність цього розв'язку легко доводиться від супротивного.

3. Збіжність розв'язків регуляризованої задачі. Розв'язок $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ задачі /5/ при будь-якому $\varepsilon > 0$ задовольняє рівність

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon(t)\|_0^2 + \nu \|u^\varepsilon(t)\|_1^2 + \varepsilon \|p^\varepsilon(t)\|_0^2 = \langle f(t), u^\varepsilon \rangle.$$

Звідси за аналогією з попереднім пунктом знаходимо

$$\frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_0^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u^\varepsilon(\tau)\|_1^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|p^\varepsilon(\tau)\|_0^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_0^2 + \frac{1}{2\nu} \int_0^t \|f(\tau)\|_*^2 d\tau.$$

З отриманої оцінки випливає існування такої підпослідовності

$\{(u^\xi, p^\xi)\}$, що $u^\xi \rightharpoonup u$ слабо в $L^2(0, T; V)$, $\sqrt{\xi} p^\xi \rightharpoonup \pi$ слабо в $L^2(0, T; Q)$ з $u \in L^2(0, T; V)$, $\pi \in L^2(0, T; Q)$. Граничним переходом при $\xi \rightarrow 0$ встановлюється тотожність $\operatorname{div} u = 0$ у Q . Тоді, використовуючи позначення $V = \{v \in V : \operatorname{div} v = 0 \text{ в } Q\}$, запишемо

$$\frac{d}{dt} (u^\xi, v) + a(u^\xi, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad /9/$$

Домножуючи /9/ на довільну функцію $\varphi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi(T) = 0$ та інтегруючи частинами, у межі при $\xi \rightarrow 0$ одержуємо, що вектор u є розв'язком задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Знайти вектор } u \in L^2(0, T; V) \text{ такий, що} \\ \frac{d}{dt} (u(t), v) + a(u(t), v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad /10/$$

Легко бачити, що цей вектор задовольняє задачу /4/. З огляду на єдиність розв'язку задачі /10/ довільна підпослідовність послідовності $\{u^\varepsilon\}$ збігається слабо в $L^2(0, T; V)$ до u . Отже, вся послідовність також є збіжною в тому ж сенсі.

Неважко перевірити, що розв'язок u задачі /4/, а також розв'язок u^ε задачі /5/ перетворюють такі рівності у тотожності

$$\frac{d}{dt}(u^\varepsilon - u, v) + a(u^\varepsilon - u, v) - (p^\varepsilon - p, \operatorname{div} v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad /11/$$

$$\varepsilon(q, p^\varepsilon) + (q, \operatorname{div} u^\varepsilon) = 0 \quad \forall q \in Q. \quad /12/$$

Звідси знаходимо

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon - u\|_0^2 + \nu \|u^\varepsilon - u\|_1^2 + \varepsilon \|p^\varepsilon\|_0^2 = (p, \operatorname{div}(u - u^\varepsilon)).$$

Отже, $u^\varepsilon \rightarrow u$ сильно в $L^2(0, T; V)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Застосовуючи до /11/ нерівність Ладженської-Бреззі-Бабушки /7/:

$$\sup_{v \in V} \frac{(q, \operatorname{div} v)}{\|v\|_1} \geq L \|q\|_0 \quad \forall q \in Q, \quad L = \operatorname{const} > 0,$$

одержуємо $\|p^\varepsilon - p\|_0 \leq C \|u^\varepsilon - u\|_1, \quad C = \operatorname{const} > 0. \quad /13/$

Таким чином, $p^\varepsilon \rightarrow p$ сильно в $L^2(0, T; Q)$.

З метою отримання оцінок швидкості збіжності u^ε та p^ε по ε до u, p окомбінуємо /11/ і /12/ таким чином

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon - u\|_0^2 + \nu \|u^\varepsilon - u\|_1^2 = \varepsilon (p - p^\varepsilon, p^\varepsilon). \quad /14/$$

Перетворюючи праву частину /14/ до вигляду

$$-\varepsilon \|p^\varepsilon - p\|_0^2 + \varepsilon (p, p - p^\varepsilon), \text{ знаходимо}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon - u\|_0^2 + \nu \|u^\varepsilon - u\|_1^2 = \varepsilon (p, p - p^\varepsilon).$$

З останньої нерівності випливає оцінка

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(0, T; V)} \leq C_1 \varepsilon, \quad C_1 = \operatorname{const} > 0. \quad /15/$$

Об'єднуючи /13/ із /15/, остаточно записуємо

$$\|p^\varepsilon - p\|_{L^2(0, T; Q)} \leq C_2 \varepsilon, \quad C_2 = \operatorname{const} > 0. \quad /16/$$

Отже, доведена справедливість такої теореми.

Теорема /про збіжність розв'язків регуляризованої задачі/.
Послідовність $\{(u^\varepsilon, p^\varepsilon)\}$ розв'язків задачі /5/ при $\varepsilon \rightarrow 0$ збігається до розв'язку (u, p) задачі /4/ в просторі $L^2(0, T; V \times Q)$. При цьому виконуються оцінки швидкості збіжності /15/, /16/.

1. Зубов В.Н. Численное исследование течений вязкой несжимаемой жидкости методом конечных элементов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1990. 2. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М., 1982. 3. Смагулов Ш. Математические вопросы приближенных методов для уравнений Навье-Стокса: Автореф. дис. ... д-ре физ.-мат. наук. Новосибирск, 1988. 4. Соболевский П.Е., Васильев В.В. Об одной ϵ -аппроксимации уравнений Навье-Стокса // Числен. методы механики сплошной среды. 1978. Т.9. № 5. С.115-139. 5. Съяр-ле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 6. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981. 7. Girault V., Raviart P.A. Finite element approximation of the Navier-Stokes equation // Lect. Notes Math. 1979. N 749.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.93

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО ТІЛА З РІДИНОЮ.

1. ІДЕАЛЬНІ СЕРЕДОВИЩА

Розглянемо процес нестационарної акустичної взаємодії ідеального пружного тіла з нев'язкою стисливою рідиною. Терміном "ідеальне середовище" користуватимемося у зв'язку з нехтуванням втратами енергії /дисипацією/ в досліджуваних середовищах.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай пружне тіло /відповідно рідина/ займає область Ω_S /відп. Ω_F / точок $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору $\mathbb{R}^3$ з межею Γ_S /відп. Γ_F /. Контакт тіла й рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_C = \Gamma_S \cap \Gamma_F$. Позначимо через $v^S = (v_1^S, v_2^S, v_3^S)$ /відп. v^F / одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_S /відп. Γ_F /; t - час, $0 \leq t \leq T \leq +\infty$.

Рух пружного тіла описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_S u_i'' - \sigma_{ij,j}^S = f_i \quad \text{в } \Omega_S \times (0, T]; \quad /1/$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^S(u) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \\ \varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \end{cases} \quad \text{в } \Omega_S \times (0, T]. \quad /2/$$

©Горлач В.М., Шинкаренко Г.А., 1993

де ρ_s - густина; $\{a_{ijklm}\}$ - модулі пружності; $f = (f_1, f_2, f_3)$ - відома інтенсивність розподілених джерел звуку в тілі. Тут і надалі маємо на увазі підсумовування від 1 до 3 за індексами, що повторюються, а також $(\dots)' = \frac{\partial}{\partial t}(\dots)$; $(\dots)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\dots)$.

Акустичні хвилі в рідині описуються потенціалом швидкостей [1], що задовольняє хвильове рівняння:

$$\psi'' / (\rho_F c^2) - (\psi_{,i} / \rho_F)_{,i} = 0 \quad \text{в } \Omega_F \times (0, T], \quad /3/$$

де ρ_F - густина; c - швидкість звуку в рідині; потенціал ψ пов'язаний з компонентами вектора швидкостей рідини v_i та акустичним тиском p співвідношеннями:

$$\psi_{,i} / \rho_F = v_i; \quad /4/$$

$$\psi' = -p. \quad /5/$$

Позначатимемо надалі індексами U - нерухомі /жорсткі/, P - вільні /або із заданим тиском/ частини меж Γ_s та Γ_F , так що

$$\Gamma_s = \Gamma_{sU} \cup \Gamma_{sP} \cup \Gamma_c \quad \text{та} \quad \Gamma_F = \Gamma_{FU} \cup \Gamma_{FP} \cup \Gamma_c,$$

причому Γ_{sU} , Γ_{FP} та Γ_c - не порожні множини точок. Розглянемо відповідні цим поверхням граничні умови:

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_{sU} \times [0, T], \quad \sigma_{ij}^s v_j^s = \hat{\sigma}_i^s \quad \text{на } \Gamma_{sP} \times [0, T], \quad /6/$$

$$\psi_{,i} / \rho_F = \hat{v}_i \quad \text{на } \Gamma_{FU} \times [0, T], \quad \psi = 0 \quad \text{на } \Gamma_{FP} \times [0, T]; \quad /7/$$

$$u_i' = \psi_{,i} / \rho_F, \quad \sigma_{ij}^s v_j^s = \psi' v_i^s \quad \text{на } \Gamma_c \times [0, T]. \quad /8/$$

Для визначеності розв'язку задачі акустичної взаємодії задамо початкові умови

$$\psi(0) = \psi^0, \quad \psi'(0) = \psi', \quad \text{в } \Omega_F, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u' \quad \text{в } \Omega_s. \quad /9/$$

З погляду застосування проєкційно-сіткових методів [1] сформульована задача /1/-/9/ є найбільш вдалою математичною моделлю процесу акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною.

