

МАТЕМАТИКА

УДК 514.54

Т. В. СТРОЧИК

ПРО КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ ПІВСМУГ

Метою цієї статті є виведення асимптотичної формули для функції, що здійснює конформне однолисте відображення півсмуг з деякого класу на прямолінійні півсмуги.

Будемо розглядати півсмуги S певного вигляду. Нехай l — деяка ламана в z -площині без самоперетинів з вершинами $P_0, P_1, P_2, \dots$, $(P_0 \neq \infty)$, кінцем в $z = \infty$, кутами при вершинах $\angle P_{n+1}P_nP_{n-1} = 2\pi\alpha_n$ ($\alpha^* < \alpha_n < 1 - \alpha^*, \alpha^* > 0$), $n = 0, 1, 2, \dots$, на віддалі $\frac{1}{2}$ від кожного відрізка

ламаной вліво і вправо від нього проведемо паралельні до нього прямі. Прямі, паралельні відрізкам $P_{n-1}P_n, P_nP_{n+1}$, перетинаються на бісектрисі $\angle P_{n+1}P_nP_{n-1}$ в точках A_n, B_n (A_n лежить вправо від P_n , B_n — вліво). Припустимо, що бісектриси кутів $\angle P_{n+1}P_nP_{n-1}$ і $\angle P_{n+2}, P_{n+1}, P_n$ перетинаються на віддалі, більшій, ніж $\frac{1}{2}$ від P_nP_{n+1} . Позначимо ламану з вер-

шинами в точках A_n через l^+ , ламану з вершинами B_n — через l^- . Будемо вважати, що ламані l^+, l^- і відрізок A_0B_0 обмежують деякий жорданів трикутник S , який називатимемо півсмугою з сталою шириною 1^* . Півсмугу S можна розглядати як множину, яка складається з об'єднання зчисленної множини трапецій $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$, які ми позначимо через T_n , з середньою лінією P_nP_{n+1} , висотою 1 і спільними бічними сторонами. Припустимо, що в кожному трапецію T_n можна вписати прямокутники з висотою 1 і основами, що лежать на основах T_n . Нехай d_n — довжина основи найбільшого такого прямокутника. Припустимо, що

$d_n \geq d, n = 0, 1, 2, \dots$. Нехай $b'_n = \frac{1}{3} \min \{d_{n-1}, d_n\}, b'_0 = \frac{1}{3} d_0, C''_n$ — прямо-

кутна трапеція, що лежить в T_n , має своїми вершинами точки A_n, B_n , висоту 1 і довжину меншої основи b'_n, b_n — довжина основи C''_n , що лежить на l^- ($b_n = b'_n$, якщо $\alpha_n \geq \frac{1}{2}$, $b_n = b'_n + \operatorname{tg} \pi \beta_n$, якщо $\alpha_n < \frac{1}{2}$, де $\beta_n = \frac{1}{2} - \alpha_n$), причому всі b_n обмежені знизу деяким числом $b, b \geq \frac{\alpha}{3} > 0$.

Позначимо, крім цього, через C'_n трапецію, суміжну з C''_n , що лежить в T_{n-1} , і має такі ж розміри, що й C''_n . Трапеція T_n складається з двох прямокутних трапецій C''_n, C'_{n+1} і прямокутника G_n , довжину основи якого

* Півсмугу S з сталою шириною можна було б визначити як деяку ріманову поверхню, не вимагаючи відсутності самоперетинів l^+ і l^- .

позначимо через a_n . З кожною точкою A_n зв'яжемо локальну декартову систему координат з початком в A_n і осями x_n, y_n такими, щоб додатний напрям осі x_n збігався з напрямом відрізка $A_n A_{n+1}$.

