ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 513.015.2

Г. Л. БУЙМОЛА

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРАЦЯХ РАДЯНСЬКИХ ВЧЕНИХ

Одну з яскравих сторінок в історії вітчизняної проективної геометрії вписали видатні російські геометри К. О. Андреєв (1848—1921) і О. К. Власов (1868—1922). Відомий радянський вчений і педагог Д. Ф. Єгоров вважав, що К. О. Андреєв як проективіст не мав собі рівних серед російських математиків, а його докторська дисертація повинна бути «настольною книгою для всякого російського геометра» [1].

О. К. Власов перший очолив радянську школу синтетичної і в першу чергу проективної геометрії і керував нею до 1922 року.

Найвидатнішим радянським геометром синтетичного напряму був Н. О. Глаголєв (1888—1945). Протягом багатьох років він керував науковим семінаром з синтетичної геометрії при інституті математики Московського державного університету. У своїх роботах Н. О. Глаголєв опрацював теорію проективного числення (числення вурфів) і розв'язав задачу побудови всіх алгебраїчних комутативних тіл, елементами яких є точки або групи точок простору, причому арифметичні дії виконуються за допомогою проективних перетворень.

Н. О. Глаголєв визначає проективну дію над вурфами як колінеарне перетворення з деякої групи перетворень. Ставлячи вимогу, щоб кожна проективна дія підлягала комутативному і асоціативному законам, Глаголєв показує, що всі колінеації цієї групи мають спільні подвійні точки. Якщо ж одна проективна дія π підлягає розподільному закону відносно другої σ, то всі колінеації групи σ є гомології з спільною площиною, яка проходить через всі подвійні точки колінеації π, крім одної, яка є модулем проективної дії. Н. О. Глаголєв називає дію σ проективним додаванням, а дію π — проективним множенням і показує, що проективному додаванню відповідає лише один тип колінеацій і проективному множенню — чотири типи. Він побудував різні системи проективних гіперкомплексних чисел, що відповідають різним типам множення. Ним розглянуте також питання проективного числення для випадку n-вимірного простору.

Декілька робіт Н. О. Глаголєва присвячено питанням аксіоматики геометрії, в яких він показує, що симетрична система аксіом сполучення Енріквеса, яку здебільшого кладуть в основу проективної геометрії, недостатня для побудови на ній проективної геометрії і дає приклад такої геометричної системи, в якій всі аксіоми Енріквеса мають місце, але не мають місця дальші геометричні твердження. Так, пряма, що має дві спільні точки з площиною, може і не належати цій площині. Н. О. Глаголєв запропонував нову уточнену систему аксіом. Перша група цих аксіом увійшла в його підручник «Проективна геометрія», в якому запропоновані ним аксіоми подано в пунктах а, в і 5. В роботах

1936 р. Н. О. Глаголєв показав, що аналогічно теоремі Гільберта про властивості проективної площини (недоведеність теореми Дезарга без просторових аксіом) лінійна конгруенція, взята окремо від лінійного комплексу, втрачає свої проективні властивості, а саме: можна побудувати конгруенцію, що має властивості лінійної конгруенції [2].

Розвиток аналітичних методів проективної геометрії і побудова на базі їх комплексної проективної геометрії поставили перед наукою задачу про залежність тих чи інших проективних властивостей від того поля, над яким побудована геометрія. Великих успіхів у розв'язанні цього питання досягли радянські математики А. Н. Колмогоров і Л. С. Понтрягін. В їх працях висвітлюється питання аксіоматичної побудови проективної геометрії. А. Н. Колмогоров (1936), користуючись результатами Л. С. Понтрягіна, побудував аксіоматику проективної геометрії, чітко виділяючи її топологічну сторону. При цьому аксіоми порядку і неперервності в проективній геометрії просто і безпосередньо зводяться до звичайних аксіом топологічного простору. Вказані аксіоми визначають один з двох проективних просторів: дійсний або комплексний. Доведення грунтується на даній Л. С. Понтрягіним тополого-алгебраїчний характеризації полів дійсних і комплексних чисел.