2. Варіаційна /слабка/ постановка задачі. Детальніше методика побудови таких постановок описана у праці [6].

Введемо такі простори допустимих функцій:

$$Z = \{z \in X'(\Omega_S) \mid z = 0 \text{ на } \Gamma_{SV}\}, \quad H = L^2(\Omega_S)^3;$$

$$\Phi = \{\psi \in X'(\Omega_F) \mid \psi = 0 \text{ на } \Gamma_{FP}\}, \quad G = L^2(\Omega_F),$$

де $X^k(\Omega)$ – простір Соболева функцій, інтегрованих із квадратом в області Ω разом з усіма узагальненими похідними до k -го порядку включно.

Варіаційна постановка задачі має вигляд [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } l^S \in L^2(0, T; Z'), \quad l^F \in L^2(0, T; \Phi'), \quad u^0 \in Z, \quad u' \in H, \quad \varphi^0 \in \Phi, \\ \varphi' \in G; \\ \text{знайти таку пару } (u, \varphi) \in L^2(0, T; Z \times \Phi), \text{ що} \\ m_S(u'', z) - b(z, \varphi') + a_S(u, z) = \langle l^S, z \rangle_S, \\ d_F(\varphi'', \psi) + b(u', \psi) + g_F(\varphi, \psi) = \langle l^F, \psi \rangle_F, \quad /10/ \\ a_S(u(0) - u^0, z) = 0, \quad m_S(u'(0) - u', z) = 0, \quad \forall z \in Z, \\ g_F(\varphi(0) - \varphi^0, \psi) = 0, \quad d_F(\varphi'(0) - \varphi', \psi) = 0, \quad \forall \psi \in \Phi. \end{array} \right.$$

де вжиті позначення:

$$m_S(u, z) = \int_{\Omega_S} \rho_S u_i z_i dx; \quad a_S(u, z) = \int_{\Omega_S} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(z) dx;$$

$$d_F(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_F} \varphi \psi / (\rho_F c^2) dx; \quad g_F(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_F} \varphi_{,i} \psi_{,i} / \rho_F dx;$$

$$b(z, \psi) = \int_{\Gamma_C} z_i \psi v_i^S d\gamma; \quad \langle l^S, z \rangle_S = \int_{\Omega_S} f_i z_i dx + \int_{\Gamma_{SP}} \hat{G}^S z_i d\gamma;$$

$$\langle l^F, \psi \rangle_F = \int_{\Gamma_{FP}} \hat{u}_i \psi v_i^F d\gamma.$$

У праці [3] показана можливість введення норм, квадрати яких пов'язані з білінійними формами задачі /10/ таким чином:

$$\|u\|_Z^2 = a_S(u, u), \quad \|u\|_H^2 = m_S(u, u), \quad \|u\|_S^2 = \|u\|_Z^2 + \|u'\|_H^2,$$

$$\|\varphi\|_\Phi^2 = g_F(\varphi, \varphi), \quad \|\varphi\|_G^2 = d_F(\varphi, \varphi), \quad \|\varphi\|_F^2 = \|\varphi\|_\Phi^2 + \|\varphi'\|_G^2,$$

причому $\|u\|_S^2$ і $\|\varphi\|_F^2$ дають змогу обчислювати подвоєні значення повних енергій пружного тіла та рідини відповідно.

За умови існування розв'язку з /10/ можна отримати вираз закону збереження енергії гідропружної системи.

$$\|u\|_S^2 + \|\varphi\|_F^2 = \|u'\|_H^2 + \|u^0\|_Z^2 + \|\varphi'\|_G^2 + \|\varphi^0\|_\Phi^2 + 2 \int_0^t [\langle l^S, u' \rangle_S + \langle l^F, \varphi' \rangle_F] d\tau. /11/$$

Теорема /про коректність варіаційної задачі/. Існує один і лише один розв'язок (u, φ) задачі /10/ такий, що

$$(u, \varphi) \in L^\infty(0, T; Z \times \Phi), \quad (u', \varphi') \in L^\infty(0, T; H \times G), \quad (u'', \varphi'') \in L^\infty(0, T; Z' \times \Phi').$$

причому знайдеться $c = \text{const} > 0$ така, що

$$\|u\|_S^2 + \|\varphi\|_F^2 \leq c(\|u\|_H^2 + \|u\|_Z^2 + \|\varphi\|_G^2 + \|\varphi\|_\Phi^2 + \int_0^t (\|l^S\|_Z^2 + \|l^F\|_\Phi^2) d\tau) / 12 /$$

Доведення теореми здійснено конструктивним шляхом.

3. Напівдискретизація Гальоркіна. Нехай $\{Z_h\}$ /відп. $\{\Phi_h\}$ / - послідовність скінченновимірних підпросторів із простору Z /відп. Φ /, така, що $\bigcup_{h>0} Z_h$ /відп. $\bigcup_{h>0} \Phi_h$ / щільна в Z /відп. Φ / та $\dim Z_h = N_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$, $\dim \Phi_h = M_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$. Для кожного фіксованого $h > 0$ розв'язок $(u_h, \varphi_h) \in L^2(0, T; Z_h \times \Phi_h)$ задачі /10/ при $z \in Z_h, \psi \in \Phi_h$ називаємо напівдискретною апроксимацією Гальоркіна розв'язку $(u, \varphi) \in L^2(0, T; Z \times \Phi)$. Знайдемо (u_h, φ_h) у вигляді розкладів [5]:

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) z_i, \quad \varphi_h(t) = \sum_{i=1}^M \Psi_i(t) \psi_i, \quad /13/$$

за базами $z_1, \dots, z_N$ /відп. $\psi_1, \dots, \psi_M$ / просторів Z_h /відп. Φ_h / з невідомими векторами коефіцієнтів $U(t)$ та $\Psi(t)$. Підставляючи /13/ у рівняння напівдискретизованої задачі та послідовно приймаючи $z = z_i$ ($i = 1, \dots, N$) та $\psi = \psi_i$ ($i = 1, \dots, M$), приходимо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} M_S & 0 \\ 0 & D_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}'(t) + \begin{bmatrix} 0 & -B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}(t) + \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} L_S \\ L_F \end{pmatrix}(t),$$

$\forall t \in (0, T)$ /14/

$$\begin{bmatrix} M_S & 0 \\ 0 & D_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}'(0) = \begin{pmatrix} U^0 \\ \Psi^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} U^0 \\ \Psi^0 \end{pmatrix},$$

розв'язок якої /я він існує і єдиний через додатну визначеність матриць $M_S = \{m_S(z_i, z_j)\}_{i,j=1}^N$, $D_F = \{m_F(\psi_i, \psi_j)\}_{i,j=1}^M$ як матриць Грама систем лінійно незалежних функцій/ внаслідок /13/ однозначно визначає на інтервалі $[0, T]$ напівдискретну апроксимацію (u_h, φ_h) . Рівняння балансу енергії /11/ залишається справедливим і для напівдискретизованої задачі, з чого випливає, що послідовність розв'язків (u_h, φ_h) має обмежену енергію /оцінка/12//, тому з неї можна вибрати збіжну підпослідовність, межа якої є розв'язком варіаційної задачі /10/ [3].

Таким чином, визначені існування та неперервна залежність від вихідних даних розв'язку варіаційної задачі акустичної

взаємодії пружного тіла з рідиною. За допомогою оцінки /12/ та міркувань від супротивного легко переконатися в єдиності розв'язку задачі /10/, і, отже, завершити доведення теореми про коректність.