Теорема. Якщо β_n і b_n такі, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_n|}{e^{\pi b_n (1-\epsilon)}} < \infty, \quad (1)$$

при деякому $\epsilon > 0$, то функція $w = w(z)$, що здійснює конформне і одностороннє відображення S на $S_0 = \{u > 0, 0 < v < 1\}$, $w = u + iv$, має вигляд

$$w(z_n) = \begin{cases} \lambda + D_{n-1} + M_n - b_n + z_n + O(1), & \text{якщо } z_n \in G_n; \\ \lambda + D_{n-1} + f(z_n) + O(1), & \text{якщо } z_n \in C_n; \\ \lambda + D_{n-1} + f(\overline{z_n} l^{2ia_n}) + O(1), & \text{якщо } z_n \in C'_n, \end{cases}$$

де λ — деяка дійсна стала, $O(1)$, рівномірно прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$,

$$f(z_n) = \frac{i \sqrt{1+q_n}}{2K(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}})} \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+q_n)}},$$

z_n і s зв'язані між собою співвідношенням ($z_n \in C'_n + C_n$, $s \in \{\operatorname{Im} s \geq 0\}$):

$$z_n = \frac{i \sqrt{1+q_n}}{\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, \frac{q_n}{1+q_n}\right)} \int_0^s t^{-\frac{1}{2} - \beta_n} (t-1)^{-\frac{1}{2}} (t+q_n)^{-\frac{1}{2} + \beta_n} dt;$$

спеціальні функції $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(k, \varphi)$, $K(k)$ мають той же зміст, що і в [3], M_n — модуль C_n , q_n — визначається з рівності

$$M_n = K\left((1+q_n)^{-\frac{1}{2}}\right) / K\left(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}}\right);$$

$$D_n = \sum_{k=0}^n (M_k + a_k + M_{k+1}), \quad D_{-1} = 0.$$

Варшавським [1] виведена асимптотична формула для функції, що здійснює конформне відображення, при умовах, які в нашому випадку

зводяться до вимоги, щоб $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n| < \infty$. Очевидно, умову (1) задовольняє

більш широкий клас півсмуг.

Відзначимо, що величини β_n, q_n, b_n зв'язані між собою співвідношенням

$$b_n = \frac{(1+q_n)^{\beta_n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta_n\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \beta_n, 1 - \beta_n, \frac{1}{1+q_n}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \beta_n) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, \frac{q_n}{1+q_n}\right)} = \varphi(q_n, \beta_n).$$

Тому що b_n обмежені знизу додатною сталою b , то q_n , що є відрізками на дійсній осі площини s , в які переходять відрізки b_n при конформному відображенні за формулою Кристофеля—Шварца (модуль M_n обмежений знизу), обмежені зверху певним числом Q .

Д о в е д е н н я. На основі прямокутника G_n від її кінців відкладемо відрізки довжиною h , $h > 0$, $2h > a_n$. Таке h можна вибрати, тому що

довжини основ T_n обмежені знизу. Прямокутник з висотою l і основою h позначимо через H з тими самими індексами, що й суміжна з ним прямокутна трапеція. Нехай $G_n^* = G_n - H_n' - H_{n+1}'$. Відобразимо квазіконформно S на півсмуку S_1 в комплексній площині $\zeta = \xi + i\eta : \{0 < \xi < R \leq \infty, 0 < \eta < 1\}$ так, щоб кожний шестикутник $H_n' + C_n' + C_n'' + H_n'' + G_n^*$ перейшов в прямокутник $\{D_{n-1} - h - M_n < \xi < D_n - h - M_{n+1}, 0 < \eta < 1\}$ площини за допомогою функції $\zeta(z_n)$:

$$\zeta(z_n) = \begin{cases} D_{n-1} - \overline{\Phi(z_n e^{2ia_n})}, & \text{якщо } z_n \in H_n'; \\ D_{n-1} - \overline{f(z_n e^{2ia_n})}, & \text{якщо } z_n \in C_n'; \\ D_{n-1} - \overline{f(z_n)}, & \text{якщо } z_n \in C_n''; \\ D_{n-1} - \Phi(z_n), & \text{якщо } z_n \in H_n''; \\ D_{n-1} + M_n - b_n + z_n, & \text{якщо } z_n \in G_n^*. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2_1) \\ (2_2) \\ (2_3) \\ (2_4) \\ (2_5) \end{matrix}$$

Тут

$$\Phi(z_n) = x_n + i \left[y_n + \frac{b_n + h - x_n}{h} \left(\frac{F(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}}, \gamma(p_n))}{K(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}})} - y_n \right) \right],$$

а y_n зв'язане з p_n співвідношенням

$$y_n = \frac{2(1+q_n)^{\beta_n}}{\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, q_n/(1+q_n)\right)} \int_0^{\gamma(p_n)} \left(1 - \frac{q_n}{1+q_n} \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2} + \beta_n} d\varphi.$$