Велике значення мають також роботи П. К. Рашевського з аксіоматики двовимірної проективної геометрії [3, 4]. Він доводить твердження, назване ним теоремою про єдність проективної геометрії на площині.

Аксіом належності, аксіом порядку і неперервності недостатньо, щоб побудувати звичайну проективну геометрію на площині, бо вони не визначають ще поведінки прямих, і будь-яка сім'я V^2 замкнутих (що самі себе не перетинають) ліній на площині, які попарно перетинаються в одній точці і що сполучають будь-які дві точки площини, задовольняють такій аксіоматиці. Щоб відокремити випадок «справжніх» проективних прямих, треба приєднати ще аксіому Дезарга, яка стверджує, що коли конфігурація Дезарга 10_3 здійснена з всіма, що вимагаються нею, інцидентностями, крім, може, однієї, то ця остання інцидентність автоматично має місце. Автор доводить, що всяка спроба організувати сукупність прямих на площині за принципом обов'язкового замикання деякої конфігурації автоматично обов'язково дає нам геометрію з аксіомою Дезарга або Паппа. Формульований результат вірний не лише при наявності звичайних аксіом порядку і неперервності, але й далеко більш загальних твердженнях. П. К. Рашевський розглянув плоскі проективні геометрії, побудовані за допомогою аксіом зв'язку і одної з конфігураційних аксіом, відмінних від аксіом Дезарга і Паппа.

До цього напряму досліджень радянських геометрів в галузі проективної геометрії належать роботи Д. З. Гордевського (1953). Він розглядає інтерпретації геометрії тривимірного проективного простору за допомогою кіл у конформній площині на базі інверсій відносно кола дійсного, уявного, нульового або нескінченно великого радіуса. Проективні аксіоми зв'язку, порядку і неперервності здійснюються в запропонованій інтерпретації. Введення абсолюта дозволяє також інтерпретувати геометрію Лобачевського і Рімана. Тут будується інтерпретація чотиривимірного проективного простору за допомогою куль у тривимірному конформному просторі. Д. З. Гордевський запропонував в 1957 р. нову систему аксіом інцидентності багатовимірного проективного простору, без обмеження числа вимірів простору, а також систему аксіом інцидентності n-вимірного проективного простору.

Одним з видатних геометрів синтетичного напряму нашого часу є О. О. Глаголєв. Його роботи присвячені теорії інволюцій вищих порядків (1936—1946), дослідженню кривих третього і четвертого порядку, питанням, зв'язаним з геометричними роботами Бурместра, та іншим проблемам [5]. Робота [6] О. О. Глаголєва є продовженням і дальшим розвиненням досліджень О. К. Власова, що стосуються многозначних відповідностей. Теорія кубічної полярної системи, запропонована О. К. Власовим, дуже складна. На шляху відшукання більш простої виникла потреба знайти нове синтетичне визначення спряженості двох трійок точок незалежно від поняття кубічної інволюції I_3^2.

Глаголєв дав нове синтетичне означення спряженості двох трійок точок, незалежне від поняття кубічної полярної системи. Грунтуючись на цьому означенні, О. О. Глаголєв не лише побудував досить просту синтетичну теорію інволюції I_3^2, але й поширив саме поняття спряженості двох трійок точок. А саме, він ввів нове поняття про спряженість двох трійок точок відносно конічного перерізу M^2. Це дало можливість О. О. Глаголєву узагальнити ряд класичних теорем відносно кубічної полярної системи, що в свою чергу дозволило істотно поширити сферу застосування теорії кубічних інволюцій до розв'язання задач лінійної геометрії тривимірного простору. Основні результати, одержані ним в цьому напрямі, такі.

