УДК 517.514

О. С. КОВАНЬКО і Л. М. ЛІСЕВИЧ

ДЕЯКІ ГРАНИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ S^p-ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

Означення. Функція $f(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ називається S^p-обмеженою ($p \geqslant 1$), якщо можна вказати таке стале число $A > 0$, що

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < A.$$

Теорема 1. Якщо дійсна функція $f(x) \in L_p[x_0, +\infty)$ S^p-обмежена, то яке б не було число $\tau > 0$, можна вказати нескінченну послідовність значень $x_n(\tau) \to +\infty$, що для $x_n > X > x_0$

$$\sup_{x_n > X} \left| \int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau) - f(t)] \, dt \right| < h, \tag{1}$$

де h — деяке скінченне число.

Доведення. Будемо вважати, що теорема невірна. Тоді можна вказати таке достатньо велике число h_0 і τ_0, що для $x_n > X > x_0$

$$\left| \int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau_0) - f(t)] \, dt \right| \geqslant h_0, \tag{2}$$

тобто, не обмежуючи загальності,

$$\int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau_0) - f(t)] \, dt \geqslant h_0, \tag{3}$$

або

$$\int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau_0) - f(t)] \, dt \leqslant -h_0. \tag{4}$$

Нехай має місце нерівність (3). Тоді для довільного числа $n > N$ і довільного $x \in (X, +\infty)$

$$\int_x^{x+1} [f(t+n\tau_0) - f(t)] \, dt = \int_x^{x+1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [f(t+(k+1)\tau_0) - f(t+k\tau_0)] \right\} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+k\tau}^{x+k\tau+1} [f(t+\tau_0) - f(t)] \, dt. \tag{5}$$

Виберемо нашу послідовність так, щоб $x_k=x+k\tau$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Тоді на основі нерівності (3) із (5) одержимо

$$\int_{x}^{x+1}[f(t+n\tau_0)-f(t)]\,dt \geqslant nh_0. \tag{6}$$

Якщо має місце нерівність (4), то аналогічно можна одержати

$$\int_{x}^{x+1}[f(t+n\tau_0)-f(t)]\,dt \leqslant -nh_0. \tag{7}$$

Із виразів (6) і (7) маємо

$$\left|\int_{x}^{x+1}[f(t+n\tau_0)-f(t)]\,dt\right| \geqslant nh_0.$$

Далі, застосовуючи нерівність Мінковського, дістанемо

$$\left(\int_{x}^{x+1}|f(t+n\tau_0)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int_{x}^{x+1}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \geqslant nh_0.$$

Остання нерівність суперечить S^p-обмеженості функції $f(x)$. Таким чином, для довільного числа $\tau>0$ існує така послідовність $x_n(\tau)\to+\infty$, для якої виконується нерівність (1). Теорема доведена.

Аналогічно доводиться така теорема:

Теорема 2. Якщо дійсна функція $f(x)\in L_p(-\infty, x_0)$ S^p-обмежена, то яке не було б число $\tau<0$, можна вказати нескінченну послідовність значень $x_n=x_n(\tau)\to-\infty$, що для $x_n<X<x_0$

$$\sup_{x_n<X}\left|\int_{x_n}^{x_n+1}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt\right|<h,$$

де h — деяке скінченне число.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 1 і для довільного числа $\tau>0$ існує скінченна границя

$$\lim_{x_n\to+\infty}\frac{1}{\tau}\int_{x_n}^{x_n+1}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt=A, \tag{8}$$

то

$$\lim_{x_n\to+\infty}\frac{1}{x_n}\int_{x_n}^{x_n+1}f(t)\,dt=A.$$

Доведення. Можливість існування скінченної границі (8) випливає з теореми 1. Нехай виконується нерівність (8). Тоді для кожного числа $\varepsilon>0$ і $x_n>X>x_0$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{1}{\tau}\int_{x_n}^{x_n+1}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Зрозуміло, що тоді виконуються нерівності

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{\tau} \int\limits_{X+k\tau}^{X+k\tau+1} [f(t+\tau) - f(t)]\, dt < A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

для $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Сумуючи нерівності (9), одержимо

$$(n+1)\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\tau} \int\limits_{X+k\tau}^{X+k\tau+1} [f(t+\tau) - f(t)]\, dt < (n+1)\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Після заміни змінних в інтегралі і сумування матимемо

$$(n+1)\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{1}{\tau} \int\limits_{X}^{X+1} [f(t+(n+1)\tau) - f(t)]\, dt < (n+1)\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{10}$$

Покладемо тепер $x_n = X + (n+1)\tau$. Тоді із (10) одержимо таку нерівність:

$$\left| \frac{1}{x_n - X} \int\limits_{X}^{X+1} [f(t + x_n - X) - f(t)]\, dt - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Розглянемо тепер тотожність

$$\frac{1}{x_n} \int\limits_{x_n}^{x_n+1} f(t)\, dt - A = \frac{1}{x_n}\left[\int\limits_{X}^{X+1} f(t)\, dt - AX \right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{X}{x_n}\right) \left\{ \frac{1}{x_n - X} \int\limits_{X}^{X+1} [f(t + x_n - X) - f(t)]\, dt - A \right\}. \tag{12}$$

Використовуючи нерівність (11) і S^p-обмеженість функції $f(x)$, із тотожності (12) при $x_n > X$ дістанемо

$$\left| \frac{1}{x_n} \int\limits_{x_n}^{x_n+1} f(t)\, dt - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

що й треба було довести.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ із строго додатним інтегралом задовольняє умови теореми 1 і для довільного числа $\tau > 0$ існує додатна скінченна границя

$$\lim_{x_n \to +\infty} \left(\frac{\int\limits_{x_n}^{x_n+1} f(t+\tau)\, dt}{\int\limits_{x_n}^{x_n+1} f(t)\, dt} \right)^{1/\tau} = A, \tag{13}$$

то

$$\lim_{x_n \to +\infty} \left(\int_{x_n}^{x_n+1} f(t)\, dt \right)^{1/x_n} = A,$$

Доведення. Нехай виконується рівність (13) і $A>0$. Тоді для $x_n > X > x_0$

$$\left(\frac{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t+\tau)\, dt}{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t)\, dt} \right)^{1/\tau} = A + \alpha(x_n), \tag{14}$$

де $\alpha(x_n) \to 0$, якщо $x_n \to +\infty$. Із (14) маємо

$$\lim_{x_n \to +\infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t+\tau)\, dt}{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t)\, dt} = \ln A.$$

Тоді для кожного числа $\varepsilon > 0$ і $x_n > X > x_0$

$$\ln A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{\tau} \ln \frac{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t+\tau)\, dt}{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t)\, dt} < \ln A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Продовження доведення теореми цілком аналогічне доведенню теореми 3.

Примітка. Послідовність x_n в теоремах 3 і 4 взята із теореми 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. W. Stepanoff. Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen. Math. Ann., Bd. 95, 1925.