де

$$\gamma(p_n) \arcsin \left((p_n - 1)^{\frac{1}{2}} p_n^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Кожна з функцій (2) відображає відповідний чотирикутник із S на прямокутник із S_1 , причому прямокутники, одержані внаслідок відображення суміжних чотирикутників, суміжні, і відповідні функції на суміжних сторонах чотирикутників співпадають. Функції (2₂), (2₃), (2₅) здійснюють конформне відображення, решта — квазіконформне. Півсмуку S_1 відобразимо квазіконформно на S_0 за допомогою функції $w(z_n(\zeta))$. Якщо при цьому характеристика $p(\zeta)$ така, що

$$\iint_{S_1} (p(\zeta) - 1) d\xi d\eta < \infty,$$

то, згідно з теоремою Тейхмюллера—Белінського ([2], див. також [4]) при $n \rightarrow \infty$, маємо $R = \infty$ і

$$w(z) = \lambda + \zeta(z) + o(1),$$

де λ — деяка дійсна стала.

Тому що відображення S на S_0 конформне, то $p_{w/\zeta} = p_{z/\zeta} = p'(\zeta)$ і

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (p(\zeta) - 1) d\xi d\eta &= \iint_S (p(z_n) - 1) \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} dx dy < \\ &< 2 \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{H_n} (p(z_n) - 1) \frac{D(\xi, \eta)}{D(x_n, y_n)} dx_n dy_n. \end{aligned}$$

Оцінімо кожен з інтегралів останньої суми. Для знаходження похідних $\xi_{x_n}, \xi_{y_n}, \eta_{x_n}, \eta_{y_n}$ будемо користуватися формулами (24) (де індекс n для зручності будемо пропускати). Одержуємо

$$\xi_x = 1; \xi_y = 0;$$

$$\eta_x = \frac{1}{h} \left\{ \frac{F\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}, \gamma(p)\right)}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} - y \right\} = f_2^*(p);$$

$$\eta_y = 1 + \frac{x}{h} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta, 1, q/(1+q)\right)}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \left(\frac{p}{p+q}\right)^\beta - 1 \right\} = 1 + \frac{x}{h} f_1^*(p);$$

$$\xi_x - \eta_y = -\frac{x}{h} f_1^*(p); \quad \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y = 1 + \frac{x}{h} f_1^*(p).$$

Розглянемо функції $f_1^*(p)$ і $f_2^*(p)$ на $[1, \infty)$. Нехай $\lim_{p \rightarrow \infty} (p) = f_1^*(\infty)$. Функція $f_1^*(p)$ монотонно зростає на $[1, \infty)$, тому $\max_{p \in [1, \infty)} |f_1^*(p)|$ досягається на кінцях цього проміжка. Ми маємо

$$\begin{aligned} f_1^*(1) &= \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)(1+q)^\beta} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(1+q)^\beta} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)(1+q)^\beta} \times \\ &\quad \times \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi; \\ f_1^*(\infty) &= \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} - 1 = \\ &= \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi. \end{aligned}$$

Якщо $\alpha \leq \frac{1}{2}, \beta \geq 0$, то $f_1^*(1) \leq 0, f_1^*(\infty) \geq 0$; якщо ж $\alpha > \frac{1}{2}, \beta < 0$, то $f_1^*(1) > 0, f_1^*(\infty) < 0$. Тому

$$|f_1^*(p)| \leq \max \left\{ \frac{1}{(1+q)^\beta} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi \right|, \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \right\},$$

$$\left| \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi}{K(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}})} \right| \leq \frac{|(1+q)^{-\beta} - 1|}{K(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}})} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} \leq C_1 |1 - (1+q)^{-\beta}| \leq C_2 q |\beta|$$