4. Априорна оцінка напівдискретних апроксимацій. Теорема /про збіжність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна/. Нехай (u, φ) – розв'язок варіаційної задачі /10/, причому існує $k \geq 1$, для якого справедливі включення:

$$u, u', u'' \in L^2(0, T; Z \cap H^{k+1}(\Omega_s)^3), \quad u' \in H^{k+1}(\Omega_s)^3; \\ \varphi, \varphi', \varphi'' \in L^2(0, T; \Phi \cap H^{k+1}(\Omega_F)), \quad \varphi' \in H^{k+1}(\Omega_F).$$

Якщо як підпростори Z_h і Φ_h використовувати простори апроксимацій методу скінченних елементів [6], то послідовність напівдискретних апроксимацій (u_h, φ_h) збігається /відносно енергетичних норм $\|\cdot\|_S, \|\cdot\|_F$ / при $h \rightarrow 0$ до розв'язку (u, φ) і при цьому виконується априорна оцінка швидкості збіжності

$$\|u_h(t) - u(t)\|_\Phi^2 + \|\varphi_h(t) - \varphi(t)\|_F^2 \leq ch^{2k} F(t), \quad /15/$$

де $c > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять, а функціонал F має вигляд

$$F(t) = |u(t)|_S^2 + |u'(t)|_S^2 + |u''(t)|_S^2 + |\varphi(t)|_F^2 + |\varphi'(t)|_F^2 + |\varphi''(t)|_F^2 + \\ + \int_0^t [|u''(\tau)|_S^2 + |\varphi''(\tau)|_F^2] d\tau, \quad |u|_S = \|u\|_{k+1, \Omega_s}, \quad |\varphi|_F = \|\varphi\|_{k+1, \Omega_F}.$$

Для доведення теореми розглянемо похибки напівдискретизації Гальоркіна /16/ та їх декомпозиції /17/:

$$e_h = u_h - u, \quad z_h = \varphi_h - \varphi, \quad /16/$$

$$e_h = \varepsilon_h - E_h, \quad z_h = \rho_h - R_h, \quad /17/$$

де E_h та R_h – похибки проектування розв'язку (u, φ) на Z_h та Φ_h ; $\varepsilon_h = u_h - \Pi_h u$, $\rho_h = \varphi_h - \Pi_h \varphi$.

Тут оператори $\Pi_h: Z \rightarrow Z_h$ та $\Pi_h: \Phi \rightarrow \Phi_h$ здійснюють ортогональне /відносно скалярних добутків $a_S(o, o)$ та $g_F(o, o)$ / проектування Z і Φ на Z_h і Φ_h відповідно.

Із варіаційної задачі /10/ та її напівдискретизованого аналога, враховуючи означення /16/ та /17/, отримуємо оцінку

$$\|e(t)\|_S^2 + \|z(t)\|_F^2 \leq \\ \leq c \{ \|E'(0)\|_Z^2 + \|R'(0)\|_\Phi^2 + \|E(t)\|_S^2 + \|R(t)\|_F^2 + \int_0^t [\|E''(\tau)\|_Z^2 + \|R''(\tau)\|_\Phi^2] d\tau \}. /18/$$

Урешті, враховуючи, що підпростори Z_h та Φ_h є просторами апроксимацій методу скінченних елементів, вдається оцінити похибки проектування у правій частині нерівності /18/ і таким чином отримати оцінку /15/.

5. Дискретизація в часі. Розв'язування задачі Коші /14/ для дискретизованої за просторовими змінними варіаційної задачі /10/ побудоване на базі регуліризованої відповідно до дискретного аналогу закону збереження енергії /11/ однокрокової рекурентної схеми:

Задано $\Delta t, \beta, \gamma = \text{const} > 0$; $\{U^j, \Psi^j\}, \{V^j, P^j\} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.
 Знайти пари $\{U^{j+1}, \Psi^{j+1}\}, \{V^{j+1}, P^{j+1}\} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ такі, що

$$\begin{bmatrix} 2M_s + \Delta t^2 \beta A_s & \Delta t B^T \\ \Delta t B^T & 2D_F + \Delta t^2 \beta G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V^{j+1/2} \\ P^{j+1/2} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} L_s^{j+1/2} \\ L_F^{j+1/2} \end{pmatrix} -$$

$$- 2 \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^j \\ \Psi^j \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2M_s + \Delta t^2 (\beta - \gamma) A_s & 0 \\ 0 & 2D_F + \Delta t^2 (\beta - \gamma) G_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V^j \\ P^j \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} U^{j+1} &= U^j + \Delta t V^{j+1/2}, & \Psi^{j+1} &= \Psi^j + \Delta t P^{j+1/2}, \\ V^{j+1} &= 2V^{j+1/2} - V^j, & P^{j+1} &= 2P^{j+1/2} - P^j, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Тут U^m, V^m, Ψ^m, P^m є наближеннями до $U(t_m), V'(t_m), \Psi(t_m)$ та $\Psi'(t_m)$ відповідно, $t_m = m \Delta t$ ($m = 1, 2, \dots$), де Δt - крок дискретизації за часом; γ, β - параметри схеми. Застосування енергетичних оцінок дає змогу, за аналогією до попереднього, дослідити стійкість та збіжність такої рекурентної схеми. З'ясовано, що оптимальний порядок збіжності досягається вибором параметрів схеми у вигляді $\gamma = 1/2 + c_* \Delta t$, $\beta \geq \gamma/2$, де c_* - деяка додатна константа.

6. Заклучні зауваження. Доведення існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною в термінах вектора пружних переміщень і потенціалу переміщень рідини виконане /з використанням дещо іншої техніки доведення/ у праці [7].

Отримані результати дають змогу впевнено застосовувати побудовані чисельні схеми на практиці, хоча й не звільняють від необхідності апостеріорного дослідження точності та збіжності отримуваних результатів.

1. Горлач В.М. Акустическое взаимодействие упругого тела с жидкостью в замкнутой области: Выбор модели. Львов, 1987. 24 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 22.06.1988, № 1583-Ук88. 2. Горлач В.М. Численное моделирование акустических колебаний упругого тела с жидкостью: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1990. 3. Горлач В.М., Шинкаренко Г.А. Численное моделирование акустических волн в упругих телах с жидкостью: динамические процессы. Львов, 1987. 33 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 22.12.87, № 3256-Ук87. 4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М., 1988. 6. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К., 1991. 7. Boujot J. Mathematical formulation of fluid-structure interaction problems // *M²AN: Model. math. et anal. numez.* 1987. Vol. 21. N.2. P. 239-260.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.93

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач

ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО ТІЛА З РІДИНОЮ.

2. СЕРЕДОВИЩА З ДИСИПАЦІЄЮ

У праці [1] проаналізовані /з погляду застосування проекційно-сіткових методів/ математичні моделі процесу нестационарної акустичної взаємодії пружного тіла та ідеальної стисливої рідини для випадку нехтування втратами енергії /дисипацією/. Однак будь-які рухи реальних механічних систем супроводжуються дисипацією енергії, що, як правило, суттєво ускладнює математичне моделювання таких процесів. Спробуємо побудувати та проаналізувати математичну модель акустичної взаємодії пружного тіла та в'язкої стисливої рідини [2].

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай пружне тіло /відповідно рідина/ займає область Ω_s /відп. Ω_f / точок $X=(x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору R^3 з межею Γ_s /відп. Γ_f /. Контакт тіла та рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_c = \Gamma_s \cap \Gamma_f$. Позначимо через $v^s=(v_1^s, v_2^s, v_3^s)$ /відп. v^f / одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_s /відп. Γ_f /; t - час $0 \leq t \leq T \leq +\infty$.

Рух пружного тіла описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_s u_i'' - \sigma_{ij,j}^s = f_i \quad \text{в } \Omega_s \times (0, T]; \quad /1/$$

$$\sigma_{ij}^s(u) = a_{ijklm} \varepsilon_{km}(u) + c_{ijklm} \varepsilon_{km}(u') \quad \text{в } \Omega_s \times (0, T]; \quad /2/$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad \text{в } \Omega_s \times (0, T]; \quad /3/$$

де ρ_s - густина; $\{a_{ijklm}\}$ і $\{c_{ijklm}\}$ - модулі пружності та в'язкості; $f = (f_1, f_2, f_3)$ - відома інтенсивність розподілених джерел звуку в тілі. Тут та надалі маємо на увазі підсумовування від 1 до 3, за індексами, що повторюються, а також $(\cdot)' = \frac{d}{dt}(\cdot)$; $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)$.

Рух рідини описується вектором переміщень $v = (v_1, v_2, v_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_F v_i'' - \sigma_{ij,j}^F = 0 \quad \text{в } \Omega_F \times (0, T]; \quad /4/$$

$$\sigma_{ij}^F(v) = [\rho_F c^2 v_{k,k} + (\lambda + \eta - 2\mu/3) v'_{m,m}] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(v) \quad \text{в } \Omega_F \times (0, T]; \quad /5/$$

де ρ_F - густина; c - швидкість звуку; η і μ - відповідно коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості; $\lambda = \mathcal{K}(1/c_v - 1/c_p)$ [3], де $\mathcal{K}$ - коефіцієнт теплопровідності; c_v та c_p - питомі теплоємності рідини при сталих об'ємі й тиску відповідно.

