ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.514

Л. М. ЛІСЕВИЧ і І. М. ГЕРМАНЮК

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ S^p-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

У цій статті досліджуються деякі властивості узагальнених похідних функцій у метриці Степанова. Розглядається величина

$$D_{S_l^p}\{f(x),\ \varphi(x)\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(t)-\varphi(t)|^p\,dt\right\}^{1/p},$$

яка називається відстанню Степанова або S^p-відстанню $(p \geqslant 1)$, що відповідає числу l. Простір сумовних в кожному скінченному інтервалі функцій з так обраною метрикою називається простором Степанова або S^p-простором.

Означення 1. Функцію $f'_S(x)$ будемо називати S^p-похідною функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{h\to 0} D_{S_l^p}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ f'_S(x)\right\}=0. \tag{1}$$

Якщо функція $f(x)$ має S^p-похідну, тобто виконується рівність (1), то функцію $f(x)$ будемо називати S^p-диференційованою.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ має S^p-обмежену S^p-похідну, то вона S^p-рівномірно неперервна, тобто яке б не було число $\varepsilon>0$, можна вказати таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що

$$D_{S_l^p}\{f(x+h),\ f(x)\}<\varepsilon,$$

якщо лише $|h|<\delta$.

Доведення. Нехай $f'_S(x)$ є S^p-похідна функції $f(x)$. Застосовуючи нерівність Мінковського, маємо

$$\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(t+h)-f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(t+h)-f(t)-hf'_S(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}+\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|hf'_S(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}=$$

$$=|h|\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'_S(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}+|h|\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f'_S(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}.$$

Використовуючи тепер S^p-диференційовність функції $f(x)$ та S^p-обмеженість $f'_S(x)$, для кожного числа $\varepsilon>0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon)>0$, а також число $M>0$, що для $|h|<\delta$

$$\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(t+h)-f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} < |h|\cdot(\varepsilon+M).$$

Звідси й випливає доведення теореми 1.

Теорема 2. Сума S^p-диференційовних функцій є також S^p-диференційовна функція, і S^p-похідна суми дорівнює сумі S^p-похідних.

Доведення. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ S^p-диференційовні функції, а $f'_S(x)$ і $g'_S(x)$ відповідно їх S^p-похідні. Тоді доведення теореми безпосередньо випливає із нерівності

$$\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left|\frac{[f(t+h)\pm g(t+h)]-[f(t)\pm g(t)]}{h}-[f'_S(t)\pm g'_S(t)]\right|^p dt\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'_S(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left|\frac{g(t+h)-g(t)}{h}-g'_S(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Теорема 3. Якщо $f'_S(x)$ є S^p-похідною функції $f(x)$, а функція

$$f_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

має звичайну похідну $f_h'(x)$, то

$$f'_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f'_S(t)\,dt. \tag{2}$$

Доведення. Покладемо

$$\varphi(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f'_S(t)\,dt.$$

Тоді, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\left|\frac{f_h(x+k)-f_h(x)}{k}-\varphi(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left[\frac{f(t+k)-f(t)}{k}-f'_S(t)\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left|\frac{f(t+k)-f(t)}{k}-f'_S(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}. \tag{3}$$

Тому що функція $f(x)$ є S^p-диференційовна, то права частина нерівності (3) прямує до нуля, коли $k\to 0$. Отже, для довільного числа $\varepsilon>0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що

$$\left|\frac{f_h(x+k)-f_h(x)}{k}-\varphi(x)\right|<\varepsilon,$$

якщо лише $|k|<\delta$. Звідси випливає, що $\varphi(x)=f_h'(x)$.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ має S^p-обмежену S^p-похідну $f'_S(x)$, то

$$D_{S_l^p}\{f(x+h),\ f(x)\} \leqslant |h| \cdot L,$$

де L — стала, тобто має місце узагальнена в метриці S^p умова Ліпшиця.

Доведення теореми безпосередньо випливає із доведення теореми 1, якщо покласти там $\varepsilon+M=L$.

ЛІТЕРАТУРА

1. W. Stepanoff. Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen. Math. Ann., Bd. 95, 1925.

2. А. С. Кованько и Л. Н. Лисевич. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p-почти-периодической функции. Вопросы мат. физики и теории функций, № 2, 1964.