(через C з індексами будемо позначати додатні сталі, які не залежать від n). Нехай $N(q, \beta) = \frac{\pi}{2} K(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta, 1, \frac{q}{1+q}\right)$, тоді

$$|f_2^*(p)| = \frac{1}{N(q, \beta)} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} \int_0^{\gamma(p)} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\gamma(p)} \frac{(1+q)^\beta d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} - \beta}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \right| =$$

$$= \frac{1}{N(q, \beta)} \left| F\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}, \gamma(p)\right) \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} - \right. \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \right] + K\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right) \times$$

$$\times \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^{\gamma(p)} \frac{(1+q)^\beta d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} - \beta}} \right] \leq \frac{1}{N(q, \beta)} \times$$

$$\times \left\{ F\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}, \gamma(p)\right) \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\beta} - 1}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| + \right.$$

$$\left. + K\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right) \left| \int_0^{\gamma(p)} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| \right\} \leq \frac{K\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right)}{N(q, \beta)} \times$$

$$\times \left\{ \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\beta} - 1}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| + \left| \int_0^{\gamma(p)} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| \right\}.$$

Якщо $\beta \geq 0$, то $\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\beta} - 1 \geq 0$, $1 - (1 + \cos^2 \varphi)^\beta \leq 0$,
тому

$$|f_2^*(p)| \leq \frac{2[(1+q)^\beta - 1]}{\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}-\beta} d\varphi} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \leq \\ \leq 2[(1+q)^\beta - 1].$$

Аналогічним міркуванням при $\beta < 0$ одержуємо, що $|f_2^*(p)| \leq 2[(1+q)^{-\beta} - 1]$. Таким чином,

$$|f_2^*(p)| \leq 2[(1+q)^{|\beta|} - 1] \leq C_2 q |\beta|.$$

Тепер

$$\iint_{H_n^*} (p(z_n) - 1) \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} dx dy \leq \int_0^h \int_0^1 \left[\frac{x^2}{h^2} f_1^*(p) + f_2^*(p) \right] dx dy + \\ + \int_0^h \int_0^1 \left| \frac{x}{h} f_1^*(p) + f_2^*(p) \right| \left(1 + \frac{x}{h} f_1^*(p) \right) dx dy \leq C_3 q |\beta|.$$

Отже,

$$\iint_{S_1} (p(\zeta) - 1) d\xi d\eta \leq C \sum_{n=0}^{\infty} q_n |\beta_n|.$$

При $q_n \rightarrow 0$ $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, \frac{q_n}{1+q_n}\right) \rightarrow 1$ (див. [3]),

$$F\left(\frac{1}{2} - \beta_n, \frac{1}{2}, 1 - \beta_n, \frac{1}{1+q_n}\right) \sim \frac{\Gamma(1 - \beta_n)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta_n\right)} \ln\left(1 + \frac{1}{q_n}\right).$$

Отже, при $q_n \rightarrow 0$ маємо $\pi b_n \sim -\ln q_n$ рівномірно відносно β_n . В силу неперервності для довільного $\varepsilon > 0$ і достатньо малих q_n , $q_n \leq q_0$ має місце

$$q_n < C \exp[\pi b_n (1 - \varepsilon)]. \quad (3)$$

Покажемо, що існує така стала $C_0 \geq C$, що для всіх $q_n \in (0, Q)$ ($Q < \infty$) виконується $q_n < C_0 \exp[\pi b_n (1 - \varepsilon)]$. Нехай $L = \max \varphi(x, y)$ при $q_0 \leq x \leq Q$,

$|y| \leq \frac{1}{2} - \alpha^*$. Тоді в області $\left\{q_0 < q_n < Q, \left|\beta_n\right| < \frac{1}{2} - \alpha^*\right\}$ виконується нерівність $q_n < Q \leq Q \exp[\pi(L - b_n)(1 - \varepsilon)]$. За C_0 можна взяти величину $Q \exp[\pi L(1 - \varepsilon)]$. Враховуючи це, одержуємо

$$\iint_{S_1} (p - 1) d\xi d\eta < C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_n|}{e^{\pi b_n (1 - \varepsilon)}}.$$

Останній ряд збігається внаслідок (1).

На закінчення висловлюю подяку А. А. Гольдбергу за допомогу і керівництво цією роботою.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Е. Варшавский. Конформное отображение бесконечных полос. Сб. переводов «Математика», 2, № 4 (1958).
 2. П. П. Белинский. Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке. Уч. зап. Львов. ун-та, 29, сер. мех.-матем., вып. 6 (1954).
 3. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. I. Пер. с англ. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
 4. А. А. Гольдберг, Т. В. Строчик. Конформное отображение симметричных полуполос и угловых областей. Лит. мат. сб., 6, № 2 (1966).
-