Надалі позначатимемо індексами U - нерухомі /жорсткі/, P - вільні /або з заданим тиском/ частини меж Γ_s та Γ_F , так що

$$\Gamma_s = \Gamma_{sU} \cup \Gamma_{sP} \cup \Gamma_c \quad \text{та} \quad \Gamma_F = \Gamma_{FU} \cup \Gamma_{FP} \cup \Gamma_c,$$

причому Γ_{sU} , Γ_{FU} і Γ_c - не порожні множини точок. Розглядаємо граничні умови, що відповідають цим поверхням:

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_{sU}, \quad \sigma_{ij}^s v_j^s = \hat{\sigma}_i^s \quad \text{на } \Gamma_{sP}; \quad /6/$$

$$v_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_{FU}, \quad \sigma_{ij}^F v_j^F = \hat{\sigma}_i^F \quad \text{на } \Gamma_{FP}; \quad /7/$$

$$u_i = v_i, \quad (\sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}^F) v_j^s = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \quad /8/$$

Для визначеності розв'язку задаємо початкові умови:

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \quad \text{в } \Omega_s, \quad v(0) = v^0, \quad v'(0) = v^1 \quad \text{в } \Omega_F. \quad /9/$$

Таким чином, сформульована задача /1/-/9/ є найбільш загальною математичною моделлю процесу акустичної взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною.

2. Варіаційна /слабка/ постановка задачі. Детальніше методика побудови таких постановок описана у праці [6].

Введемо простори

$$Z = \{z \in \mathcal{X}'(\Omega_S)^3 \mid z=0 \text{ на } \Gamma_{SV}\}, \quad H_S = L^2(\Omega_S)^3,$$

$$R = \{z \in \mathcal{X}'(\Omega_F)^3 \mid z=0 \text{ на } \Gamma_{FU}\}, \quad H_F = L^2(\Omega_F)^3,$$

де $\mathcal{X}^k(\Omega)$ — простір Соболева функцій, інтегрованих із квадратом в області Ω разом з усіма уважальними похідними до k -го порядку включно.

Варіаційна постановка задачі має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } t^S \in L^2(0,T;Z'), \quad t^F \in L^2(0,T;R'), \quad u^0 \in Z, \quad u' \in H_S, \quad v^0 \in R, \quad v' \in H_F. \\ \text{Знайти таку пару } (u, v) \in L^2(0,T;Z \times R), \quad \text{що} \\ m_S(u'', z) + c_S(u, z') + a_S(u, z) = \langle t^S, z \rangle_S, \\ m_F(v'', z) + c_F(v', z) + a_F(v, z) = \langle t^F, z \rangle_F, \quad /10/ \\ a_S(u(0) - u^0, z) = 0, \quad m_S(u'(0) - u', z) = 0, \quad \forall z \in Z, \\ a_F(v(0) - v^0, z) = 0, \quad m_F(v'(0) - v', z) = 0, \quad \forall z \in R, \end{array} \right.$$

де вжиті позначення:

$$m_S(u, z) = \int_{\Omega_S} \rho_S u_i z_i dx, \quad a_S(u, z) = \int_{\Omega_S} a_{ijkl} \varepsilon_{km}(u) \varepsilon_{ij}(z) dx,$$

$$c_S(u, z) = \int_{\Omega_S} c_{ijkl} \varepsilon_{km}(u) \varepsilon_{ij}(z) dx,$$

$$m_F(v, z) = \int_{\Omega_F} \rho_F v_i z_i dx, \quad a_F(v, z) = \int_{\Omega_F} \rho_F c^2 v_{i,i} z_{j,j} dx,$$

$$c_F(v, z) = \int_{\Omega_F} [(\lambda + \mu - 2\mu/3) v_{i,i} z_{j,j} + 2\mu \varepsilon_{km}(v) \varepsilon_{km}(z)] dx,$$

$$\langle t^S, z \rangle_S = \int_{\Omega_S} f_i z_i dx + \int_{\Gamma_{SP}} \hat{b}_i^S z_i d\gamma, \quad \langle t^F, z \rangle_F = \int_{\Gamma_{FP}} \hat{b}_i^F z_i d\gamma.$$

Введемо норми, квадрати яких пов'язані з білінійними формами задачі /10/ таким чином:

$$\|u\|_Z^2 = a_S(u, u), \quad \|u\|_{H_S}^2 = m_S(u, u), \quad |u|_Z^2 = c_S(u, u),$$

$$\|v\|_R^2 = a_F(v, v), \quad \|v\|_{H_F}^2 = m_F(v, v), \quad |v|_R^2 = c_F(v, v).$$

Нехай $w = (u, v) \in W = Z \times R$ і тоді
 $\|w\|_W^2 = \|u\|_Z^2 + \|v\|_R^2$, $\|w\|_N^2 = \|u\|_{N_Z}^2 + \|v\|_{N_R}^2$, $\|w\|_W^2 = \|u\|_Z^2 + \|v\|_R^2$,
 причому $\|w\|_W^2$, $\|w\|_N^2$ та $\|w'\|_W^2$ дають змогу обчислювати подвоєні
 значення відповідно потенціальної та кінетичної енергій, а також
 інтенсивність дисипації енергії гідропружної системи. Допільно
 ввести також ще одну фізично виправдану норму, квадрат якої
 є подвоєним значенням повної енергії системи в момент часу t :

$$\|w(t)\|^2 = \|w(t)\|_W^2 + \|w'(t)\|_N^2.$$

За умови існування розв'язку з /10/ можна отримати вираз
 закону збереження енергії гідропружної системи:

$$\|w\|^2 + \int_0^t \|w'\|_N^2 d\tau = \|w^0\|_W^2 + \|w'\|_N^2 + 2 \int_0^t [\langle l^S, u' \rangle_S + \langle l^F, v' \rangle_F] d\tau. /11/$$

Теорема /про коректність варіаційної задачі/. Існує один
 і лише один розв'язок w задачі /10/, такий, що
 $w \in L^\infty(0, T; Z \times R)$, $w' \in L^\infty(0, T; H_Z \times H_R)$, $w'' \in L^\infty(0, T; Z' \times R')$
 і, крім цього, розв'язок w неперервно залежить від вихідних
 даних, тобто знайдеться $K = \text{const} > 0$ така, що

$$\|w\|^2 + \int_0^t \|w'\|_W^2 d\tau \leq K \left\{ \|w^0\|_W^2 + \|w'\|_N^2 + \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 d\tau \right\}. /12/$$

Доведення теореми виконаємо конструктивним шляхом.

3. Напівдискретизація Гальоркіна. Нехай $\{W_h = Z_h \times R_h\}$ -
 послідовність скінченновимірних підпросторів із простору W та-
 ка, що $\bigcup_{h>0} W_h$ щільна в W та $\dim Z_h = N_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$, $\dim R_h = M_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$.
 Для кожного фіксованого $h > 0$ розв'язок $w_h \in L^2(0, T; W_h)$
 задачі /10/ при $(z, z) \in W_h$ називаємо півдискретною апроксимацією
 Гальоркіна розв'язку $w \in L^2(0, T; W)$. Знаходимо w_h у вигля-
 ді розкладів [5]

$$w_h(t) = \left(\sum_{i=1}^N U_i(t) z_i, \sum_{i=1}^M V_i(t) z_i \right) /13/$$

за базою $z_1, \dots, z_N, z_1, \dots, z_M$ простору W_h з невідомим
 вектором коефіцієнтів $Y = \{U, V\}$. Підставляючи /13/ в
 рівняння напівдискретизованої задачі та послідовно приймаючи
 $Z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) і $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$), приходимо
 до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} MY''(t) + CY'(t) + AY(t) = L(t) & \forall t \in (0, T), \\ MY'(0) = Y', \\ AY(0) = Y^0, \end{cases} /14/$$

де матриці M, C, A та вектори L, Y^0, Y^1 мають таку структуру

$$M = \begin{bmatrix} M_S & 0 \\ 0 & M_F \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_S & 0 \\ 0 & C_F \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & A_F \end{bmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_S \\ L_F \end{pmatrix}, \dots$$

Розв'язок задачі /14/ та він існує і єдиний через додатну визначеність матриць $M_S = \{m_S(z_i, z_j)\}_{i,j=1}^N$, $M_F = \{m_F(z_i, z_j)\}_{i,j=1}^N$ як матриць Грама систем лінійно незалежних функцій /внаслідок /13/ однозначно визначає на інтервалі часу $[0, T]$ напівдискретну апроксимацію W_h . Рівняння балансу енергії /11/ залишається справедливим і для напівдискретизованої задачі, з чого випливає, що послідовність розв'язків W_h має обмежену енергію /оцінка /12//, і тому з неї можна вибрати збіжну підпослідовність, межа якої є розв'язком [6] варіаційної задачі /10/.

Таким чином, визначені існування та неперервна залежність від вихідних даних розв'язку варіаційної задачі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. За допомогою оцінки /12/ та міркувань від супротивного легко переконатися в єдиності розв'язку задачі /10/, і отже, завершити доведення теореми про коректність.

