УДК 517.512

Г. П. ГУБАНОВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

ПРО ЛІНІЙНІ ПРОЦЕСИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ, НАЙКРАЩИМИ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

§ 1. Нехай H_ω є клас неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які задовольняють умову

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\omega(|x_1-x_2|),$$

де $\omega(t)$ — заданий модуль неперервності.

У випадку $\omega(t)=Kt^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ відповідний клас функцій позначаємо через KH^α. Нехай

$$T_n(f;\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— тригонометричний поліном $(n-1)$-го порядку, найкращий в системі рівновіддалених точок $x_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ n)$.

Розглянемо лінійний процес наближення

$$U_n(f;\ x,\ \Lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n-1)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

побудований на основі полінома $T_n(f;x)$ за допомогою трикутної матриці чисел $\Lambda=\{\lambda_k^{(n-1)}\}$ $(k=0,\ 1,\ldots,\ n;\ \lambda_0^{(n-1)}=1,\ \lambda_n^{(n-1)}=0;\ n=1,\ 2,\ldots)$.

Позначимо

$$E_n(KH^{(\alpha)};\ x,\ \Lambda)=\sup_{f\in KH^{(\alpha)}}|f(x)-U_n(f;\ x,\ \Lambda)|;$$

$$E_n(H_\omega;\ x,\ \Lambda)=\sup_{f\in H_\omega}|f(x)-U_n(f;\ x,\ \Lambda)|.$$

Теорема 1. Якщо матриця $\{\lambda_k^{(n-1)}\}$ $(k=0,\ 1,\ldots,\ n;\ \lambda_0^{(n-1)}=1,\ \lambda_n^{(n-1)}=0)$ при всіх n опукла відносно k, тобто $\Delta^2\lambda_k^{(n-1)}\leqslant 0$, а $1-\lambda_1^{(n-1)}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, то при $0<\alpha<1$ рівномірно відносно x і n справедлива асимптотична рівність

$$E_n(KH^{(\alpha)};\ x,\ \Lambda)=\frac{K|\sin nx|}{\pi^{1-\alpha}n^\alpha}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k^{(n-1)}}{n-k}\right|+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

причому

$$E_n\left(KH^{(\alpha)};\ \frac{k\pi}{n},\ \Lambda\right)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Теорема 2. Якщо матриця $\{\lambda_k^{(n-1)}\}$ $(k=0,\ 1,\dots,\ n;\ \lambda_0^{(n-1)}=1,\ \lambda_n^{(n-1)}=0)$ така, що при всіх n система чисел $\nu_k^{(n-1)}=\dfrac{1-\lambda_k^{(n-1)}}{k}$ $(k=1,\ 2,\dots,\ n;$ $\nu_0^{(n-1)}=0)$ не спадає і вгнута відносно k, тобто $\Delta\nu_k^{(n-1)}\leqslant 0,\ \Delta^2\nu_k^{(n-1)}\geqslant 0$, то для заданої мажоранти ω рівномірно відносно x і n має місце асимптотична рівність

$$E_n(H_\omega;\ x,\ \Lambda)=\frac{1}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k^{(n-1)}}{n-k}\right|+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

причому

$$E_n\left(H_\omega;\frac{k\pi}{n},\ \Lambda\right)=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Зауваження 1. При $\lambda_k^{(n-1)}=1$ теореми 1 і 2 доведені В. М. Оловянішніковим у роботі [1].

Зауваження 2. Для інтерполяційних поліномів аналогічні результати були одержані в роботі [2].

§ 2. Позначимо через H_{ω_1,ω_2} клас неперервних 2π-періодичних відносно x та y функцій $f(x,y)$, які задовольняють умови

$$|f(x_1,\ y_1)-f(x_2,\ y_2)|\leqslant\omega_1(|x_1-x_2|)+\omega_2(|y_1-y_2|);$$
$$|f(x_1,\ y_1)-f(x_1,\ y_2)-f(x_2,\ y_1)+f(x_2,\ y_2)|\leqslant$$
$$\leqslant C\omega_1(|x_1-x_2|)\,\omega_2(|y_1-y_2|),$$

де $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$ — задані модулі неперервності.