Дається проста побудова, що встановлює взаємно однозначну відповідність поміж точками простору і трійками точок конічного перерізу C^2. Полярна відповідність має такі особливості: точкам прямої простору відповідають трикутники, описані навколо C^2 і вписані в один і той самий конічний переріз, який можна вважати відповідним прямій простору; усім же прямим простору буде відповідати ∞^4 конічних перерізів, що утворюють деяку нелінійну квадратичну систему, яку О. О. Глаголєв позначає буквою T. Оскільки конічні перерізи системи T відображаються в прямій простору, то взаємно однозначна відповідність між конічними перерізами системи T відображається у взаємно однозначну відповідність між прямими простору. Якщо між кривими системи T за допомогою деякого конічного перерізу M^2 установлена взаємно однозначна відповідність, то виявляється, що в цій відповідності існує ∞^3 кривих, які самі собі відповідають. Ці самі собі відповідні криві системи T відображаються в просторі в ∞^3 прямих, що утворюють лінійний комплекс. Це дозволило О. О. Глаголєву звести задачі, що стосуються теорії лінійних систем лінійних комплексів, до задач, що стосуються теорії тангенціальних лінійних систем конічних перерізів, розроблених О. К. Власовим. Тим самим О. О. Глаголєв одержав просту синтетичну теорію лінійних систем лінійних комплексів. Спираючись на узагальнені ним теореми Шаля і Кремона про два і три проективні пучки алгебраїчних кривих, що лежать в одній площині, на випадок, коли ці пучки зведені до алгебраїчної многозначної відповідності, він дав загальний метод побудови кремонової відповідності на площині і в просторі. Крім того, О. О. Глаголєв довів деякі узагальнені ним теореми Бурместра і дав простий спосіб побудови точок Бурместра.

Питання про многозначні відповідності в проективній геометрії розглядала А. І. Мандзюк. Вона дала (1938) критичний огляд робіт К. О. Андреєва, О. К. Власова і О. О. Глаголєва, що стосуються многозначних відповідностей, і одночасно виклала нові доповнення до цих робіт.

Ще в 1910 р. Д. Д. Мордухай-Болтовськой довів, що коли перетнути алгебраїчну криву k-го порядку кривими m-го порядку, що належать пучку з m нескінченно віддаленими центрами, то геометричне місце середин арифметичних центрів точок перетину є пряма l. В 1926 р. він розглянув цю ж теорему більш детально для випадку $k=3$; $m=2$ і дав для цього окремого випадку ряд нових теорем відносно l, яку він назвав квадратичним діаметром кривої 3-го порядку. Всі ці теореми

Д. Д. Мордухай-Болтовського з більш загальної точки зору були розглянуті А. І. Мандзюк у 1936—1938 роках.

За останнє десятиріччя з'явилося багато робіт радянських геометрів, присвячених розробці ідей К. О. Андреєва, О. К. Власова, Н. О. Глаголєва, О. О. Глаголєва, Д. Д. Мордухай-Болтовського. Це, зокрема, роботи А. І. Мандзюк, С. С. Бюшгенса, Л. А. Спіциної, Е. С. Столової, Р. С. Лаврової, М. П. Лащенова, П. К. Бельтюкова, В. А. Маневича. Роботи Маневича (1956—1958) являють собою розвиток досліджень А. К. Власова. Вивчаючи довільну колінеарну відповідність, задану трьома головними точками U_1, U_2, U_3 і парою відповідних прямих (або точок), В. А. Маневич показав, що будь-яку систему колінеацій можна розглядати як полярну систему деякого пучка конічних перерізів, причому цей пучок не є єдиним, і що всяку коррелятивну відповідність можна розглядати як добуток трьох полярних відповідностей. Він розв'язав задачу про зображення колінеацій у просторі у вигляді добутку двох полярних відповідностей. Тут він дає визначення пучка поверхонь 2-го порядку як сукупності таких поверхонь 2-го порядку, які проходять через просторову криву γ^4 четвертого порядку, і доводить еквівалентність цього означення з означенням пучка поверхонь 2-го порядку А. К. Власова.