4. Априорна оцінка напівдискретних апроксимацій.

Теорема /про збіжність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна/. Нехай W – розв'язок варіаційної задачі /10/, причому існує $k \geq 1$, для якого справедливі включення:

$$W, W', W'' \in L^2[0, T; W \cap H^{k+1}(\Omega_S \cup \Omega_F)], \quad W' \in H^{k+1}(\Omega_S \cup \Omega_F)^3.$$

Якщо як простір W_h використовується простір апроксимацій методу скінченних елементів [4], тоді послідовність напівдискретних апроксимацій W_h збігається /відносно енергетичної норми $\|W\| + \int_0^t |W'(\tau)|_W^2 d\tau$ / при $h \rightarrow 0$ до розв'язку W і при цьому виконується априорна оцінка швидкості збіжності

$$\|W_h(t) - W(t)\|^2 + \int_0^t |W_h(\tau) - W'(\tau)|_W^2 d\tau \leq Kh^{2k} F(t), \quad /15/$$

де $K > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять, а функціонал F має вигляд

$$F(t) = |W'|^2 + |W(t)|^2 + |W'(t)|^2 + \int_0^t [|W'(\tau)|^2 + |W''(\tau)|^2] d\tau,$$

де $|W| = \|W\|_{k+1, \Omega_S \cup \Omega_F}$.

Для доведення теореми розглянемо похибку напівдискретизації Гальоркіна /16/ та її декомпозицію /17/:

$$e_h = w_h - w; \quad /16/$$

$$e_h = \varepsilon_h - E_h. \quad /17/$$

де E_h - похибка проектування розв'язку w на W_h ; $\varepsilon_h = u_h - \Pi_h u$. Тут оператор $\Pi_h: W \rightarrow W_h$ здійснює ортогональне /відносно скалярних добутоків $(\cdot, \cdot)_S$ та $(\cdot, \cdot)_F$ / проектування W на W_h відповідно.

Із варіаційної задачі /10/ та її напівдискретизованого аналога, враховуючи означення /16/ і /17/, отримуємо оцінку

$$\|\varepsilon_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\varepsilon_h'(\tau)\|_W^2 d\tau \leq K \left\{ \|E_h'(0)\|_h^2 + \int_0^t [\|E_h'(\tau)\|_W^2 + \|E_h''(\tau)\|_W^2] d\tau \right\}. \quad /18/$$

Врешті, враховуючи, що підпростір W_h є простором апроксимацій методу скінченних елементів, вдається оцінити похибки проектування в правій частині нерівності /18/ і, таким чином, отримати оцінку /15/.

5. Дискретизація в часі. Розв'язування задачі Коші /14/ для дискретизованої за просторовими змінними варіаційної задачі /10/ побудоване на базі однокрокової рекурентної схеми, яка з використанням матричних позначень допускає таке алгебраїчне зображення [6]:

Задано $\Delta t, \beta, \gamma = \text{const} > 0$; $\{U^j\}, \{V^j\} \in \mathbb{R}^{N \times M}$.

Знайти $\{U^{j+1}\}, \{V^{j+1}\} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ такі, що

$$\begin{aligned} & \left\{ M + \Delta t \gamma A + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta C \right\} V^{j+1/2} = \\ & = \Delta t \{ L_{j+1/2} - C U^j \} + \left\{ M + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - 2\gamma^2) C \right\} V^j, \end{aligned} \quad /19/$$

де $U^{j+1} = U^j + \Delta t V^{j+1/2}$, $V^{j+1} = 2V^{j+1/2} - V^j$, $j = 0, 1, \dots$

Тут U^m, V^m є наближеннями до $Y(t_m)$ і $Y'(t_m)$ відповідно; $t_m = m \Delta t$ ($m = 1, 2, \dots$), де Δt - крок дискретизації за часом; γ, β - параметри схеми. Застосування енергетичних оцінок дає змогу, за аналогією до попереднього, дослідити стійкість та збіжність рекурентної схеми. З'ясовано, що оптимальний порядок збіжності досягається вибором параметрів схеми у вигляді $\gamma = 1/2 + c_* \Delta t$, $\beta \geq \gamma$, де c_* - деяка додатна константа.

Наведена тут рекурентна схема /19/ має ряд переваг порівняно з класичною схемою Ньюмарка [7], зокрема дає змогу:

- а/ виконувати обчислення зі змінним кроком інтегрування Δt ;
 б/ без труднощів задовольняти початкові умови задачі Коші /14/.

1. Горлач В.М. Акустическое взаимодействие упругого тела с жидкостью в замкнутой области: выбор модели. Львов, 1987. 24 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 22.06.1988, № 1583-Ук88. 2. Горлач В.М. Акустические волны в жидких средах с диссипацией, контактирующих упругими телами // Динам. задачи механики сплошной среды, теорет. и прикл. вопр., виброакустического просвечивания Земли: Материалы докл. регион. конф. Краснодар, 1992. С.53. 3. Краоильников В.А., Бридов В.В. Введение в физическую акустику. М., 1984. 4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М., 1988. 6. Шинкваренко Г.А. Проекционно-сеточные методы решения начально-краевых задач. К., 1991. 7. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. 1959. Vol. 85. P. 67-94.

Стаття надійшла до редакції 16.02.93

УДК 517.944.947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко, Х.С.Басьоні

ПОСЛІДОВНІ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ МІШАНОЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай D - обмежена область евклідового простору $\mathbb{R}^n$, ∂D - її межа. Розглянемо в D таку мішану задачу:

$$u_t' - Au + f(x, t, u) = F(x, t), \quad x \in D, \quad t \in [0, T]; \quad /1/$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D; \quad /2/$$

$$u(x, t)|_{x \in \partial D} = \psi(x, t), \quad t \in [0, T], \quad /3/$$

$$\text{де } Au = \sum_{i,j=1}^n \partial_i [a_{ij}(x) \partial_j u(x, t)], \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad /4/$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq C_0^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad a_{ij} = a_{ji} \in C'(\bar{D}), \quad C_0^2 = \text{const.} \quad /5/$$

© Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д., Басьоні Х.С., 1993

Припустимо, що функції f, F, u_0, φ задовольняють умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі /1/-/3/ [1]. Зокрема, функція $f(x, t, u)$ задовольняє умову Ліпшиця по змінній u рівномірно щодо x, t зі сталою L , а $|u_0(x)| > 0$. $\forall x \in D$.

Позначимо через $\tilde{u}(x, t)$ - розв'язок такої лінійної мішаної параболічної задачі:

$$\tilde{u}'_t - A\tilde{u} + \kappa(x, t)\tilde{u} = F(x, t), \quad x \in D, \quad t \in [0, T]; \quad /6/$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D; \quad /7/$$

$$\tilde{u}(x, t)|_{x \in \partial D} = \varphi(x, t), \quad t \in [0, T], \quad /8/$$

де

$$\kappa(x, t) = \frac{f(x, t, u_0(x))}{u_0(x)}. \quad /9/$$

Близькість розв'язків задач /1/-/3/ та /6/-/8/ дають такі нерівності:

$$\|v\|^2 + B_1 \int_0^t \|v\|_A^2 d\tau \leq \frac{L+K}{\alpha} \int_0^t \|\tilde{u} - u_0\|^2 d\tau; \quad /10/$$

$$B_1 = 2 - C^2 [2L + \alpha(L+K)] > 0;$$

$$\|v\|^2 + B_2 \int_0^t \|v\|^2 d\tau \leq \frac{L+K}{\alpha} \int_0^t \|\tilde{u} - u_0\|^2 d\tau; \quad /11/$$

$$B_2 = 2C^{-2} - [2L + \alpha(L+K)] > 0; \quad /12/$$

$$\|v\|^2 \leq g(t) + B_3 \int_0^t g(\tau) \exp\{B_3(t-\tau)\} d\tau;$$

$$B_3 = 2L + \alpha(L+K) - 2C^{-2} > 0,$$

$$\text{де } g(t) = \frac{L+K}{\alpha} \int_0^t \|\tilde{u} - u_0\|^2 d\tau,$$

$$v = u - \tilde{u}, \quad \|v\|^2 \stackrel{df}{=} \int_D v^2(x, t) dx; \quad /13/$$

$$\|v\|_A^2 \stackrel{df}{=} \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) [\partial_i v(x, t)] [\partial_j v(x, t)] dx; \quad /14/$$

$$K \stackrel{df}{=} \max_{x \in D, t \in [0, T]} |\kappa(x, t)|; \quad /15/$$

C - стала вкладки [1]; α - довільна стала, яку вибирають з умови $B_i > 0$ для кожної з відповідних нерівностей.