У випадку $\omega_1(t)=K_1t^\alpha$, $\omega_2(z)=K_2z^\beta$ $(0<\alpha,\beta<1)$ клас таких функцій позначатимемо через $K_1K_2H^{(\alpha,\beta)}$. Нехай тепер

$$T_{mn}(f;\ x,\ y)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}\mu_{kl}\,(a_{kl}\cos kx\cos ly+b_{kl}\cos kx\sin ly+$$
$$+c_{kl}\sin kx\cos ly+d_{kl}\sin kx\sin ly),$$

де

$$\mu_{kl}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{при } k=l=0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \text{при } k=0,\ l>0;\ k>0,\ l=0,\\[2mm] 1, & \text{при } k>0,\ l>0\end{cases}$$

є тригонометричний поліном степеня $(m-1)$ по x і $(n-1)$ по y, найкращий у системі рівновіддалених точок (x_k,y_l), де

$$x_k=\frac{k\pi}{m}\ (k=1,\ 2,\dots,\ m);\ y_l=\frac{l\pi}{n}.\qquad (l=1,\ 2,\dots,\ n)$$

За допомогою матриці $\Lambda=\{\lambda_{kl}^{(m-1,\,n-1)}\}$ $(k=0,\ 1,\dots,\ m;\ l=0,\ 1,\dots,\ n;$ $\lambda_{00}^{(m-1,\,n-1)}=1,\ \lambda_{kn}^{(m-1,\,n-1)}=\lambda_{ml}^{(m-1,\,n-1)}=0;\ m,\ n=1,\ 2,\dots)$ на основі полінома $T_{mn}(f;\,x,\,y)$ побудуємо лінійний процес наближення

$$U_{mn}(f;\ x,\ y,\ \Lambda)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}\mu_{kl}\lambda_{kl}^{(m-1,\,n-1)}(a_{kl}\cos kx\cos ly+$$

$$+b_{kl}\cos kx\sin ly+c_{kl}\sin kx\cos ly+d_{kl}\sin kx\sin ly).$$

Знаходимо асимптотичні оцінки величин:

$$E_{mn}[K_1K_2H^{(\alpha,\,\beta)};\ x,\ y,\ \Lambda]=\sup_{f\in K_1K_2H^{(\alpha,\,\beta)}}|f(x,\ y)-U_{mn}(f;\ x,\ y,\ \Lambda)|;$$

$$E_{mn}(H_{\omega_1,\,\omega_2};\ x,\ y,\ \Lambda)=\sup_{f\in H_{\omega_1,\,\omega_2}}|f(x,\ y)-U_{mn}(f;\ x,\ y,\ \Lambda)|.$$

Теорема 3. Якщо матриця $\Lambda=\{\lambda_{kl}^{(m-1,\,n-1)}\}$ $(k=0,1,\dots,m;\ l=0,\ 1,\dots$ $\dots,\ n;\ \lambda_{00}^{(m-1,\,n-1)}=1,\ \lambda_{kn}^{(m-1,\,n-1)}=\lambda_{ml}^{(m-1,\,n-1)}=0)$ опукла відносно k і l при всіх m і n відповідно, тобто $\Delta^2\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}\leqslant 0,\quad \Delta^2\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}\leqslant 0$, а $1-\lambda_{10}^{(m-1,\,n-1)}=O\left(\frac{1}{m}\right)$, $1-\lambda_{01}^{(m-1,\,n-1)}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, то при $0<\alpha,\ \beta<1$ справедлива рівність

$$E_{mn}[K_1K_2H^{(\alpha,\,\beta)};\ x,\ y,\ \Lambda]=\frac{K_1|\sin mx|}{\pi^{1-\alpha}m^{\alpha}}\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{m-k}\right|+$$

$$+\frac{K_2|\sin ny|}{\pi^{1-\beta}n^{\beta}}\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|+O\left[\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{m-k}\right|\right]+$$

$$+O\left[\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|\right]+O\left[\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\left|\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{kl}^{(m-1,\,n-1)}}{(m-k)(n-l)}\right|\right]+$$

$$+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\right),$$

причому

$$E_{mn}\left[K_1K_2H^{(\alpha,\,\beta)};\ \frac{k\pi}{m},\ \frac{l\pi}{n},\ \Lambda\right]=O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\right);$$

$$E_{mn}\left[K_1K_2H^{(\alpha,\,\beta)};\ x,\ \frac{l\pi}{n},\ \Lambda\right]=\frac{K_1|\sin mx|}{\pi^{1-\alpha}m^{\alpha}}\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{m-k}\right|+$$

$$+O\left[\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{m-k}\right|\right]+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\right);$$

$$E_{mn}\left[K_1K_2H^{(\alpha,\,\beta)};\ \frac{k\pi}{m},\ y,\ \Lambda\right]=\frac{K_2|\sin ny|}{\pi^{1-\beta}n^{\beta}}\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|+$$

$$+O\left[\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|\right]+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}n^{\beta}}\right).$$

