ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.512

У. А. МИШКОВЕЦЬ

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СПЕКТРАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглядається простір комплекснозначних функцій на дійсній прямій, які задовольняють таким умовам:

I. $$\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}=\|f\|<\infty.$$

II. Спектральна функція

$$A_f(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

визначена для всіх дійсних чисел $\lambda\in(-\infty,\infty)$.

Звичайним шляхом доводиться, використовуючи нерівність Бесселя, що спектральна функція $A_f(\lambda)$ відмінна від нуля не більше як на зчисленій множини значень аргументу λ.

Множина комплекснозначних чисел $A_f(\lambda_n)\neq 0$ називається коефіцієнтами Фур'є—Бора, а дійсні числа λ_n — показниками Фур'є—Бора.

Функціям, які задовольняють умовам I, II, ставиться у відповідність ряд Фур'є—Бора

$$f(x)\sim\sum_{(n)}A_f(\lambda_n)\,e^{i\lambda_n x}.$$

Теорема. Спектральна функція $A_f(\lambda)$ задовольняє нерівність

$$|A_f(\lambda)-A_f(\lambda_0)|\leqslant\sqrt{2}\,\|f\|, \tag{1}$$

де λ_0 — довільно фіксоване.

Доведення. З нерівності Буняковського—Шварца

$$|A_f(\lambda)-A_f(\lambda_0)|=\left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(e^{-i\lambda x}-e^{-i\lambda_0 x})\,f(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|e^{-i\lambda x}-e^{-i\lambda_0 x}|^2\,dx\right\}^{1/2}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}$$

та рівності $|e^{-i\lambda x}-e^{-i\lambda_0 x}|^2=2\,[1-\cos(\lambda-\lambda_0)\,x]$ одержуємо нерівність (1).

Н а с л і д о к 1. Якщо $\|f\|=0$, то $A_f(\lambda)\equiv 0$. Справді, при цій умові маємо $A_f(\lambda)\equiv A_f(\lambda_0)$. Якщо $\lambda_0=0$, то

$$|A_f(0)|=\left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,dx\right|\leqslant\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2dx\right\}^{1/2}=\|f\|=0.$$

Тому $A_f(\lambda)\equiv A_f(0)$.

Н а с л і д о к 2. Якщо $A_f(\lambda)\not\equiv 0$, то $\|f\|>0$.

Цей факт очевидний і очевидно, що наслідки 1 і 2 є еквівалентні.

Н а с л і д о к 3. Якщо $\|f-g\|=0$, то $A_f(\lambda)-A_g(\lambda)\equiv 0$.

Позначимо через $A_h(\lambda)$ спектральну функцію різниці $h(x)=f(x)-g(x)$. З нерівності (1) будемо мати

$$|A_h(\lambda)-A_h(\lambda_0)|\leqslant\sqrt{2}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|h(x)|^2dx\right\}^{1/2}=\sqrt{2}\,\|f-g\|.$$

Якщо $\|f-g\|=0$, то дійсно $A_h(\lambda)=A_f(\lambda)-A_g(\lambda)\equiv 0$.

Н а с л і д о к 4. Для того, щоб ряди Фур'є—Бора функцій $f(x)$ і $g(x)$ не співпадали, необхідною умовою є виконання нерівності $\|f-g\|>0$.