Наближений розв'язок $\tilde{u}$ можна уточнити за допомогою такого процесу послідовних наближень:

$$u^{(0)}(x, t) = \tilde{u}(x, t),$$

$$u_t^{(n)} - Au^{(n)} + f(x, t, u^{(n-1)}(x, t)) = F(x, t), \quad x \in D, \quad t \in [0, T]; \quad /16/$$

$$u^{(n)}(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D,$$

$$u^{(n)}(x, t) \Big|_{x \in \partial D} = \varphi(x, t), \quad t \in [0, T], \quad n \geq 1.$$

Для різниці двох сусідніх наближень $v^{(n)} = u^{(n)} - u^{(n-1)}$ маємо такі рекурентні оцінки:

$$\|v^{(n)}\|^2 + \int_0^t \|v^{(n)}\|_A^2 d\tau \leq L^2 C^2 \int_0^t \|v^{(n-1)}\|^2 d\tau; \quad /17/$$

$$\|v^{(n)}\|^2 + C^{-2} \int_0^t \|v^{(n)}\|^2 d\tau \leq L^2 C^2 \int_0^t \|v^{(n-1)}\|^2 d\tau; \quad /18/$$

$$\|v^{(n)}\|^2 \leq g_{n-1}(t) + (L\alpha - 2C^{-2}) \int_0^t g_{n-1}(\tau) \exp\{(L\alpha - 2C^{-2}) \times (t - \tau)\} d\tau; \quad /19/$$

$$g_{n-1}(t) = \frac{L}{\alpha} \int_0^t \|v^{(n-1)}\|^2 d\tau.$$

Запропонована ітераційна процедура може бути узагальнена також у випадку, коли $f(x, t, u, u'_1, \dots, u'_n)$.

Теоретично ця стаття пов'язана з працями [2, 3].

І. Ладженская О.А., Солонников В.А.,
Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1973. 2. Лино Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 3. Мартиненко М.Д., Басюні Х. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С.69-72. 4. Мартиненко М.Д., Басюні Х.С. Лінеаризація для однієї задачі Дарбу другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.36. С.84-85.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.93

ОСЕСИМЕТРИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНОГО ШАРУ
ПІД ДІЄЮ ДВОХ ШТАМПІВ

Розглянемо осесиметричну контактну задачу двостороннього тиснення двох жорстких гладких штампів на пружний шар завтовшки H .

Граничні умови задачі в безрозмірних циліндричних координатах (z, ρ) приймемо такими:

$$u_z(z, 0) = f_1(\rho z) \quad \text{при} \quad z < 1; \quad /1/$$

$$\sigma_{zz}(z, 0) = 0 \quad \text{при} \quad z > 1; \quad /2/$$

$$\tau_{zz}(z, 0) = 0 \quad \text{при} \quad z > 0; \quad /3/$$

$$u_z(z, h) = f_2(\rho z) \quad \text{при} \quad z < R; \quad /4/$$

$$\sigma_{zz}(z, h) = 0 \quad \text{при} \quad z > R; \quad /5/$$

$$\tau_{zz}(z, h) = 0 \quad \text{при} \quad z > 0, \quad /6/$$

де $z = \frac{\rho}{a}$, $R = \frac{\delta}{a}$, $h = \frac{H}{a}$, $z = \frac{\zeta}{a}$, a, δ -

відповідно радіуси областей контакту; $f_1(\rho z)$, $f_2(\rho z)$ - функції, що характеризують форму профілів підосв штампів.

Згідно з працею [1], функції напружень вибираємо у вигляді

$$\Psi(z, z) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} [A(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z + B(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z] J_0(\lambda z) d\lambda; \quad /7/$$

$$\Psi_1(z, z) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} [A_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z + B_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z] J_0(\lambda z) d\lambda. \quad /8/$$

З крайових умов /1/-/6/ отримуємо рівняння для визначення функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$.

$$\sigma_{zz}(z, 0) = \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \int_0^\infty \lambda B_1(\lambda) J_0(\lambda z) d\lambda = 0 \quad (z > 1); \quad /9/$$

$$\tau_{zz}(z, 0) = \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \Psi_1) \Big|_{z=0} = \int_0^\infty [A + A_1] J_0(\lambda z) d\lambda = 0 \quad (z > 0); \quad /10/$$

$$2\mu u_z(z, 0) = \int_0^\infty [A_1 - (1-2\nu)A] J_0(\lambda z) d\lambda = 2\mu f_1(az) \quad (z < 1); \quad /11/$$

$$\sigma_{zz}(z, h) = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + h \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \Big|_{z=h} = \int_0^\infty \lambda [A sh \lambda h + B_1 ch \lambda h + \lambda h (A ch \lambda h + B sh \lambda h)] J_0(\lambda z) d\lambda = 0 \quad (z > R); \quad /12/$$

$$\tau_{zz}(z, h) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\psi_1 + h \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=h} = \int_0^\infty [A_1 ch \lambda h + B_1 sh \lambda h + A ch \lambda h + B sh \lambda h + \lambda h (A sh \lambda h + B ch \lambda h)] J_0(\lambda z) d\lambda = 0 \quad (z > 0); \quad /13/$$

$$2\mu u_z(z, h) = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} + h \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=h} = \int_0^\infty [A_1 ch \lambda h + B_1 sh \lambda h + \lambda h (A sh \lambda h + B ch \lambda h) - (1-2\nu)(A ch \lambda h + B sh \lambda h)] J_0(\lambda z) d\lambda = 2\mu f_2(az). \quad /14/$$

$(z < R).$

Система /9/-/14/ зводиться до парних інтегральних рівнянь, які служать для визначення шуканих контактних напружень $\sigma_{zz}(z, 0)$ при $z < 1$ та $\sigma_{zz}(z, h)$ при $z < R$:

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda z) d\lambda = \frac{a\mu}{1-\nu} f_1(az) \quad (z < 1); \quad /15/$$

$$-\int_0^\infty \lambda [1+\Phi] A J_0(\lambda z) d\lambda - \int_0^\infty \lambda H \Phi J_0(\lambda z) d\lambda = 0 \quad (z > 1); \quad /16/$$

$$\int_0^\infty H J_0(\lambda z) d\lambda = -\frac{a\mu}{1-\nu} f_2(az) \quad (z < R); \quad /17/$$

$$-\int_0^\infty \lambda [1+\Phi] H J_0(\lambda z) d\lambda - \int_0^\infty \lambda A \Phi J_0(\lambda z) d\lambda = 0 \quad (z > R); \quad /18/$$

$$2(1-\nu)H(\lambda) = \lambda h (A_1 sh \lambda h + B ch \lambda h) + (1-2\nu)(B sh \lambda h - A_1 ch \lambda h) - A_1 ch \lambda h + B_1 sh \lambda h; \quad /19/$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{sh \lambda h ch \lambda h - sh^2 \lambda h + \lambda h}{sh^2 \lambda h}; \quad \Phi_1(\lambda) = \frac{sh \lambda h + \lambda h ch \lambda h}{sh^2 \lambda h}.$$

Розглянемо парні інтегральні рівняння /15/, /16/. Приймаємо, що

$$A(1+\Phi) = \int_0^1 \alpha_1(t) \cos \lambda t dt; \quad /20/$$

$$H\Phi_1 = \int_0^1 \beta_1(t) \cos \lambda t dt, \quad /21/$$

де $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$ - нові невідомі функції.

Рівняння /16/ при /20/ та /21/ виконується при довільних функціях $\alpha_1(t)$ та $\beta_1(t)$. При $z < 1$ з того ж рівняння маємо

$$a^2 \sigma_{zz}(z, 0) = - \frac{\alpha_1(t) + \beta_1(t)}{\sqrt{1-z^2}} + \int_0^1 \frac{\alpha_1'(t) + \beta_1'(t)}{\sqrt{t^2 - z^2}} dt \quad (z < 1). /22/$$

Рівняння /15/ зводиться до рівняння Фредгольма, з якого визначається функція $\alpha_1(z)$:

$$\alpha_1(z) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \alpha_1(t) dt \int_0^{\pi/2} \frac{\Phi(\lambda)}{1+\Phi} \cos \lambda t \cos \lambda z d\lambda = F(z), /23/$$

де $z = z \sin \theta$,

$$\int_0^{\pi/2} F(z \sin \theta) d\theta = \frac{a\mu}{1-\nu} f_1(az) \quad (z < 1). /24/$$

Розв'язок рівняння Фредгольма /23/ визначаємо в рядах. Наприклад, нехай, функція $f_1(az)$ в /15/ задається як

$$f_1(az) = \delta_{2n} - \varepsilon_{2n} z^{2n} a^{2n}. /25/$$

Тоді з /24/ одержуємо функцію $F(z)$

$$F(z) = \frac{a\mu}{1-\nu} \left[\frac{2}{\pi} \delta_{2n} - \frac{\varepsilon_{2n}}{R_{2n}} a^{2n} z^{2n} \right], /26/$$

де $R_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$.

Функцію $\alpha_1(z)$ шукаємо у вигляді ряду

$$\alpha_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{(k)}(0)}{k!} z^k /27/$$

за умови $\alpha_1(1) = 0$ у випадку обмежених контактних напружень /22/.