Теорема 4. Якщо матриця $\{\lambda_{kl}^{(m-1,\,n-1)}\}$ $(k=0,\ 1,\dots,m;\ l=0,\ 1,\dots,n;$ $\lambda_{00}^{(m-1,\,n-1)}=1,\ \lambda_{kn}^{(m-1,\,n-1)}=\lambda_{ml}^{(m-1,\,n-1)}=0)$ така, що при всіх m і n системи чисел $\nu_{k0}^{(m-1,\,n-1)}=\dfrac{1-\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{k}$, $\nu_{0l}^{(m-1,\,n-1)}=\dfrac{1-\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{l}$ $(k=1,\ 2,\dots$ $\dots,m;\ l=1,2,\dots,n;\ \nu_{00}^{(m-1,\,n-1)}=0)$ не спадають і вгнуті вниз відносно k і l відповідно, тобто $\Delta\nu_{k0}^{(m-1,\,n-1)}\leqslant 0$, $\Delta^2\nu_{k0}^{(m-1,\,n-1)}\geqslant 0$, $\Delta\nu_{0l}^{(m-1,\,n-1)}\leqslant 0$, $\Delta^2\nu_{0l}^{(m-1,\,n-1)}\geqslant 0$, то для заданих мажорант ω_1, ω_2 має місце рівність

$$E_{mn}(H_{\omega_1,\omega_2};\ x,\ y,\ \Lambda)=\frac{1}{\pi}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{m}\right)|\sin mx|\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1;\,n-1)}}{m-k}\right|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin ny|\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{m-k}\right|\right]+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|\right]+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\left|\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{kl}^{(m-1,\,n-1)}}{(m-k)(n-l)}\right|\right]+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right]+O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

причому

$$E_{mn}\left(H_{\omega_1,\omega_2};\ \frac{k\pi}{m},\ \frac{l\pi}{n},\ \Lambda\right)=O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right]+O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

$$E_{mn}\left(H_{\omega_1,\omega_2};\ x,\ \frac{l\pi}{n},\ \Lambda\right)=\frac{1}{\pi}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{m}\right)|\sin mx|\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{m-k}\right|+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\left|\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k0}^{(m-1,\,n-1)}}{m-k}\right|\right]+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right]+O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$E_{mn}\left(H_{\omega_1,\omega_2};\ \frac{k\pi}{m},\ y,\ \Lambda\right)=\frac{1}{\pi}\,\omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin ny|\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\left|\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\lambda_{0l}^{(m-1,\,n-1)}}{n-l}\right|\right]+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right]+O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]+$$

$$+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Зауваження 3. При $\lambda_{kl}^{(m-1, n-1)}=1$ теореми 3 і 4 доведені нами раніше (див. [3], випадок $p=q=0$).

Зауваження 4. Для інтерполяційних поліномів аналогічні результати одержані в роботі [4].

При доведенні цих теорем ми спираємося на результати, одержані для одновимірного випадку в роботах [1, 2], а також використовуємо метод, застосований у роботі [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. В. М. Оловянишников. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. ДАН СССР, 70 (1950), 761.
2. И. М. Ганзбург. Распространение одной асимптотической формулы А. Ф. Тимана на классы функций с заданным модулем непрерывности, ИАН, сер. мат., 27 (1963), 485.
3. Б. В. Ковальчук, Г. П. Губанов. Наближення функцій двох змінних зрізаними середніми сумами від поліномів, найкращих в заданій системі точок. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 2 (1965), 16.
4. Г. П. Губанов. Труди III наукової конференції молодих математиків України.
5. В. Б. Гришин. Диссертация на соискание уч. степ. канд. мат. наук. 1964.