Деякі дослідження радянських вчених присвячені уточненню і узагальненню класичних теорем проективної геометрії і конфігурацій. С. С. Бюшгенс (1955) дає нове доведення теореми О. К. Власова про асоційовані п'ятірки площин у чотиривимірному просторі і узагальнення на n-вимірний простір.

Узагальненням теореми Паскаля займався ряд авторів: М. П. Черняєв (1951), Д. Д. Мордухай-Болтовськой (1953), Т. Г. Івніцький (1956—1957) та ін. Т. Г. Івніцький узагальнює на n-вимірний простір теорему Паскаля про шестикутник, вписаний у криву 2-го порядку. Б. Н. Саморуков у 1953 р. дає нове синтетичне доведення теореми Шаля, аналога теореми Паскаля для тривимірного простору. М. П. Черняєв у статті [7] дає узагальнення теореми Андреєва—Шретера. Якщо у дев'ятикутникові, описаному навколо конічного перерізу, сполучити прямими лініями по порядку кожну вершину з наступною після двох пропущених, то точки перетину кожної з цих прямих з наступною в тому ж круговому порядку лежать на деякій кривій 3-го порядку. Має місце дуальна теорема. Узагальненням теорем Чеві і Менелая займалися М. П. Черняєв (1939), Н. М. Бескін (1956) та ін. Н. В. Наумович (1956) дає узагальнення теореми Штаудта, одержане за допомогою багатовимірної нарисної геометрії.

З. А. Скопець у 1951 р. зробив узагальнення теореми Дезарга про інволюції, а М. Ф. Четверухін у 1962 р. розглядає питання про пари трикутників і теорему Дезарга. Прямі, що проходять через відповідні вершини двох негомологічних трикутників, визначають лінійну поверхню другого порядку. Відповідні сторони трикутників визначають на прямій перетину їх площин два проективні ряди. Доводиться, що подвійні елементи цих рядів є точки перетину їх носія з вказаною вище поверхнею.

Д. З. Гордевський (1957) розглянув узагальнення конфігурації 4^4_{-1} —1 чотиривимірного простору на шестивимірний і восьмивимірний простори, а потім і на довільний паристовимірний проективний простір. Вивчається структура одержаної конфігурації $4^{2k}_{-1}k—1$, утвореної $(k—1)$-вимірними просторами загального положення, розміщеними в $2k$-вимірному проективному просторі.

З. А. Скопец (1963) дослідив задачу про відображення чотиривимірного простору на тривимірний за допомогою норм кривої C_4. Результат використовується при доведенні теореми про те, що коли точки перетину прямої з сторонами трикутника, вписаного в криву 2-го порядку, спроектувати на криву із точки, що належить кривій, то трикутник, утворений дотичними до кривої в одержаних точках, і даний трикутник перспективні.

ЛІТЕРАТУРА

1. К. А. Андреев. О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий. Мат. сб., 9, 1879.
2. Н. А. Глаголев. О проективных свойствах линейных конгруэнций. Труды Всесоюзн. съезда мат., т. II, 1936.
3. П. К. Рашевский. О единственности проективной геометрии плоскости. Мат. сб., 8 (50), 1940.
4. П. К. Рашевский. О проективной геометрии с новыми конфигурационными аксиомами. Мат. сб., 8 (50), 1940.
5. А. А. Глаголев. Чисто геометрическое определение инволюции третьего порядка, Труды II мат. съезда, т. 1, 1936.
6. А. А. Глаголев. Новое определение кривой 3-го порядка ДАН СССР, 53, 1946.
7. М. П. Черняев. Обобщение теоремы Андреева—Шретера. Тр. секции теор. и инж. графики. Ростов, 1961.