Підставляючи /27/ в /23/, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення величини $\alpha_1^{(k)}(0)$;

$$\alpha_1(0) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{(k)}(0)}{k!} \int_0^{\pi/2} \frac{\Phi}{1+\Phi} d\lambda \int_0^1 t^k \cos \lambda t dt + F(0); /28/$$

$$\alpha_1^{(2p)}(0) = (-1)^p \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{(k)}(0)}{k!} \int_0^{\pi/2} \lambda^{2p} \frac{\Phi}{1+\Phi} d\lambda \int_0^1 t^k \cos \lambda t dt + F^{(2p)}(0); /29/$$

$$\alpha_1^{(2p-1)}(0) = F^{(2p-1)}(0) = 0. \quad /30/$$

Верхню межу інтегрування N визначимо з урахуванням поведінки підінтегральної функції для великих значень λ :

$$\lambda^{2p} \frac{\Phi(\lambda)}{1+\Phi(\lambda)} \approx \frac{\lambda^{2p}}{e^{2\lambda h}} \quad N \geq \frac{6}{h}:$$

При $h = 3$, $N = 2$ і в системі /28/ $p = 4$, тобто визначаються $\alpha_1(0)$, $\alpha_1'(0)$, $\alpha_1''(0)$, $\alpha_1'''(0)$, $\alpha_1^{(4)}(0)$, а останні величини дорівнюють нулю. При $h = 2$, $N = 3$ і в системі /28/ $p = 6$.

Парні рівняння /17/, /18/ розв'язуємо аналогічно, як і рівняння /15/, /16/.

Приймаємо, що

$$H(1+\Phi) = \int_0^R \alpha_2(t) \cos \lambda t dt; \quad /31/$$

$$\Lambda \Phi_1 = \int_0^R \beta_2(t) \cos \lambda t dt, \quad /32/$$

де $\alpha_2(t)$, $\beta_2(t)$ - нові шукані функції.

Рівняння /18/ виконується при довільних функціях $\alpha_2(t)$ та $\beta_2(t)$. При $z < R$ маємо вираз для контактних напружень

$$a^2 \sigma_{zz}(z, h) = - \frac{\alpha_2(R) + \beta_2(R)}{\sqrt{R^2 - z^2}} + \int_0^R \frac{\alpha_2'(t) + \beta_2'(t)}{\sqrt{t^2 - z^2}} dt. \quad /33/$$

Рівняння /17/ можна звести до розв'язку рівняння Фредгольма:

$$\alpha_2(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^R \alpha_2(t) dt \int_0^\infty \frac{\Phi_1}{1+\Phi} \cos \lambda t \cos \lambda z d\lambda + E(z), \quad /34/$$

$$\text{де} \quad \int_0^{\pi/2} E(z \sin \theta) d\theta = - \frac{a\mu}{1-\nu} f_2(az). \quad /35/$$

Наприклад, при

$$f_2(az) = \delta_n^* - \varepsilon_n^* a^n z^n \quad E(z) = - \frac{a\mu}{1-\nu} \left[\frac{2}{\pi} \delta_n^* - \frac{\varepsilon_n^*}{R_n} a^n z^n \right] /36/$$

Рівняння Фредгольма /34/ розв'язується методом рядів, як і рівняння /23/:

$$\alpha_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad \alpha_2(R) = 0.$$

Щоб знайти контактні напруження за формулами /22/ та /33/, потрібно визначити функції $\beta_1(t)$ та $\beta_2(t)$ за умови, що $\beta_1(l)$ та $\beta_2(R)$ дорівнюють нулю у випадку обмежених контактних напружень. З /20/ та /32/, з /21/ та /31/ отримуємо рівняння для визначення $\beta_1(t)$ та $\beta_2(t)$ за умов, що $\beta_1(l) = \beta_2(R) = 0$:

$$\int_0^R \beta_1(t) \cos \lambda t dt = \frac{\Phi_1}{1+\Phi} \int_0^R \alpha_2(t) \cos \lambda t dt; \quad /37/$$

$$\int_0^l \beta_2(t) \cos \lambda t dt = \frac{\Phi_1}{1+\Phi} \int_0^l \alpha_1(t) \cos \lambda t dt. \quad /38/$$

Інтегральні рівняння /37/, /38/ розв'язуємо методом колокації, зображаючи $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ у вигляді рядів і враховуючи, що $0 \leq \lambda \leq N$:

$$\beta_1(t) = \sum_{k=1}^m \frac{\beta_1^{(k)}(0)}{k!} (t^{2k} - 1), \quad \beta_2(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_2^{(k)}(0)}{k!} (t^{2k} - R^{2k}), \quad /39/$$

де величини m та n залежать від товщини шару h ($\lambda h \leq 6$).

Для визначення радіусів a, b областей контакту використовуємо умови рівноваги штампів:

$$-\frac{P}{2\pi} = a^2 \int_0^1 \sigma_{zz}(z, 0) \rho d\rho; \quad /40/$$

$$-\frac{P}{2\pi} = a^2 \int_0^R \sigma_{zz}(z, h) \rho d\rho. \quad /41/$$

де P - величина стискувальних сил.

І. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Об одной из форм решений уравнений теории упругости // Динамика и прочность машин. 1974. Вып. 19. С.37-42. 2. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Общее представление решений уравнений теории упругости в цилиндрических координатах // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1975. С.35-41. 3. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 11.06.92

Н.П.Флейшман, В.О.Ліхачов

ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ
З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Розглянемо круглу ізотропну пластинку сталої товщини h , край якої підкріплений тонким пружним опорним ребром з іншого матеріалу. На конструкцію діють зовнішні нормальні динамічні напруження $q(t)$. Математичною моделлю цієї осесиметричної задачі стійкості служить рівняння [1].

$$D\Delta\Delta w + hp(t)\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad /1/$$

де $w(z, t)$ - прогин; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ - циліндрична жорсткість; ρ - густина матеріалу пластинки; t - час; Δ - оператор Лапласа в полярних координатах; $p(t)$ - динамічні напруження, які діють з боку ребра на пластинку. Якщо нехтуємо масою ребра, маємо [2]

$$p(t) = q(t)/\delta, \quad /2/$$

де $\delta = 1 + (1-\nu)E_1(F + JR^{-2})/ERh$; E_1 - модуль Юнга матеріалу ребра; R - радіус його осі; F - площа його нормального перетину; J - момент інерції перетину відносно осі, яка збігається з радіусом пластинки.

До рівняння /1/ необхідно додати умови спряження [2]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\nu + \delta_1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = R, \quad /3/$$

де $\delta_1 = E_1 J / RD$, та умови в центрі пластинки:

$$|w| < \infty, \quad \partial w / \partial z = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad /4/$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$w(z, t) = W(z) \cdot T(t),$$

де функції $W(z)$ та $T(t)$ є розв'язками рівнянь:

$$\Delta W + \beta^2 W = 0; \quad /5/$$

$$\ddot{T} + \varphi(t)T = 0. \quad /6/$$

З рівняння /1/ одержуємо

$$\varphi(t) = \beta^2 [D\beta^2 - h\rho(t)] / \rho h. \quad /7/$$

Розв'язком рівняння Бесселя нульового порядку /5/ з урахуванням умов /4/ є

$$W(z) = C J_0(\beta z), \quad /8/$$

де C - довільна стала; J_0 - функція Бесселя дійсного аргументу першого роду. Параметр β визначається з першої умови /3/ як корінь трансцендентного рівняння

$$J_0(\beta R) = 0. \quad /9/$$

Друга умова /3/, очевидно, тотожно задовольняється лише якщо

$$\delta_1 = 1 - \nu. \quad /10/$$

Умова /10/ накладає обмеження на фізико-механічні параметри підкріплювального ребра, для якого функція /8/ є точним розв'язком задачі. Проте зауважимо, що співвідношення /13/ задовольняє доволі широкий клас підкріплювальних ребер, фізико-механічні характеристики яких можуть змінюватися в широкому діапазоні. Крім цього, якщо врахувати, що при збільшенні динамічності навантаження умови закріплення краю пластинки мало впливають на її стійкість [3, 4], то розв'язок /8/ можна застосовувати й тоді, коли величина δ_1 незначно відрізняється від $(1 - \nu)$. Побудований точний розв'язок можна використати як еталон для оцінки точності наближених розв'язків задач динамічної стійкості.

Отже, задача стійкості круглої пластинки з крайовим ребром жорсткості зводиться до дослідження обмеженості розв'язків рівняння /6/-/7/, яке можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 T(\hat{t})}{d\hat{t}^2} + [f - q\varphi_1(\hat{t})] T(\hat{t}) = 0, \quad /11/$$

де

$$\hat{t} = t/t_0; \quad f = \frac{t_0^2 \beta^2}{\rho h} \left(D\beta^2 - \frac{h}{\delta} q_0 \right); \quad q = \frac{t_0^2 \beta^2}{\rho h \delta} q_1;$$

$$q(t) = q_0 + q_1 \varphi_1(\hat{t}); \quad /12/$$

β - найменший корінь рівняння /9/.

Приклад. Розглянемо випадок, коли функція навантаження $\psi, (\hat{t})$ є періодичною функцією кусково-лінійного типу:

$$\psi, (\hat{t}) = \begin{cases} 2\hat{t} - (4n+1), & \hat{t} \in [2n, 2n+1] \\ (4n+3) - 2\hat{t}, & \hat{t} \in [2n+1, 2n+2] \end{cases} \quad /13/$$

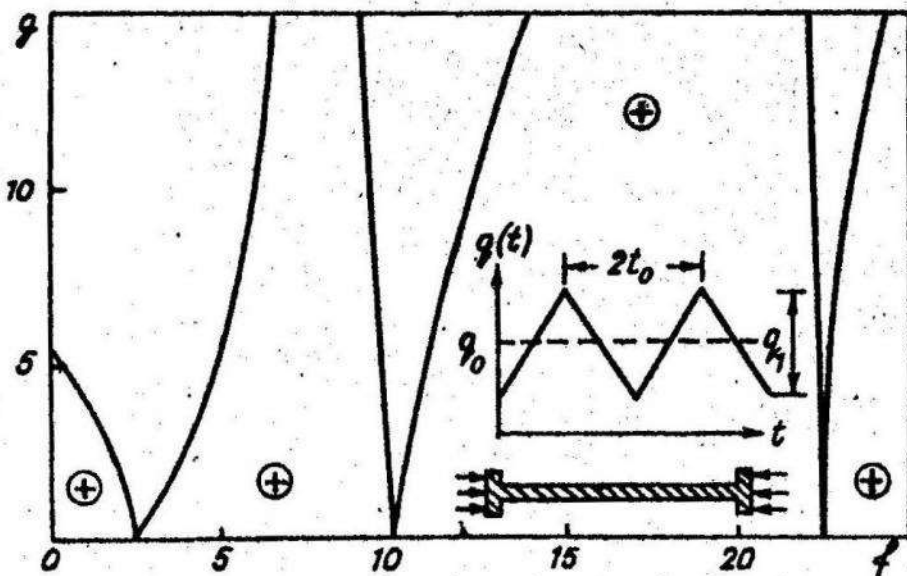
$$(n=0, 1, 2, \dots).$$

Для дослідження обмеженості розв'язку $T(\hat{t})$ рівняння /II/ залежно від параметрів f та q використаємо теорему Флоке [5]. Можна довести, що в цьому випадку, згідно з теоремою Флоке, функція $T(\hat{t})$ обмежена, якщо виконується умова

$$-1 < T_2(1) \cdot T_2'(1) < 0, \quad /14/$$

де $T_1(\hat{t})$ і $T_2(\hat{t})$ - розв'язки рівняння /II/, /13/, які задовольняють початкові умови

$$T_1(0) = 1, \quad T_1'(0) = 0; \quad T_2(0) = 0, \quad T_2'(0) = 1. \quad /15/$$



(т.б., дослідження обмеженості функції $T(\hat{t})$ зводиться до розв'язування задач Коші /II/, /15/ для визначення функцій $T_1(\hat{t})$ і $T_2(\hat{t})$ на відрізку $\hat{t} \in [0, 1]$ та до перевірки виконання умови /14/.

Результати обчислень /методом степеневих рядів/ подані на рисунку. для перших трьох областей нестійкості. Лінії, що обмежують ці області, близькі до прямих. Области стійкості відмічені знаком плюсу. Для значень $q < 0$ області стійкості, очевидно, симетричні відносно осі Ox . Для невеликих значень параметра q , тобто для малих амплітуд q_1 , коливання пластинки стійкі за винятком околів точок $f = (\pi h/2)^2, n = 1, 2, \dots$. Для значень $f < 0$, тобто коли статична частина навантаження перевищує мінімальне критичне навантаження, коливання пластинки, очевидно, будуть нестійкими.

1. А г а м и р о в В.Д. Динамические задачи нелинейной теории оболочек. М., 1990. 2. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. 3. О г а б а - л о в П.М., Г р и б а н о в В.Ф. Термостойчивость пластин и оболочек. М., 1968. 4. С а в и н Г.Н., Ф л е й ш м а н Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., 1964. 5. *Azi-Guz J., Singer J., Weller T. Dynamic buckling of plates under longitudinal impact // J. J. Technol. 1981. Vol. 19. N 1/2. P. 57-64.*

Стаття надійшла до редколегії 11.06.92

З М І С Т

Б а р т і ш М.Я., Ш а х н о С.М. Деякі методи розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів.....	3
Г о л у б Б.М., Щ е р б и н а Ю.М. Чисельне розв'язування задач оптимального керування.....	8
Ж у к М.В. Оцінка швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь.....	14
Н і к о л ь с ь к и й Ю.В. Застосування методу нелінійних інтегральних рівнянь для побудови математичної моделі контакту пластини, що вільно лежить на поверхні пружного напівпростору.....	18
Б у д з І.С., С а в у л а Я.Г. Чисельне розв'язування задач про вільні коливання тонких оболонок з урахуванням початкового навантаження.....	22
Ф л е й ш м а н Н.П. Математичні моделі теплового опра- ження середовищ з тонкими чужорідними прошарками або покрит- тями.....	30
Г а р а с и м Я.С., О с т у д і н Б.А. Розв'язування деяких задач теорії потенціалу в областях зі складною геомет- рією граничних поверхонь на основі алгоритму Шварца.....	35
Д и я к І.І., Ч е р н у х а А.Ю. Чисельне досліджен- ня задачі теорії пружності на основі комбінації методів гра- ничних та скінченних елементів.....	41
Г о л о в а ч Н.П., Д и я к І.І. Чисельне досліджен- ня задачі теплопровідності прямим методом граничних елемен- тів.....	46
Д у д з я н и й І.М., Ц и м б а л В.М. Псевдопараболіч- не рівняння з малим параметром при похідних.....	52
П а у к Н.М. Застосування об'єднаного гранично-скін- ченноелементного аналізу для чисельного розв'язування дво- вимірної задачі теорії пружності.....	55
П у ч к а В.А. Чисельне дослідження впливу крайової особливості розімкнутої поверхні на розв'язок просторової задачі електростатики.....	60
Х а п к о Р.С. Метод квадратур чисельного розв'язу- вання однієї системи інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною особливістю в ядрах.....	66

Зубов В.М., Шинкаренко Г.А. Регуляризація нестационарної задачі гідродинаміки в'язкої нестисливої рідини методом ϵ -апроксимації.....	71
Горlach В.М., Шинкаренко Г.А. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною.1. Ідеальні середовища.....	76
Горlach В.М. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною.2. Середовища з дисипацією.....	82
Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д., Басюні Х.С. Послідовні наближення для однієї мішаної квазілінійної параболічної задачі другого порядку.....	88
Ліхачов В.О., Флейшман Н.П. Осесиметрична деформація пружного шару під дією двох штампів.....	91
Флейшман Н.П., Ліхачов В.В. Динамічна стійкість круглої пластинки з підкріпленням краєм.....	96

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України

Вісник Львівського університету

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

В и п у с к 39

**ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Редактор Е.А.Г л а в а ц ь к а

Художній редактор Е.А.К а м е н ь к и

Технічний редактор С.Д.Д о в б а

Коректор М.Т.Д о м е х а

Підп. до друку 17.09.93. Формат 60x84/16.

Папір офсет. Умовн. друк. арк. 6,04. Умовн. фарбо-відб. 6,27.

Обл.-вид. арк. 6,71. Вид. № 34. Зам. 3033. Замовне.

Видавництво "Світ" при Львівському держуніверситеті.

290000 Львів, вул. Університетська, I

Львівська обласна книжкова друкарня.

290000 Львів, вул. Стефаника, II

У видавництві "Світ"
при Львівському університеті у 1994 р.
вийде друком нова книга:

Г о р о д е ц ь к и й В.В., Н а г н и б і д а М.І. Узагаль-
нені функції. Теорема і задачі. – 20 арк. Мова укр.

У навчальному посібнику розглянуті різні способи задання
топології, властивості просторів нескінченно диференційовних
функцій типу $\mathcal{D}$ та $\mathcal{S}$, основні класи узагальнених функцій,
методи інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа, методи одержан-
ня фундаментальних розв'язків лінійних диференціальних операто-
рів, інтегральних та інтегродиференціальних рівнянь типу
згортки.

Для студентів вузів, які навчаються за спеціальностями
"Математика" та "Прикладна математика" і вивчають курс функціо-
нального аналізу.

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. 1—120.